S u m m a r i u m
47 (67) – 2018

HENRYK PIERSA

KWANTOWANIE POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO – FOTONY I FALE*

Fale elektromagnetyczne znane są już uczniom szkoły średniej. Licealiści wiedzą, że stanowią one zmienne, w przestrzeni i czasie pole elektryczne $\vec{E}$ i magnetyczne $\vec{H}$, że posiadają określoną długość fali λ, częstość ν (lub ω), że w próżni poruszają się z prędkością światła c, a także mogą się odbijać od przeszkody, załamywać, uginać, interferować i polaryzować. Te wiadomości zakłada się u Czytelnika.

1. RÓWNANIA MAXWELLA I NIEKTÓRE ICH KONSEKWENCJE

W tym celu odwołujemy się do kilku praw elektrodynamiki klasycznej, sformułowanych na poziomie akademickim. Będą one stanowiły punkt wyjścia do elektrodynamiki kwantowej. Wymienione wektory $\vec{E}$ i $\vec{H}$ występują w równaniach Maxwella[1]:

$$rot\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$div\,\vec{H} = 0, \tag{2}$$

$$rot\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{i}, \tag{3}$$

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{4}$$

Skróty ‘rot’, ‘div’, ‘grad’ oznaczają operatory różniczkowe, działające na funkcje wektorowe $\vec{E}(x,y,z,t)$ i $\vec{H}(x,y,z,t)$. Ich postać analityczna będzie

Prof. dr hab. HENRYK PIERSA – emerytowany profesor KUL, członek czynny i wiceprzewodniczący Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego TN KUL.

* Odczyt wygłoszony na posiedzeniu Komisji Filozofii Przyrody TN KUL.

[1] W. HEITLER, *Kwantowa teoria promieniowania*, Warszawa 1959, s. 15

podana na końcu artykułu. Natomiast ρ oznacza gęstość ładunku elektrycznego, a $\vec{\imath} = \rho\vec{v}$ - gęstość prądu elektrycznego.

Oprócz przytoczonych równań, wprowadza się równości-potencjały[2]:

wektorowy

$$\vec{H} = rot\,\vec{A} \tag{5}$$

i skalarny

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -grad\,U \tag{6}$$

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że pole elektromagnetyczne jest bezźródłowe (ρ = 0 i $\vec{\imath} = 0$), że bok sześcianu L, zawierające pole, jest bardzo duży w porównaniu z długością fali, przemieszczającej się w nim. Ponadto zakładamy, że pole jest charakteryzowane przez potencjał $\vec{A}(\vec{r},t)$, zaś $U(\vec{r},t) = 0$ (tzw. Cechowanie Coulomba)[3].

Dla swobodnego pola elektromagnetycznego w przedstawieniu Hamiltona równanie falowe dla wektora $\vec{A}(\vec{r},t)$ jest

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Do tego równania dodana jest równość[4]

$$div\,\vec{A} = 0 \tag{8}$$

oraz warunek: na przeciwległych ścianach sześcianu o boku L z polem $\vec{A}(\vec{r},t)$, funkcja ta jest okresowa to znaczy

$$\vec{A}(\vec{r}+L,t) = \vec{A}(\vec{r},t). \tag{9}$$

Całka z równania (7) jest funkcją [5]

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum \vec{a}_k e^{ik\bullet r} + \vec{a}_k^* e^{-ik\bullet r}. \tag{10}$$

Gdzie $\vec{a}_k = \vec{a}_0 e^{-i\omega_k t}$, zaś $\vec{a}_k^*$ jest funkcją z nią sprzężoną.
Dowolny k-ty składnik sumy (10) przedstawia falę stojącą w kierunku wyznaczonym przez wektor falowy $\vec{k}$.

[2] Tamże, s. 16
[3] Tamże, s. 18
[4] Tamże, s. 59
[5] Tamże, s. 70

2. WPROWADZANIE WSPÓŁRZĘDNYCH KANONICZNYCH

Przy przejściu od opisu falowego do opisu fotonowego, dokonuje się przekształcenia zmiennych $\vec{a}_k$ i $\vec{a}_k^*$ na zmienne kanoniczne $\vec{Q}_k$, $\vec{P}_k$:

$$\vec{Q}_k = C\left(\vec{a}_k + \vec{a}_k^*\right),\ \vec{P}_k = -i\omega_k C\left(\vec{a}_k - \vec{a}_k^*\right), \tag{11}$$

Gdzie C jest stałą normalizacji.

Za pomocą zmiennych $\vec{Q}_k$ i $\vec{P}_k$ hamiltonian k-tej fali stojącej przyjmuje kształt

$$H_k = \frac{1}{2}\left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2\right). \tag{12}$$

Wektory $\vec{Q}_k$ i $\vec{P}_k$ są prostopadłe do wektora falowego $\vec{k}$.
Można wykazać, że równanie ruchu k-tej fali stojącej ma postać[6]:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k^2 = 0. \tag{13}$$

K-tą falę stojącą można traktować jako oscylator harmoniczny, natomiast sumę składników (13) można interpretować jako nieskończony lecz uporządkowany zbiór niezależnych, jednowymiarowych oscylatorów harmonicznych.

Dowodzi się, że energia pola elektromagnetycznego w komorze L^3 wyraża się wzorem

$$E = H = \sum_k H_k = \sum_k \frac{1}{2}\left(P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2\right). \tag{14}$$

Każda z wielkości Q_k, P_k posiada dwie składniowe $j = 1,2$,określające kierunek polaryzacji k-tego oscylatora.Wobec tego każdą ze zmiennych Q_k, P_k, występujących we wzorach (12) i (14), należy zaopatrzyć nadto we wskaźnik j: Q_{kj}, P_{kj}.

Powyższe rozważania odnoszą się do dowolnych pól elektromegnetycznych, pod warunkiem że długość fal stojących jest bardzo mała w porównaniu z rozmiarami liniowymi sześcianu. H. Weyl wskazał, że uzyskane wyniki pozostają także ważne dla wnęki dowolnego kształtu, jeżeli tylko jej rozmiary są bardzo duże w porównaniu z długością fali.

[6] L.D. LANDAU, E.M. LIFSZIC, *Krótki kurs fizyki teoretycznej*, t. 1, Warszawa 1980, s. 255

3. KWANTYZACJA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Formalnie, przejście od fal stojących do oscylatorów skwantowanego pola, dokonuje się przez zmianę współrzędnych Q_{kj} i pędów P_{kj} na operatory $\hat{Q}_{kj}$, $\hat{P}_{kj}$, z następującymi regułami komutacji:

$$\left[\hat{Q}_{kj}, \hat{P}_{kj}\right] = -i\hbar \tag{15}$$

dla takich samych k, j

$$\left[\hat{Q}_{kj}, \hat{P}_{kj}\right] = 0 \tag{16}$$

i dla różnych k, j.

W konsekwencji hamiltonian (12) staje się operatorem

$$\hat{H}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\hat{P}_{kj}^2 + \omega_{kj}^2 \hat{Q}_{kj}^2\right) \tag{17}$$

a także

$$\hat{H} = \sum_{kj} \hat{H}_{kj}. \tag{18}$$

Wartości własne operatora $\hat{H}_{kj}$ są takie same, jak wartości własne oscylatora[7]:

$$E_{kj} = n_{kj}\omega_k \hbar. \tag{19}$$

Energię całego pola wyraża się wzorem

$$E = \sum_{kj} n_{kj}\omega_k \hbar, \tag{20}$$

Natomiast całkowity pęd

$$\vec{P} = \sum_{kj} n_{kj}\vec{k}\hbar \tag{21}$$

Poddane kwantyzacji pole elektromagnetyczne jest nieskończonym, ale przeliczalnym zbiorem fotonów o określonych równością (20) energiach i przez wzór (21) pędach.

---

[7] W. Heitler uzupełnia wzór (17) o iloczyn $-\frac{1}{2}\hbar\nu_\lambda$, opisujący drgania zerowe. Choć we wzorze na energię, tego składnika nie uwzględnia (s. 71). Landau i Lifszic w drugim tomie *Krótkiego kursu fizyki teoretycznej*, hamiltonianu – odpowiednikiem wzoru (17) nie wzbogacając o omawiany składnik (s. 225). Trzy stronice dalej uwzględniając go we wzorze na energię.

4. FOTONOWY I FALOWY CHARAKTER POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Z ostatnich rozważań wypada wnosić, że pole elektromagnetyczne ma charakter dyskretny, stanowi zbiór fotonów.

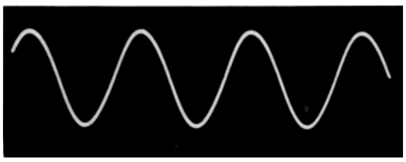
Zanim ustosunkujemy do tego stwierdzenia, podamy kilka danych, odnośnie do energii fotonów o różnych częstościach. Wykorzystując wzór Plancka $E = h\nu$, znajdujemy: dla $\nu = 10^{20}$ Hz (promieniowanie gamma) $E=7\cdot10^{-14}$ J, dla $\nu = 3\cdot10^{18}$ Hz (promieniowanie rentgenowskie) $E=2\cdot10^{-15}$ J, dla $\nu = 3\cdot10^{16}$ Hz (nadfiolet) $E = 2\cdot10^{-17}$ J, dla $\nu = 3\cdot10^{10}$ Hz (mikrofale) $E = 2\cdot10^{-23}$ J, dla $\nu = 3\cdot10^{8}$ Hz (fale ultrakrótkie) $E = 2\cdot10^{-29}$ J, dla $\nu = 3\cdot10^{4}$ Hz (fale długie) $E = 2\cdot10^{-29}$ J[8].

Jak widać z przytoczonych danych, rozpiętość energii kwantowej promieniowania elektromagnetycznego, dla przytoczonego przedziału częstości, jest niewyobrażalnie duża. W związku z tym, o ile uzasadnione jest mówienie o fotonach promieniowania gamma, Röntgena, promieniowaniu nadfioletowym, a nawet krótkofalowego widzialnego, trudno jest używać tej nazwy do fal radiowych czy długich.

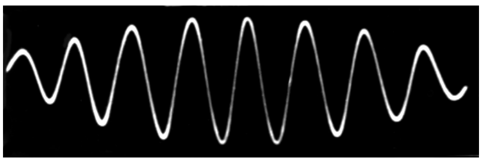
Fotony pojmowane jako przestrzennie niewyobrażalnie małe mikroobiekty, w próżni przemieszczają się z prędkością światła c.

Fale elektromagnetyczne zajmują przestrzennie duże obszary i w próżni przemieszczają się także z prędkością światła.

Na fotografii z rysunku 1 zamieszczono domknięty fragment fali harmonicznej. Można na niej dostrzec długość fali i jej podwójną amplitudę.



Rys. 1



Rys. 2

Na fotografii z rysunku 2 pokazano ograniczony ‘pakiet’ fal[9] prawie sinusoidalnej fali o modulowanej amplitudzie, propagującej się wzdłuż osi według wzoru[10]:

[8] *Słownik Fizyczny*, Warszawa 1984, s. 118; G. FEINBERG, *Światło*, w: *Światło*, Biblioteka problemów, t. 179, Warszawa 1973, ryc. 16.

[9] A.H. PIEKARA, *Elektryczność, magnetyzm i promieniowanie*, Warszawa 1987, s. 221

[10] F.C. GRAWFORD, *Fale*, Warszawa 1972, s. 286

$$A_m(z,t) = 2A\cos(\omega_m t - k_m z), \tag{22}$$

Gdzie litera m przy funkcji A_m, częstości ω_m i liczbie falowej k_m jest skrótem przymiotnika ‘maksymalna’. Żadnej z tych fal nie można utożsamić z cząstką – fotonem. Dodać należy, że obydwie krzywe z rysunków są powatarzalne.

Między falami i fotonami występują i cechy wspólne: w przestrzeni rozchodzą się z taką samą prędkością, przenoszą energie i pędy. Fale jednak przenoszą je w sposób ciągły, fotony – w sposób dyskretny: każdy foton przenosi określoną porcję energii $\hbar\omega$ i pędu $\hbar k$.

Do ‘pogodzenia’ falowej natury promieniowania wykorzystuje się prawa statystki matematycznej.

Jednym z ważnych pojęć statystyki jest pojęcie fluktuacji, czyli chwiejności, niestabilności w zastosowaniu do badanych obiektów.

W 1909 r. G.I. Tylor[11] utrwalił na kliszy fotograficznej ślady pojedynczych fotonów ugiętych na główce szpilki. Doświadczenie trwało 3 miesiące. W efekcie na kliszy utworzył się obraz.

Około 40 lat później S.I. Wawiłow, wraz z uczniami, obserwował od 200 do 400 fotonów światła o długości fali 5250 Ǻ[12]. W czasach późniejszych opracowano odpowiednią aparaturę (lasery, urządzenia do zliczania i rejestracji), która pozwoliła rejestrować i zliczać ślady poszczególnych fotonów.

R.L. Pfleegor i L. Mandel z Uniwersytetu w Rochester ustalili, „że każdy foton osiąga zupełnie przypadkowe miejsce w detektorze”[13].

A więc fotony, ale i inne cząstki (np. elektrony), podobnie jak cząstki gazu, wykazują fluktuacje. I można do nich stosować teorie statystyczne. Nas interesować będą trzy rozkłady statystyczne:

– Rozkład Wiena

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8h\pi}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^3 d\nu, \tag{23}$$

– Rozkład Rayleigha-Jeansa

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kTd\nu, \tag{24}$$

– Rozkład Plancka

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8h\pi\nu^3 d\nu}{c^3} \frac{1}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{25}$$

[11] E.H. WICHMANN, *Fizyka stomowa*, Warszawa 1973, s. 190

[12] B. JAWORSKI, A. DETŁAW, *Kurs fizyki*, t. 3: *Procesy falowe, optyka, fizyka atomowa i jądrowa*, Warszawa 1969, s. 332

[13] G. FEINBERG, *Światło*, s. 27

We wzorach (23)-(25) ρ_ν jest widmową gęstością energii ν – częstości promieniowania, k – stałą Boltzmana, h – stałą Plancka, T – temperaturą w skali bezwzględnej, c – prędkością światła i e – stałą matematyczną, podstawą logarytmów naturalnych.

Na podstawie rozkładu Gibbsa wyprowadza się wzór na średnią kwadratu fluksji energii pola elektromagnetycznego $\overline{\varepsilon^2}$ [14]

$$\overline{\varepsilon^2} = kT\frac{d\bar{E}}{dt}, \tag{26}$$

Gdzie $\bar{E} = V\rho_\nu d\nu$, V – objętość przestrzeni, w której istnieje pole elektromagnetyczne.

Wykorzystując definicję wielkości $\bar{E}$ i stosując równość (26) do rozkładów (23)-(25), wyprowadza się średnią kwadratów fluksji energii pola promieniowania:

– dla wzoru Wiena

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu\bar{E}, \tag{27}$$

– dla Rayleigha-Jeansa

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3\overline{E^2}}{8\pi V\nu^2 d\nu} \tag{28}$$

– i dla Plancka [15]

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu\bar{E} + \frac{c^3\overline{E^2}}{8\pi V\nu^2 d\nu}. \tag{29}$$

Pierwszy składnik równości (29) jest identyczny ze wzorem (27) i odnosi się do fal krótkich, drugi jest identyczny z równością (28) i stosuje się do fal długich.

Prawo Plancka opisuje więc całe widmo fal elektromagnetycznych. Można powiedzieć, że prawo to łączy dwie teorie: elektrodynamikę kwantową z Maxwella elektrodynamiką klasyczną. Prawo Wiena opisuje fotony, natomiast prawo Rayleigha-Jeansa – fale. Po połączeniu fotonów z falami pozostaje określenie granicy między nimi.

Spróbujemy dokonać tego, wykorzystując zjawisko fotoelektryczne. Obecnie to zjawisko omawiane jest w podręcznikach licealnych[16].

---

[14] E. Szpolski, *Fizyka atomowa*, t. I, Warszawa 1953, s. 324 i uzupełnienie IV.

[15] Tamże, s. 325-326.

[16] Por. J. Ginter, *Fizyka podręcznik dla liceum ogólnokształcącego klasa 3*,Warszawa 1990.

Zjawisko fotoelektryczne pozwala wyznaczyć długość fali przypisywanej fotonowi danego promieniowania. Zmierzone dla różnych metali i różnych rodzajów długości fal promieniowania, pozwoli określić granicę między fotonami i falami.

Jak wiadomo, zjawisko fotoelektryczne wyjaśnił A. Einstein, podając następującą równość:

$$E_k = h\nu - W,\# \tag{30}$$

Gdzie E_k jest energią kinetyczną wybitego elektronu z metalu przez foton o energii $h\nu$, zaś W – pracą wyjścia. Gdy $h\nu > W$, wybity elektron uzyskuje energię E_k. Jeżeli $h\nu_0 = W$, elektron opuściłby metal z zerową energią. Częstość ν_0 nazywana jest częstością progową.

Częstość progowa dla różnych metali jest inna. Dla platyny wynosi $1{,}4 \cdot 10^{-15}$ Hz, dla wolframu – ok. 10^{-15} Hz, dla cezu – $0{,}4 \cdot 10^{-15}$ Hz. Przy długości fal mniejszych od 2500 Å, wszystkie metale wykazują zjawisko fotoelektryczne.

Na zakończenie dodajmy, że oprócz normalnego zjawiska fotoelektrycznego, występuje tzw. Selektywne zjawisko fotoelektryczne. Występuje ono wtedy, gdy na płytkę metalową padają fotony pod różnym od zera kątem α do normalnej względem powierzchni płytki.

W klasycznej optyce falowej, płaszczyzna w której leży wektor $\vec{E}$ (wektor świetlny), musi być prostopadła do płaszczyzny padania. Tylko wtedy wektor $\vec{E}$ posiada składowałą prostopadłą do powierzchni płytki[17].Warunek ten jest spełniony w selektywnym zjawisku fotoelektrycznym.

A więc fotonom należy przypisać nie tylko nazwę ‘fala o długości λ’, ale ‘fala poprzeczna o długości λ’.

[17] Por. np. S.Pieńkowski, Fizyka doświadczalna, t. 3, Warszawa 1955, s. 318. Sz.Szczeniowski, Fizyka doświadczalna, t. V, cz. 1, Fizyka atomowa, Warszawa 1959, s. 52-53

DODATEK:

PEWNE INFORMACJE Z MATEMATYKI

Wszystkie funkcje podane w tym dodatku są funkcjami ciągłymi.
Pierwszą pochodnią funkcji f(x) zapisujemy

$$y' = \frac{df(x)}{dx}, \tag{I}$$

Jej druga pochodna jest

$$y'' = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}. \tag{II}$$

Gdy zmienną niezależną jest czas t, I-sza i II-ga pochodnia są oznaczane przez fizyków punktami

$$\dot{y} = \frac{df(t)}{dt} \; i \; \ddot{y} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}. \tag{III}$$

Dla funkcji 3-ch zmiennych f(x,y,z) pochodne cząsteczkowe są zapisywane:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}. \tag{IV}$$

Drugie pochodne cząsteczkowe, zapisuje się:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} \tag{V}$$

Operatorami prostymi są:

$$\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{VI}$$

Dadajmy jeszcze operatory rzutów pędu na osie x, y, z:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \; \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \; \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{VII}$$

Przytoczymy niektóre operatory złożone. Niech $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ oznaczają jednostkowe wektory (wersory) na osiach x,y i z układu kartezjańskiego.
Definiujemy złożony operator Hamiltona (inaczej operator nabla):

$$\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{VIII}$$

Za jego pomocą wprowadzamy grad F(x,y,z):

$$\nabla F = \vec{a}_x \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial F}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial F}{\partial z} = grad\, F. \qquad \text{IX}$$

Działając operatorem nabla na pole wektorowe $\vec{A}(x, y, z)$, otrzymujemy dywergencję $\vec{A}$:

$$\nabla . \vec{A} = div\, \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{X}$$

Mnożąc wektorowo ∇ przez wektor $\vec{A}$, dostajemy rotację pola wektorowego:

$$\nabla x \vec{A} = rot\, \vec{A}. \qquad \text{XI}$$

Wreszcie działając operatorem ∇ na gradient pola skalarnego F(x,y,z), otrzymujemy operator Laplace'a:

$$\nabla(\nabla F) = \nabla^2 = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \qquad \text{XII}$$

Podobnie jak π, liczbą niewymierną jest liczba e = 2,72.
W fizyce często wykorzystuje się funkcje $f(x) = e^{ix}$, gdzie x jest zmienną, a $i = \sqrt{-1}$. e^{-ix}jest funkcją sprzężoną z funkcją e^{ix}.
Warto zauważyć, że energie E=$h\nu$ jest ekwiwalentna do energii E= ħω, gdzie ħ = $\frac{h}{2\pi}$, przez przyrównanie i podzielenie przez h, otrzymuje się: μ = $\frac{\omega}{2\pi}$.