ROCZNIKI NAUK SPOŁECZNYCH
Tom XXXVI, zeszyt 3 – 2008

KATARZYNA ZIĘTEK-KWAŚNIEWSKA

MODELE WYCENY OPCJI NA AKCJE

WSTĘP

Problematyka wyceny opcji podejmowana była przez wielu naukowców, a próba stworzenia drzewa genealogicznego modeli umożliwiających wyznaczenie wartości „prawdziwej" tych instrumentów pochodnych każe nam sięgnąć aż do 1900 roku – do roku, w którym Louis Bachelier w swej rozprawie doktorskiej zatytułowanej *Theory of Speculation* (obronionej na Sorbonie w 1900 roku) zaproponował teoretyczny model procesu cen akcji. Choć model ten, zakładając, iż ceny akcji podlegają arytmetycznym ruchom Browna, dopuszczał ujemne ceny waloru bazowego (co kłóci się z rzeczywistością), niewątpliwie przetarł szlak kolejnym poszukiwaczom analitycznych metod wyceny opcji.

Od tamtego czasu powstawało wiele modeli wyceny. W latach 60. XX wieku zagadnieniu temu uwagę poświęcili m.in. C. M. Sprenkle, H. F. Ayres, P. A. Samuelson czy A. H. Chen[1], choć należy zauważyć, iż modele powstałe w tym okresie w głównej mierze dotyczyły warrantów[2], gdyż rynki tych instrumentów były znacznie bardziej rozwinięte niż rynki opcji. Bez wątpienia największy sukces w zakresie wyceny opcji odnieśli Fischer Black i Myron

Mgr KATARZYNA ZIĘTEK-KWAŚNIEWSKA – asystent Katedry Zastosowań Matematyki w Instytucie Ekonomii i Zarządzania Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego Jana Pawła II; adres do korespondencji: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin.

[1] Por. K. A p p e l t, *O różnych podejściach do wyceny opcji. Charakterystyka modeli wyceny opcji sprzed 1973 roku*, „Zeszyty Studiów Doktoranckich" 2004, z. 13, s. 6.

[2] C. M. Sprenkle w swym artykule *Warrant prices as indications of expectations and preferences* z 1961 r. określił warrant jako jeden z pięciu typów opcji kupna akcji. Cechami wyróżniającymi ten instrument są: długi okres życia oraz podmiot wystawiający, którym jest spółka będąca emitentem akcji (tamże, s. 6).

Scholes[3], których model, opublikowany po raz pierwszy w 1973 roku, jest uznawany „[...] za jedno z największych osiągnięć współczesnych finansów"[4]. Niezwykle istotne dla obecnego kształtu wiedzy o szacowaniu wartości opcji były również dokonania Johna Coxa, Stephena A. Rossa i Marka Rubinsteina – twórców modelu dwumianowego, wpisującego się w nurt numerycznych modeli wyceny.

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja podstawowych modeli umożliwiających wyznaczenie wartości akcyjnych opcji kupna i sprzedaży. Omówione w nim zostały, wspomniane powyżej, model dwumianowy oraz Blacka-Scholesa, a także model Mertona, stanowiący najsłynniejsze rozwinięcie formuły Blacka-Scholesa.

1. MODEL DWUMIANOWY

Model dwumianowy wyceny opcji, określany również modelem dwustanowym, dwudzielnym oraz metodą drzewka dwumianowego, choć po raz pierwszy zaprezentowany został przez Williama Sharpe'a w 1978 r.[5], zazwyczaj łączony jest z nazwiskami Johna Coxa, Stephena A. Rossa i Marka Rubinsteina, którzy w 1979 roku na łamach „Journal of Finance Economic" opublikowali artykuł pt. *Option Pricing: A Simplified Approach*[6].

W ramach modelu dwumianowego – jak zaznacza J. M. Karpoff[7] – wskazać można dwa podejścia umożliwiające oszacowanie wartości opcji. Pierwsze z nich zakłada wycenę opcji w warunkach powszechnej obojętności względem ryzyka (ang. *the risk-neutral approach*), drugie natomiast odwołuje się do

---

[3] W 1997 roku Myron Scholes i Robert Merton otrzymali Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii za opracowanie metody wyceny instrumentów pochodnych, w tym zwłaszcza opcji. Fischer Black zmarł dwa lata wcześniej, jednakże – według powszechnej opinii – gdyby żył, byłby trzecim laureatem tej Nagrody (zob. A. Palczewski, *Wzór Blacka-Scholesa*, http://www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta1203/wzorbs.pdf).

[4] Appelt, dz. cyt., s. 5.

[5] Zob. Ch. W. Smithson, C. W. Smith, Jr., D. S. Wilford, *Zarządzanie ryzykiem finansowym. Instrumenty pochodne, inżynieria finansowa i maksymalizacja wartości*, przeł. G. Łuczkiewicz, J. Katolik, Kraków: Oficyna Ekonomiczna 2000, s. 395.

[6] "Journal of Finance Economic" 7(1979): http://www.in-the-money.com/pages/author.htm

[7] *Option Pricing Using Binomial Trees* (tłum. moje – K. Z-K.), http://faculty.washington.edu/karpoff/FIN%20509/FIN509_session4.ppt

metody replikacji opcji[8] za pomocą portfela składającego się z akcji i depozytu/kredytu bankowego (obligacji[9]) (ang. *the replicating portfolio approach*).

Chcąc zaprezentować obydwa wskazane powyżej sposoby, dla opcji kupna zastosowano metodę wyceny, właściwą założeniu o neutralnym podejściu do ryzyka, natomiast dla opcji sprzedaży – metodę bazującą na ekwiwalencie opcji.

1.1. ZAŁOŻENIA MODELU DWUMIANOWEGO (DWUSTANOWEGO)

Podstawowym założeniem, na jakim opiera się model dwumianowy, jest założenie dotyczące rozkładu końcowej wartości waloru podstawowego. Mianowicie, zgodnie z propozycją Coxa, Rossa i Rubinsteina, czas pozostający do wygaśnięcia opcji dzieli się na dyskretne przedziały, po czym przyjmuje się, iż w ciągu każdego z nich możliwe są dwie zmiany cenowe, tzn. instrument bazowy, na jaki opiewa opcja, może podrożeć według stopy u ($u > 1$) lub stanieć według stopy d ($d < 1$), co oznacza, iż cena aktywu bazowego podlega wielokrotnemu procesowi dwumianowemu (ang. *multiplicative binomial process*)[10].

Według kolejnego założenia w danym przedziale czasu (oznaczanym jako t) parametr r jest stały i określa stopę, po której inwestor może udzielać i zaciągać pożyczkę, przy czym zazwyczaj przyjmuje się, iż jest to stopa wolna od ryzyka.

Szczególnie istotnym założeniem modelu dwumianowego jest brak możliwości dokonywania dochodowych i pozbawionych ryzyka transakcji arbitrażowych, implikujący następującą relację między stopą procentową r, czynnikiem wzrostu u i czynnikiem spadku d[11]:

$$d < 1 + r < u \,. \qquad (1.1.1)$$

---

[8] Dany portfel replikuje papier wartościowy, jeśli w dowolnym momencie przynosi taki sam dochód. Oznacza to, iż, przy założeniu braku możliwości korzystnego i pozbawionego ryzyka arbitrażu, cena papieru wartościowego musi być równa cenie portfela (zob. W. D ę b s k i, *Rynek finansowy i jego mechanizmy*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 2000, s. 402).

[9] Kupno obligacji jest równoznaczne z udzieleniem pożyczki, natomiast ich sprzedaż – z jej zaciągnięciem (zob. C o x, R o s s, R u b i n s t e i n, dz. cyt., s. 5 – tłum. moje – K. Z-K.).

[10] Zob. D ę b s k i, dz. cyt., s. 401.

[11] C o x, R o s s, R u b i n s t e i n, dz. cyt., s. 5.

Oprócz wyżej wymienionych, w modelu dwumianowym przyjmuje się założenie o braku kosztów transakcyjnych oraz podatków. Zakłada się również, że inwestorzy działający na rynku mogą dokonywać krótkiej sprzedaży[12].

1.2. JEDNOOKRESOWY MODEL DWUMIANOWY (ANG. ONE-PERIOD MODEL)

Opcja kupna

Przyjmijmy, iż na rynku dostępna jest para instrumentów: kasowy – w naszym przypadku akcja – oraz europejska akcyjna opcja kupna o cenie wykonania *X*. Następnie załóżmy, iż *S* jest bieżącą ceną akcji, a *C* aktualną wartością akcyjnej opcji kupna stylu europejskiego, której pozostał jeden okres do wygaśnięcia.

Ponieważ, zgodnie z założeniem, w okresie ważności opcji cena akcji zmienia się w procesie dwumianowym, oznacza to, że w ciągu tego czasu możliwe są dwa następujące scenariusze zdarzeń[13]:

– cena akcji wzrośnie z poziomu S do poziomu uS $(u > 1)$ z prawdopodobieństwem q, a cena akcyjnej opcji kupna odpowiednio – z C do C_u, przy czym:

$$C_u = \max(0, uS - X), \tag{1.2.1}$$

– cena akcji spadnie z poziomu S do poziomu dS $(d < 1)$ z prawdopodobieństwem $1 - q$, a cena akcyjnej opcji kupna odpowiednio – z C do C_d, przy czym:

$$C_d = \max(0, dS - X). \tag{1.2.2}$$

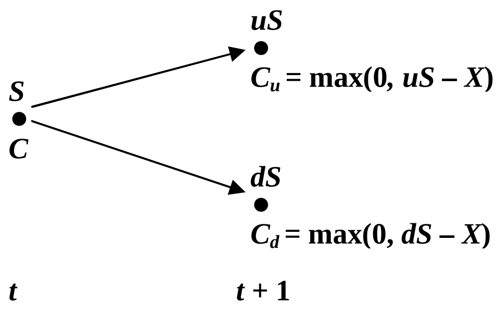
---

[12] Krótka sprzedaż „[...] polega na pożyczeniu akcji, sprzedaniu ich, a następnie po pewnym czasie zakupie tych akcji i ich oddaniu pożyczającemu” (K. J a j u g a, T. J a j u g a, *Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1997, s. 95).

[13] Por. K. P i o n t e k, *Teoretyczna i rzeczywista wartość walutowych instrumentów pochodnych – rynek polski*, http://credit.ae.wroc.pl/~kpiontek/wartpoch.pdf

Graficzną ilustrację kształtowania się ceny akcji i ceny akcyjnej opcji kupna stanowi rysunek 1.

Rysunek 1. Jednookresowe drzewo dwumianowe ceny akcji i akcyjnej opcji kupna



Źródło: Opracowanie własne.

Przyjmijmy, iż dany inwestor, opierając się na dostępnych instrumentach, mianowicie akcjach i opcjach, chce skonstruować portfel wolny od ryzyka – *V*. Można wskazać dwa możliwe sposoby zabezpieczenia takiej inwestycji przed ryzykiem. „Ponieważ ceny opcji kupna i akcji zmieniają się w tym samym kierunku, trzeba kupować jedną z nich i sprzedawać drugą. Można więc zabezpieczyć się przed ryzykiem kupując akcje i sprzedając pewną liczbę opcji lub krótko sprzedając pewną liczbę akcji i kupując opcje”[14]. Zakładając pierwsze z rozwiązań, inwestor w chwili obecnej dokonuje jednoczesnego nabycia jednej akcji oraz wystawienia *h* opcji kupna[15], ponosząc w związku z tym wydatek kupna instrumentu kasowego pomniejszony o wpływ ze sprzedaży *h* opcji[16]. Zgodnie z powyższym, aktualna wartość takiej inwestycji wynosi:

$$V = S - hC\,. \tag{1.2.3}$$

W przypadku, gdy w okresie ważności opcji cena akcji wzrośnie, wówczas na koniec rozpatrywanego przedziału czasu wartość inwestycji będzie równa:

---

[14] R. A. H a u g e n, *Teoria nowoczesnego inwestowania*, przeł. S. Pająk [i in.], Warszawa: WIG-Press 1996, s. 541.

[15] Zob. J a j u g a, J a j u g a, dz. cyt., s. 194.

[16] Zob. A. S o p o ć k o, *Rynkowe instrumenty finansowe*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 2005, s. 259.

$$V_u = uS - hC_u \,. \tag{1.2.4}$$

Jeśli natomiast w okresie życia opcji nastąpi spadek ceny akcji, wtedy wartość analizowanego portfela w momencie wygaśnięcia opcji wynosić będzie:

$$V_d = dS - hC_d \,. \tag{1.2.5}$$

Ponieważ rozpatrywany portfel ma być wolny od ryzyka, a zatem dawać taką samą stopę zwrotu zarówno w przypadku wzrostu, jak i spadku ceny akcji, dlatego jego końcowa wartość musi być jednakowa dla obu alternatywnych scenariuszy cenowych, czyli musi zachodzić $V_u = V_d$. Wynika stąd, iż:

$$uS - hC_u = dS - hC_d \,. \tag{1.2.6}$$

Przekształcając odpowiednio powyższe równanie, mamy:

$$h = \frac{S(u-d)}{C_u - C_d} \,. \tag{1.2.7}$$

Otrzymany parametr *h*, nazywany współczynnikiem zabezpieczenia wolnego od ryzyka (ang. *riskless hedge ratio*)[17], określa, ile opcji kupna powinien wystawić inwestor, aby zabezpieczyć jedną nabytą akcję[18].

Ponieważ założyliśmy, iż korzystny arbitraż nie jest możliwy, łączna rentowność utworzonego bezpiecznego portfela musi odpowiadać stopie zwrotu wolnej od ryzyka[19]. Inaczej, aktualna wartość portfela musi być równa jego zdyskontowanej[20] na chwilę obecną wartości przyszłej, czyli:

$$S - hC = \frac{1}{(1+r)}(uS - hC_u) \,. \tag{1.2.8}$$

[17] Zob. J a j u g a, J a j u g a, dz. cyt., s. 194.

[18] Należy zauważyć, iż parametr ten stanowi odwrotność współczynnika delta, informującego o tym, jaką liczbę akcji powinien posiadać w swoim portfelu inwestor na jedną sprzedaną opcję, tak by możliwa była doskonała osłona (ang. *perfect hedging*) (zob. D ę b s k i, dz. cyt., s. 403).

[19] Zob. S o p o ć k o, dz. cyt., s. 259.

[20] Dyskontowanie odbywa się według stopy wolnej od ryzyka (zob. J a j u g a, J a j u g a, dz. cyt., s. 194).

Podstawiając do powyższego równania za h wielkość ze wzoru (1.2.7), po przekształceniu otrzymujemy następującą formułę wyceny europejskiej opcji kupna w jednookresowym modelu dwumianowym [21]:

$$C = \frac{1}{1+r}\left[pC_u + (1-p)C_d\right], \tag{1.2.9}$$

gdzie:

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d}, \quad 1-p = \frac{u-(1+r)}{u-d}. \tag{1.2.10}$$

Analiza powyższych wzorów wyraźnie wskazuje, iż cena opcji nie zależy od prawdopodobieństwa wzrostu lub spadku ceny akcji oznaczonych przez q i $1-q$. Zasadność takiego stwierdzenia wynika z faktu, iż prawdopodobieństwa przyszłych ruchów cen akcji są już odzwierciedlone w jej cenie, stąd nie należy ich ponownie uwzględniać przy określaniu wartości opcji[22].

Należy przy tym zauważyć, iż przy założeniu powszechnej obojętności względem ryzyka (ang. *risk neutral*) zmienna p zawierająca się w przedziale (0,1) jest interpretowana jako prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji q, zaś zmienna ($1-p$) – jako prawdopodobieństwo jej spadku ($1-q$).

Opcja sprzedaży

Rozważmy sytuację, gdy na rynku dostępne są akcje oraz europejskie opcje sprzedaży wystawione na te akcje o jednym okresie do wygaśnięcia. Podobnie jak poprzednio, przyjmijmy, iż cena akcji – S podlega procesowi dwumianowemu, co oznacza, że na koniec analizowanego przedziału czasu może przyjąć jedną z dwóch wartości – uS (w sytuacji wzrostu) lub dS (w sytuacji spadku). Cenę europejskiej opcji sprzedaży oznaczmy przez P, zaś obowiązującą w danym okresie wolną od ryzyka stopę procentową przez r.

Jednookresowe drzewo dwumianowe przyjmie w tym przypadku taką samą postać, jak dla analizowanej wcześniej opcji kupna, z tym, że w miejsce warto-

[21] Tamże.

[22] Zob. J. H u l l, *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, przeł. P. Dąbrowski, J. Sobkowiak, Warszawa: WIG-Press 1999, s. 275.

ści opcji kupna – C_u i C_d pojawią się odpowiednie wartości opcji sprzedaży – P_u i P_d określone w następujący sposób:

$$P_u = \max(0, X - uS), \tag{1.2.11}$$

$$P_d = \max(0, X - dS). \tag{1.2.12}$$

Załóżmy następnie, że inwestor tworzy portfel V replikujący opcję sprzedaży, zawierający Δ akcji oraz pewną sumę B depozytu/kredytu bankowego. Wartość zbudowanego w taki sposób portfela wynosi:

$$V = \Delta S + B. \tag{1.2.13}$$

Uwzględniając możliwe zmiany ceny akcji, na koniec rozpatrywanego okresu wartość portfela wynosić będzie[23]:

– $\Delta uS + (1+r)B$ – w przypadku wzrostu ceny akcji,

– $\Delta dS + (1+r)B$ – w przypadku spadku ceny akcji.

Ponieważ utworzony przez inwestora portfel replikuje opcję sprzedaży, na koniec analizowanego przedziału czasu spełnione muszą być następujące zależności:

$$\Delta uS + (1+r)B = P_u, \tag{1.2.14}$$

$$\Delta dS + (1+r)B = P_d. \tag{1.2.15}$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy wartości Δ i B umożliwiające utworzenie portfela replikującego opcję sprzedaży:

$$\Delta = \frac{P_u - P_d}{(u-d)S}, \qquad B = \frac{1}{(1+r)}\frac{uP_d - dP_u}{(u-d)}. \tag{1.2.16}$$

Portfel zbudowany na podstawie tak dobranych parametrów Δ i B w porównaniu z opcją sprzedaży nie generuje w terminie realizacji ani zysku, ani straty. Taki portfel określany jest mianem portfela równoważnego (ang. *equivalent portfolio*)[24].

[23] Zob. E. Dziawgo, *Modele kontraktów opcyjnych,* Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika 2003, s. 58.

[24] Zob. Dębski, dz. cyt., s. 403.

Zauważmy, iż w przypadku opcji sprzedaży parametr Δ[25] przyjmuje wartości ujemne, zaś B wartości dodatnie, co oznacza, że inwestor musi zająć krótką pozycję w akcjach oraz udzielić pożyczki/zdeponować środki w banku.

Pamiętając, iż korzystny i pozbawiony ryzyka arbitraż nie jest możliwy, bieżąca wartość europejskiej opcji sprzedaży P musi być równa aktualnej wartości portfela $\Delta S + B$. Skoro tak:

$$P = \Delta S + B = \frac{P_u - P_d}{u-d} + \frac{uP_d - dP_u}{(u-d)(1+r)} = \frac{1}{1+r}\left[\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right)P_u + \left(\frac{u-(1+r)}{u-d}\right)P_d\right]. \qquad (1.2.17)$$

Przyjmując, tak jak poprzednio, $p = \frac{(1+r)-d}{u-d}$, po uproszczeniu otrzymujemy następujący wzór umożliwiający wycenę opcji sprzedaży w jednookresowym modelu dwumianowym[26]:

$$P = \frac{1}{1+r}\left[pP_u + (1-p)P_d\right]. \qquad (1.2.18)$$

1.3. DWUOKRESOWY MODEL DWUMIANOWY

Opcja kupna

Analiza drzewa dwumianowego może zostać rozszerzona na dwa okresy. Przyjmując te same oznaczenia co poprzednio oraz te same założenia odnośnie do możliwych zmian ceny instrumentu bazowego, mamy trzy scenariusze kształtowania się ceny akcji po dwóch okresach, czyli w terminie wygaśnięcia opcji[27]:

– w sytuacji dwukrotnego wzrostu – cena akcji przyjmie wartość u^2S,
– w sytuacji wzrostu i spadku (albo spadku i wzrostu) – cena akcji przyjmie wartość duS,
– w sytuacji dwukrotnego spadku – cena akcji przyjmie wartość d^2S.

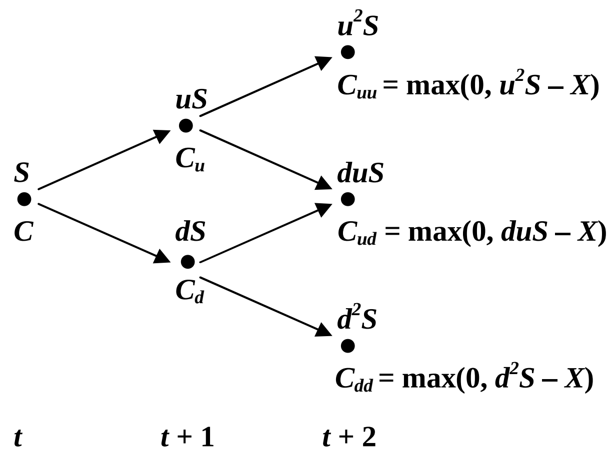
[25] Parametrem tym jest współczynnik delta.
[26] D ę b s k i, dz. cyt., s. 405.
[27] Zob. J a j u g a, J a j u g a, dz. cyt., s.195.

Odpowiadające powyższym scenariuszom cenowym wartości opcji kupna wynosić będą[28]:

$$C_{uu} = \max\left(0, u^2 S - X\right), \tag{1.3.1}$$
$$C_{ud} = \max\left(0, duS - X\right), \tag{1.3.2}$$
$$C_{dd} = \max\left(0, d^2 S - X\right). \tag{1.3.3}$$

Kształtowanie się ceny akcji i akcyjnej opcji kupna w dwuokresowym modelu dwumianowym prezentuje rysunek 2.

Rysunek 2. Dwuokresowe drzewo dwumianowe ceny akcji i akcyjnej opcji kupna



Źródło: Opracowanie własne.

Analogicznie jak przy drzewie jednookresowym, aktualną wartość opcji kupna określa się, analizując poszczególne gałęzie drzewa, począwszy od węzłów końcowych aż po węzeł początkowy. Przy znanej wartość opcji w węzłach końcowych, zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami, ceny opcji kupna w momencie $t+1$ wynosić będą[29]:

[28] Tamże.

[29] C o x, R o s s, R u b i n s t e i n, dz. cyt., s. 8.

$$C_u = \frac{1}{1+r}\left[pC_{uu} + (1-p)C_{du}\right], \tag{1.3.4}$$

$$C_d = \frac{1}{1+r}\left[pC_{du} + (1-p)C_{dd}\right]. \tag{1.3.5}$$

Na podstawie powyższych związków wykazać można, iż bieżąca wartość opcji kupna w dwuokresowym modelu dwumianowym opisana jest następującym wzorem[30]:

$$C = \frac{1}{(1+r)^2}\left[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{du} + (1-p)^2 C_{dd}\right], \tag{1.3.6}$$

przy czym wartość p jest określona jak we wzorze (1.2.10).

Opcja sprzedaży

Pozostając w dalszym ciągu przy analizie dwuokresowej, rozważmy obecnie przypadek opcji sprzedaży, odwołując się do metody replikacji opcji.

Przypomnijmy, iż po upływie dwóch okresów cena akcji może przyjąć jedną z trzech wartości:
– u^2S – w sytuacji dwukrotnego wzrostu,
– duS – w sytuacji wzrostu i spadku (albo spadku i wzrostu),
– d^2S – w sytuacji dwukrotnego spadku.

Odpowiadające powyższym wielkościom ceny opcji wynosić będą:

$$P_{uu} = \max\left(0, X - u^2S\right), \tag{1.3.7}$$

$$P_{du} = \max\left(0, X - duS\right), \tag{1.3.8}$$

$$P_{dd} = \max\left(0, X - d^2S\right). \tag{1.3.9}$$

Dwuokresowe drzewo dwumianowe, opisujące rozważaną sytuację, będzie miało taki sam wygląd, jak dla rozpatrywanej wcześniej opcji kupna, z tym, że w miejsce wielkości C_{uu}, C_{du}, C_{dd} pojawią się zdefiniowane powyżej wielkości P_{uu}, P_{du}, P_{dd}.

Powtarzając procedurę zaprezentowaną przy omawianiu wyceny opcji sprzedaży w modelu jednookresowym, otrzymujemy następujący wzór umoż-

---

[30] D ę b s k i, dz. cyt., s. 406.

liwiający określenie wartości opcji sprzedaży w dwuokresowym modelu dwumianowym[31]:

$$P = \frac{1}{(1+r)^2}\left[p^2 P_{uu} + 2p(1-p)P_{du} + (1-p)^2 P_{dd}\right], \qquad (1.3.10)$$

gdzie wartość p jest określona jak we wzorze (1.2.10).

1.4. N-OKRESOWY MODEL DWUMIANOWY

Model jedno- i dwuokresowy może zostać uogólniony na n okresów. Przyjmując te same oznaczenia i przeprowadzając takie same procedury co poprzednio, otrzymujemy następujące formuły wyceny opcji kupna i sprzedaży w n-okresowym modelu dwumianowym[32]:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)p^k(1-p)^{n-k}\max\left(0, u^k d^{n-k} S - X\right)\right] \qquad (1.4.1)$$

oraz

$$P = \frac{1}{(1+r)^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)p^k(1-p)^{n-k}\max\left(0, X - u^k d^{n-k} S\right)\right], \qquad (1.4.2)$$

gdzie:

n – liczba analizowanych okresów,
k – kolejne okresy,
p – określone jak we wzorze (1.2.10).

---

[31] Tamże.
[32] Tamże, s. 407.

1.5. PRZYPADEK AMERYKAŃSKIEJ OPCJI AKCYJNEJ

Niewątpliwą zaletą modelu dwumianowego jest to, iż umożliwia on określenie wartości opcji nie tylko stylu europejskiego, ale również amerykańskiego.

Ponieważ posiadacz opcji amerykańskiej może ją wykonać w dowolnym terminie do dnia wygaśnięcia włącznie[33], konieczne jest, aby w każdym z węzłów drzewa sprawdzić, czy wcześniejsza realizacja jest rozwiązaniem opłacalnym.

W ostatnich węzłach drzewa wartość opcji amerykańskiej jest równa wartości opcji europejskiej. W węzłach wcześniejszych natomiast za wartość opcji obiera się większą z dwóch liczb[34]:

– wartość otrzymaną ze wzoru (1.2.9) – w przypadku opcji kupna lub (1.2.18) – w przypadku opcji sprzedaży,
– dochód wynikający z wcześniejszej realizacji opcji.

1.6. MODEL DWUMIANOWY DLA OPCJI NA AKCJE SPÓŁKI WYPŁACAJĄCEJ DYWIDENDĘ

Metoda drzew dwumianowych może być wykorzystana do wyceny opcji zarówno typu europejskiego, jak i amerykańskiego, w tym w szczególności wystawionych na akcje spółki przyznającej w okresie ważności opcji prawa do dywidendy. W takim przypadku, zakładając, iż znana jest nominalna wartość dywidendy, konieczne jest dokonanie korekty drzewa scenariusza cenowego. Ponieważ wraz z przyznaniem prawa do dywidendy cena akcji spada, dlatego też dla dnia, w którym ma to nastąpić, cenę akcji w każdym z węzłów drzewa należy pomniejszyć o zdyskontowaną na ten moment kwotę dywidendy. Skorygowane w taki sposób ceny akcji stanowią punkt wyjścia do kolejnych obliczeń. Należy w tym miejscu zauważyć, iż taka metoda wyceny, choć bardzo dokładna, jest jednak niezwykle złożona. Uwzględnienie dywidend (ich określonej wartości nominalnej) powoduje bowiem, iż liczba węzłów może wzrosnąć do bardzo dużych rozmiarów, co określa się mianem

[33] W odróżnieniu od opcji europejskiej, która może zostać wykonana wyłącznie w dniu wygaśnięcia kontraktu.

[34] Por. H u l l, dz. cyt., s. 282.

„dzikiego rozrostu drzewa dwumianowego”[35]. Jednym z rozwiązań w takiej sytuacji jest zastosowanie drzewa prezentującego zmiany ceny akcji pomniejszonej o zaktualizowaną wartość wszystkich dywidend, do których prawo zostanie przyznane w okresie życia opcji[36]. Dzięki takiemu zabiegowi liczba węzłów w i-tym okresie zmniejszy się i wynosić będzie i+1[37].

2. MODEL BLACKA-SCHOLESA

W roku 1973 dwaj amerykańscy naukowcy Fischer Black i Myron Scholes jako pierwsi wyprowadzili i opublikowali[38] model umożliwiający wycenę prostej opcji kupna w warunkach równowagi rynkowej[39]. „Wychodząc z założenia, że z akcji i opcji kupna da się skonstruować portfel bezpieczny, autorzy ci wyprowadzili model analityczny, dający wartość europejskich opcji kupna akcji przy braku możliwości arbitrażu jako funkcję ceny akcji, ceny wykonania opcji, czasu do wygaśnięcia opcji, wolnej od ryzyka stopy procentowej oraz wariancji ceny akcji”[40].

2.1. ZAŁOŻENIA MODELU

Model Blacka-Scholesa opracowany został w celu oszacowania wartości europejskich opcji wystawionych na akcje. Należy zauważyć, iż opiera się on na wielu założeniach, których zestawienie zawiera poniższa tabela:

---

[35] Zob. A. F i e r l a, *Opcje na akcje*, Warszawa: Difin 2004, s. 107.

[36] Procedurę wyznaczania wartości na podstawie takiej metody przedstawia bliżej Hull (dz. cyt., s. 413-414).

[37] Tamże, s. 413.

[38] *The pricing of options and corporate liabilities*, “Journal of Political Economy” 1973, No. 81, May-June (zob. A p p e l t , dz. cyt., s. 5).

[39] Tamże.

[40] S m i t h s o n, S m i t h, Jr., W i l f o r d, dz. cyt., s. 378.

PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA MODELU BLACKA-SCHOLESA
– Ceny akcji zachowują się zgodnie z modelem logarytmiczno-normalnym[41]. – Opcja jest stylu europejskiego, co oznacza, iż nie może być wykonana przed datą jej wygaśnięcia. – Podatki oraz wszelkie koszty transakcyjne są pomijane. Nie jest też wymagany żaden depozyt zabezpieczający. – Instrument bazowy jest doskonale podzielny i może być swobodnie kupowany/sprzedawany. – Cena instrumentu bazowego jest ciągła w czasie. – Udzielanie i zaciąganie pożyczek jest możliwe po jednakowej, wolnej od ryzyka stopie procentowej, kapitalizowanej w sposób ciągły. – Dopuszczalna jest krótka sprzedaż instrumentu bazowego. – Instrument bazowy w okresie trwania opcji nie przynosi dywidendy, ani żadnych innych przychodów. – Krótkoterminowa wolna od ryzyka stopa procentowa oraz zmienność ceny instrumentu bazowego są stałe.

Źródło: F. T a y l o r, *Rynki i opcje walutowe*, przeł. M. Raczyński, Kraków: Oficyna Ekonomiczna 2000, s. 217; H u l l, dz. cyt., s. 297.

2.2. ISTOTA MODELU BLACKA-SCHOLESA

Podstawą modelu Blacka-Scholesa jest założenie dotyczące sposobu zmiany ceny akcji w czasie. Mianowicie, w modelu tym zakłada się, iż rozkład prawdopodobieństwa stóp zwrotu z akcji w nieskończenie małych odcinkach czasu jest normalny, co z kolei implikuje, wspomniany wcześniej, logarytmiczno-normalny rozkład cen akcji w przyszłości[42].

Sama idea modelu Blacka-Scholesa jest zbliżona do tej, która towarzyszyła modelowi dwumianowemu, opartemu na założeniu braku możliwości arbitrażu, przyjmując za punkt wyjścia portfel wolny od ryzyka. Możliwość skonstruowania takiego portfela wynika stąd, iż zarówno cena akcji, jak i cena opcji znajdują się

[41] Rozkład logarytmiczno-normalny to taki rozkład, w którym zbiór argumentów zmiennej losowej X zastąpiony jest logarytmem naturalnym z X (lnX) (zob. D ę b s k i, dz. cyt., s. 409). Oznacza to, iż o ile zmienna o rozkładzie normalnym może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne, o tyle zmienna o rozkładzie logarytmiczno-normalnym przybiera wyłącznie wartości dodatnie (zob. H u l l, dz. cyt., s. 290).

[42] Zob. H a u g e n, dz. cyt., s. 563.

pod wpływem tego samego źródła ryzyka, jakim są zmiany ceny akcji[43]. Ponieważ „w dowolnym krótkim przedziale czasu istnieje doskonała korelacja dodatnia ceny opcji kupna i ceny akcji oraz doskonała korelacja ujemna ceny opcji sprzedaży i ceny akcji”[44], stąd, poprzez odpowiedni dobór opcji i akcji pierwotnych, możliwe jest zbudowanie portfela arbitrażowego, stanowiącego rodzaj idealnego zabezpieczenia, czyli takiego, w którym zysk lub strata z akcji są odpowiednio równoważone stratą lub zyskiem z opcji[45]. Ponieważ portfel taki jest wolny od ryzyka, w warunkach braku możliwości arbitrażu, jego rentowność musi być równa wolnej od ryzyka stopie procentowej. Ów warunek równowagi, wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi, stanowi podstawę do określenia formuły wyceny opcji[46]. Zanim jednak zaprezentowane zostaną wzory Blacka-Scholesa, należy zwrócić uwagę, iż utworzony w modelu portfel jest pozbawiony ryzyka jedynie przez bardzo krótki okres[47], co oznacza, iż chcąc utrzymać portfel wolny od ryzyka, należy dokonywać jego okresowych korekt.

2.3. WZORY WYCENY OPCJI W MODELU BLACKA-SCHOLESA

Równania Blacka-Scholesa umożliwiające wycenę europejskich opcji kupna i sprzedaży opiewających na akcje spółek, które nie wypłacają dywidendy, określone są w następujący sposób[48]:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)\,, \tag{2.3.1}$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1)\,, \tag{2.3.2}$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\,, \qquad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,, \tag{2.3.3}$$

[43] Zob. H u l l, dz. cyt., s. 298.
[44] Tamże.
[45] Zob. A p p e l t, dz. cyt., s.16.
[46] Zob. S m i t h s o n, S m i t h, Jr., W i l f o r d, dz. cyt., s. 379.
[47] Zob. S o p o ć k o, dz. cyt., s. 266.
[48] M. W ó j c i c k i, *Opcje na GPW*, „Rynek Terminowy” 2003, nr 3, s. 8.

c – cena europejskiej opcji kupna,
p – cena europejskiej opcji sprzedaży,
S – cena instrumentu bazowego,
X – cena wykonania opcji,
σ – zmienność instrumentu bazowego,
T – czas do wygaśnięcia opcji w latach,
r – wolna od ryzyka stopa procentowa,
$N(d_1)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego dla wartości d_1,
$N(d_2)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego dla wartości d_2.

Funkcja $N(x)$ – dystrybuanta standaryzowanej zmiennej o rozkładzie normalnym – informuje, jakie jest prawdopodobieństwo, że dana zmienna przyjmie wartość mniejszą od x[49].

W odniesieniu do parametrów σ i r z reguły przyjmuje się, iż wyrażone są w skali rocznej, niemniej jednak w pewnych przypadkach możliwe jest ich określenie również dla krótszych jednostek czasu[50].

Na uwagę zasługuje fakt, iż w odróżnieniu od modeli wyceny sprzed 1973 r., w formule Blacka-Scholesa takie czynniki, jak oczekiwana cena akcji oraz stosunek inwestora do ryzyka, nie mają wpływu na wartość opcji, a jedynym parametrem wymagającym oszacowania jest zmienność ceny akcji.

2.4. PRZYPADEK OPCJI NA AKCJE SPÓŁKI WYPŁACAJĄCEJ DYWIDENDĘ

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, iż opcje opiewają na akcje spółek, które nie wypłacają dywidendy. Okazuje się jednak, iż – po odpowiedniej modyfikacji – formuły zaproponowane przez Blacka i Scholesa mogą być również wykorzystane do wyceny opcji wystawionych na akcje spółek wypłacających dywidendy, w sytuacji, gdy dywidendy są w pełni przewidywalne[51].

Jak zauważono, bezpośrednią konsekwencją wypłaty dywidendy jest to, iż w momencie ustalenia do niej prawa, cena akcji obniża się. W związku z powyższym, aktualna cena akcji S ze wzoru Blacka-Scholesa powinna zostać zastąpiona przez jej cenę zmodyfikowaną – S_d, stanowiącą różnicę pomiędzy

[49] Zob. H u l l, dz. cyt., s. 299.
[50] Zob. D ę b s k i, dz. cyt., s. 410.
[51] Zob. H u l l, dz. cyt., s. 306.

aktualną ceną akcji i bieżącą wartością dywidend oczekiwanych w okresie trwania opcji[52], zdyskontowanych według wolnej od ryzyka stopy procentowej[53]. Wielkość S_d jest zatem równa[54]:

$$S_d = S - De^{-rT'}, \qquad (2.4.1)$$

gdzie:

D – kwota dywidendy,
T' – czas pozostający do momentu ustalenia prawa do dywidendy wyrażony w latach[55].

Zmodyfikowane formuły Blacka-Scholesa przyjmą zatem następującą postać:

$$c = \left(S - De^{-rT'}\right)N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \qquad (2.4.2)$$
$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - \left(S - De^{-rT'}\right)N(-d_1), \qquad (2.4.3)$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S - De^{-rT'}}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S - De^{-rT'}}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \qquad (2.4.4)$$

pozostałe oznaczenie jak we wzorach (2.3.1)-(2.3.3).

3. MODEL MERTONA

Najbardziej znaną modyfikacją modelu Blacka-Scholesa jest metoda Roberta Mertona opublikowana w 1973 r.[56] Merton, uznając formuły Blacka-

[52] Uwzględnia się tylko te dywidendy, w przypadku których dzień ustalenia prawa do dywidendy przypada w okresie ważności opcji (tamże, s. 307).

[53] Tamże.

[54] S o p o ć k o, dz. cyt., s. 272.

[55] Niektórzy autorzy za czynnik *T'* przyjmują czas pozostający do momentu wypłaty dywidendy (por. D ę b s k i, dz. cyt., s. 412; S o p o ć k o, dz. cyt., s. 272; H a u g e n, dz. cyt., s. 559).

[56] *Theory of Rational Option Pricing*, "Bell Journal of Economics and Management Science" 1973, No. 4.

Scholesa za znaczący przełom w podejściu do problemu wyceny opcji[57], rozszerzył je na przypadek opcji wystawionych na akcje spółek wypłacających dywidendy w sposób ciągły.

Ponieważ następstwem wypłaty dywidendy jest spadek ceny akcji w dniu przyznania do niej prawa, dokonując wyceny europejskich opcji wystawionych na akcje spółek wypłacających dywidendy w sposób ciągły o znanej stopie q, konieczne jest, aby we wzorach Blacka-Scholesa bieżącą cenę akcji S zastąpić wartością Se^{-qT}[58].

Formuły Mertona dla opcji stylu europejskiego przyjmą zatem następującą postać[59]:

$$c = Se^{-qT} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)\,, \tag{3.1}$$

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - Se^{-qT} N(-d_1)\,, \tag{3.2}$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\,, \qquad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,, \tag{3.3}$$

q – stała roczna stopa dywidendy,
pozostałe oznaczenie jak we wzorach (2.3.1)-(2.3.3).

Analiza powyższych wzorów wskazuje, iż wypłata dywidend, oddziałując na cenę akcji, powoduje spadek wartości opcji kupna i wzrost wartości opcji sprzedaży.

Należy również zauważyć, iż dla zerowej stopy dywidendy ($d = 0$) podane wzory sprowadzają się do klasycznych formuł Blacka-Scholesa.

PODSUMOWANIE

W obliczu dynamicznego rozwoju rynku instrumentów pochodnych, w tym opcji, niezwykle istotnym zagadnieniem staje się ich wycena, a zatem możli-

[57] Tamże.
[58] Zob. H u l l, dz. cyt., s. 320.
[59] Por. D z i a w g o, dz. cyt., s. 85-86.

wość określenia wartości „prawdziwej” instrumentów, która następnie poprzez odniesienie do odpowiedniej wartości rynkowej warunkuje poszczególne decyzje inwestycyjne.

Najczęściej stosowanymi modelami wyceny opcji są model Blacka-Scholesa i jego rozwinięcia oraz model dwumianowy. Model Blacka-Scholesa wyceny europejskich opcji wystawionych na akcje spółki bez praw do dywidendy, opublikowany w 1973 roku, był niewątpliwie milowym krokiem w naukowym procesie dochodzenia do formuły wyceny opcji, niemniej jednak opiera się na założeniach, z których wiele odbiega od rzeczywistości. Chcąc przybliżyć model do warunków panujących na faktycznym rynku, w pierwszym dziesięcioleciu po ogłoszeniu formuły Blacka-Scholesa opracowane zostały modele uchylające poszczególne założenia, spośród których największą popularność zyskał sobie model Mertona – model wyceny opcji opiewających na akcje spółki wypłacającej dywidendę w sposób ciągły.

Modelem wykorzystywanym do wyceny opcji wystawionych na akcje (jak również i inne aktywa) jest model Coxa-Rossa-Rubinsteina. Model ten, zakładając, iż zmiany cen instrumentów bazowych następują zgodnie z procesem dwumianowym, może być stosowany nie tylko do wyceny opcji europejskich, lecz również amerykańskich, w tym w szczególności wystawionych na aktywa przynoszące dywidendę.

LITERATURA

A p p e l t K., O różnych podejściach do wyceny opcji. Charakterystyka modeli wyceny opcji sprzed 1973 roku, „Zeszyty Studiów Doktoranckich” 2004, z. 13, s. 5-19.

C o x J., R o s s S. A., R u b i n s t e in M., Option Pricing: A Simplified Approach, “Journal of Finance Economic” 7(1979); http://www.in-the-money.com/pages/author.htm

D ę b s k i W., Rynek finansowy i jego mechanizmy, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 2000.

D z i a w g o E., Modele kontraktów opcyjnych, Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika 2003.

F i e r l a A., Opcje na akcje, Warszawa: Difin 2004.

H a u g e n R. A., Teoria nowoczesnego inwestowania, przeł. S. Pająk [i in.], Warszawa: WIG-Pres 1996.

Hull J., Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie, przeł. Dąbrowski P., Sobkowiak J., Warszawa: WIG-Press 1999.

J a j u g a K., J a j u g a T., Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1997.

K a r p o f f J. M., Option Pricing Using Binomial Trees, http://faculty.washington.edu/karpoff/FIN%20509/FIN509_session4.ppt

P a l c z e w s k i A., Wzór Blacka-Scholesa, http://www.mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta1203/wzorbs.pdf

P i o n t e k K., Teoretyczna i rzeczywista wartość walutowych instrumentów pochodnych – rynek polski, http://credit.ae.wroc.pl/~kpiontek/wartpoch.pdf

S m i t h s o n Ch. W., S m i t h, Jr. C. W., W i l f o r d D. S., Zarządzanie ryzykiem finansowym. Instrumenty pochodne, inżynieria finansowa i maksymalizacja wartości, przeł. G. Łuczkiewicz, J. Katolik, Kraków: Oficyna Ekonomiczna 2000.

S o p o ć k o A., Rynkowe instrumenty finansowe, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 2005.

T a y l o r F., Rynki i opcje walutowe, przeł. M. Raczyński, Kraków: Oficyna Ekonomiczna 2000.

W ó j c i c k i M., Opcje na GPW, „Rynek Terminowy” 2003, nr 3, s. 6-10.

STOCK OPTION PRICING MODELS

S u m m a r y

The increase of financial risk that has been observed for more than three decades has brought about the necessity of using new financial solutions increasing the efficiency of protection from the results of unexpected and disadvantageous events. A response to the investors’ new needs was a dynamic development of the market of derivative instruments, including options.

Since investing in options, because of the financial lever, is highly risky, their pricing becomes a particularly significant issue.

The article presents basic, most often applied mathematical models used for defining the value of stock call and put options. They include: the binomial model connected with the names of John Cox, Stephen Ross and Mark Rubinstein, the Black-Scholes model and the Merton model.

In the case of the binomial model two approaches are presented that make it possible to assess the value of options – the one typical of the assumption concerning universal indifference to risk, and the one based on the method of option replication.

According to the Black-Scholes model the price of options is the function of such factors as: the underlying price, the strike price, the time to expiration, the risk-free interest rate, and the volatility of the underlying asset. The Merton model, that is the most popular modification of the Black-Scholes formula, extends it to the case of options run for the shares of the companies constantly paying dividends.

Translated by Tadeusz Karłowicz

Słowa kluczowe: akcyjna opcja kupna i sprzedaży, model wyceny opcji, model dwumianowy (Coxa-Rossa-Rubinsteina), model Blacka-Scholesa, model Mertona.

Key words: stock call and put option, option pricing model, the binomial model (Cox-Ross-Rubinstein’s one), the Black-Scholes model, the Merton model.