ROCZNIKI NAUK SPOŁECZNYCH
Tom XXXV, zeszyt 3 – 2007

BEATA FALDA

ENTROPIA W TEORII WARTOŚCI

Wśród wielu teorii matematycznych stosowanych do opisu i analizy *wartości ekonomicznej* na szczególną uwagę zasługują próby wykorzystania metod i narzędzi wywodzących się z teorii informacji[1]. Zaproponowane ponad pół wieku temu przez C. E. Shannona ujęcie teorii informacji oparte na pojęciu funkcji entropii stało się inspiracją do wykorzystania tej szczególnej funkcji w różnych dziedzinach nauki. Pomimo pewnej odmienności koncepcyjnej okazało się, że funkcja entropii może być stosowana jako narzędzie, za pomocą którego można prowadzić badania w zakresie teorii wartości ekonomicznej[2]. Rozważania dotyczące tego zagadnienia opierają się głównie na sformalizowanej walrasowskiej koncepcji wartości, opisującej wartość ekonomiczną jako funkcję rzadkości[3].

Dr BEATA FALDA – Katedra Zastosowań Matematyki w Instytucie Ekonomii, Wydział Nauk Społecznych KUL; adres do korespondencji: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin.

[1] Za początek powstania teorii informacji przyjmuje się rok 1948, w którym ukazała się pionierska praca C. E. Shannona, *A mathematical theory of communication*, „The Bell System Technical Journal" 1948, nr 27, s. 379-423, 623-656; zob. A. D ą b r o w s k i, *O teorii informacji*, Warszawa: Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne 1947, s. 5-8.

[2] Literaturę z zakresu zastosowań entropii do opisu zjawisk społeczno- ekonomicznych można znaleźć w pracy: R. P r z y b y s z e w s k i, E. W ę d r o w s k a, *Aksjomatyczna teoria entropii*, „Przegląd Statystyczny" 52(2005), z. 2, s. 85-101.

[3] Wiele uwag na ten temat można znaleźć w: J. C h e n, *An Entropy Theory of Value*, http://web.unbc.ca/~chenj/; J. C h e n, *Information, entropy and evolutionary finance*, http://web.unbc.ca/~chenj/; J. C h e n, *The Physical foundation of Economics. An Analytical Thermodynamic Theory*, World Scientific Publishing 2005; J. C h e n, *Information Theory and Market Behavior*, http://web.unbc.ca/~chenj/

1. WALRASOWSKA TEORIA WARTOŚCI

Zdefiniowanie wartości ekonomicznej w kontekście użyteczności krańcowej zaproponowane przez L. Walrasa zajmuje szczególną pozycję w historii doktryn ekonomicznych. Ten wybitny przedstawiciel szkoły lozańskiej, formułując swoje rozważania nad wartością w ramach analizy równowagi ogólnej, utożsamiał wartość dobra z jego użytecznością krańcową będącą psychologicznym skutkiem oceny rzadkości rozważanego dobra dokonywanej przez konsumenta[4].

Przyjmując, iż rzadkość jest rozumiana jako liczba dóbr stojących do dyspozycji ich konsumenta w porównaniu z wielkością zapotrzebowania na te dobra, L. Walras zauważył, iż:
- w gospodarce najważniejszą rolę odgrywają dobra rzadkie,
- na rynku ma miejsce wymiana dóbr rzadkich,
- producenci podejmują produkcję w celu wytworzenia dóbr rzadkich.

Ponieważ rzadkość ma znaczenie bliskie pojęciu rozproszenia, w niniejszej pracy podjęto próbę opisu teorii Walrasa przy użyciu metod matematycznych zaproponowanych przez C. E. Shannona.

2. POJĘCIE ENTROPII

Słowo „entropia" pochodzi z języka greckiego, gdzie oznacza „zmieniać". Pod koniec XIX wieku wprowadził je po raz pierwszy do fizyki Clausius. Z punktu widzenia tej dziedziny nauki entropia rozumiana jest jako miara nieuporządkowania układu cząsteczek i definiowana następująco

$$S = k \cdot \ln p,$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna, zaś p – prawdopodobieństwem, że układ będzie w określonym stanie. Im większy jest stan nieuporządkowania położeń i prędkości cząstek w układzie, tym większe jest prawdopodobieństwo p, że układ znajdzie się w takim właśnie stanie[5].

W 1948 r. amerykański matematyk C. E. Shannon zaproponował metodę mierzenia nieokreśloności wyniku gry za pomocą kostki sześciennej. Wy-

---

[4] E. Taylor, *Historia rozwoju ekonomiki*, t. II, Lublin: Delfin 1991, s. 108-138.

[5] J. Orear, *Fizyka*, t. I, Warszawa: WNT 1998, s. 234.

myśloną przez siebie miarę braku zdeterminowania nazwał właśnie entropią. Opierając się na tym pojęciu, Shannon stworzył podstawy teorii informacji[6].

Jeżeli X jest dyskretną zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n$ i rozkładzie zadanym przez ciąg $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,2,\dots,n$, to sumę

$$H_a(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i \tag{3.1}$$

gdzie a jest dowolną stałą większą od jedności[7], nazywamy *entropią* zmiennej losowej[8] X przy podstawie a, gdzie $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Wprowadzona w ten sposób funkcja H_a spełnia następujące własności:

- jest nieujemna,
- osiąga wartość maksymalną, gdy prawdopodobieństwa przyjmowania przez X wszystkich możliwych wartości są takie same,
- jest równa 0 wtedy i tylko wtedy[9], gdy stany systemu opisanego zmienną X przyjmują wartości 0 albo 1,
- jest addytywna - entropia sumy równa się sumie entropii, o ile systemy X i Y są niezależne w sensie niezależności zmiennych losowych X i Y.

Funkcję entropii interpretuje się jako średnią wartość informacji o rozproszeniu w układzie $\{\Omega, p.; X\}$ dostarczaną jedynie przez rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Wynika stąd, że pojęcie to można utożsamiać z niepewnością zajścia danego zdarzenia elementarnego - jeżeli zdarzenie występuje z prawdopodobieństwem równym 1 to entropia wynosi 0, co oznacza, że niepewność co do zajścia rozpatrywanego zdarzenia redukuje się do zera.

Pomimo dużego podobieństwa formalnego, jakie zachodzi pomiędzy wartością oczekiwaną $E(X)$ a entropią $H_a(X)$, należy zauważyć, że funkcja entropii zależy jedynie - jak wspomniano - od rozkładu zmiennej X, pozostając niezależną od wartości przyjmowanych przez tę zmienną. Pewnym mankamentem

---

[6] M. D o s z y ń, *Skłonności a entropia*, „Przegląd Statystyczny" 48(2002), z. 1, s. 73.

[7] W zastosowaniach do teorii informacji przyjmuje się zazwyczaj podstawę logarytmu $a = 2$.

[8] *Poradnik matematyczny*. Cz. 2, red. I. Dziubiński, T. Świątkowski, Warszawa: PWN, s. 580-581.

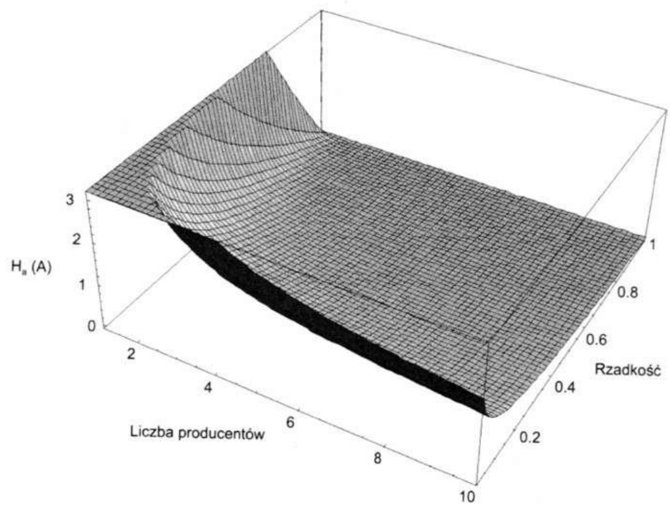
[9] Przy czym $0 \cdot \log_a 0 := \lim_{t \to 0^+} t \cdot \log_a t = 0$, $0 \cdot \log_a \frac{1}{0} := \lim_{t \to 0^+} t \cdot \log_a \frac{1}{t} = 0$.

pojęcia entropii jest jej zależność od podstawy a logarytmu występującego w wyrażeniu definiującym tę funkcję, chociaż - jak pokazano w niniejszych rozważaniach - zależność ta może przynieść określone korzyści interpretacyjne. Okazuje się jednak, że niektóre informacje dotyczące entropii X uzyskuje się jako wielkości niezależne od podstawy a występującej w definicji H_a.

Na gruncie teorii wartości ekonomicznej określonego dobra lub koszyka dóbr można przeprowadzić następujące rozważania: niech dany będzie rynek, na którym dobro A występuje z rzadkością zdefiniowaną przez miarę p prawdopodobieństwa pojawiania się tego dobra na rynku. Wtedy wartość ekonomiczną w sensie entropii przy podstawie a dobra A możemy określić wzorem

$$H_a(A) = -\log_a p, \tag{3.2}$$

gdzie a jest stałą większą od jedności, którą możemy traktować jako uogólnienie liczby producentów tego dobra (rys. 1).



Rys. 1. Zależność pomiędzy wartością ekonomiczną w sensie entropii, liczbą producentów i rzadkością

Z własności logarytmu wynika, że $H_a(A)$ jest funkcją malejącą zmiennej p, co oznacza, że im większa jest dostępność dobra A tym mniejszą ma ono wartość dla konsumentów, a jednocześnie jest funkcją malejącą zmiennej $a > 1$, co odpowiada na pytanie: „Dlaczego ceny (wartość) dóbr produkowanych przez monopolistę są wysokie?”.

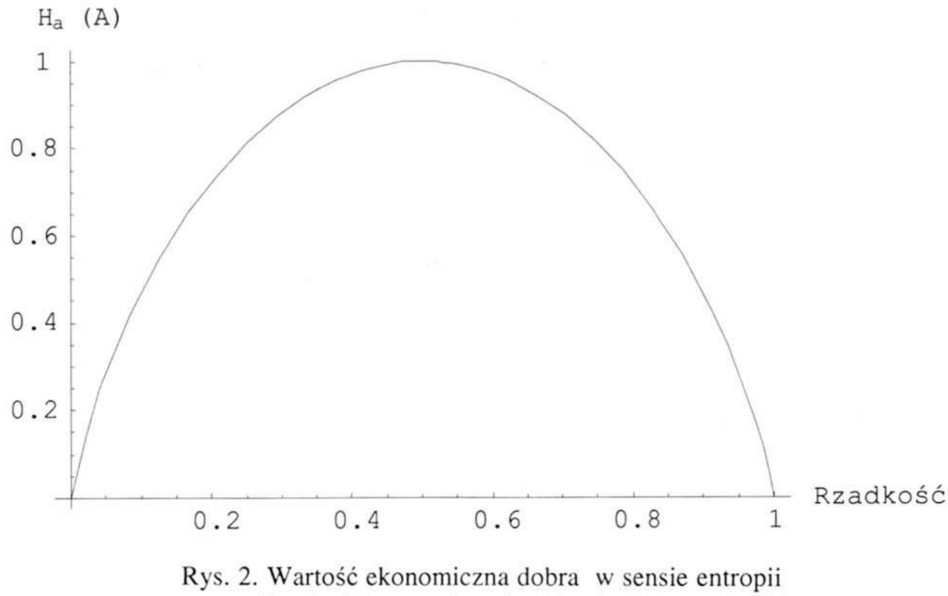
Uogólniając powyższe rozumowanie na gruncie walrasowskiej teorii wartości, możemy powiązać powyższe rozumowanie ze wzorem określającym funkcję entropii $H_a(A)$ zmiennej losowej X z funkcją $H_a(A)$ w następujący sposób: oznaczmy przez A konkretne dobro lub koszyk dóbr występujący na rozważanym rynku, zaś symbolem X funkcję jego wartości wyrażającą się ceną x_i, $i=1,2,...,n$, z jaką występuje u sprzedawców. Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia dobra A u poszczególnych sprzedawców, zaś a jest, jak poprzednio, uogólnioną liczbę producentów dobra A. Wtedy liczbę

$$(3.3) \qquad H_a(A) = H_a(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_1 \log_a p_i \text{, gdzie } \sum_{i=1}^{n} p_1 = 1$$

interpretować będziemy jako *wartość ekonomiczną dobra A w sensie entropii*a przy podstawie a na rozważanym rynku.

Warto zauważyć, że $H_a(A)$ dąży do $+\infty$, gdy $a \to 1^+$, za wyjątkiem, gdy $p_i = 0$ i $p_i = 1$.

Załóżmy, że na rynku funkcjonuje dwóch sprzedawców dobra A, które występuje u pierwszego z nich z prawdopodobieństwem p, zaś u drugiego z prawdopodobieństwem $1 - p$. Możemy przyjąć, że pierwszy sprzedawca proponuje nabycie tego dobra po cenie x_1, zaś drugi po cenie x_2. Wtedy $p(X = x_1) = p$, zaś $p(X = x_2) = 1 - p$.



Rys. 2. Wartość ekonomiczna dobra w sensie entropii
w przypadku dwóch sprzedawców jako funkcja rzadkości p

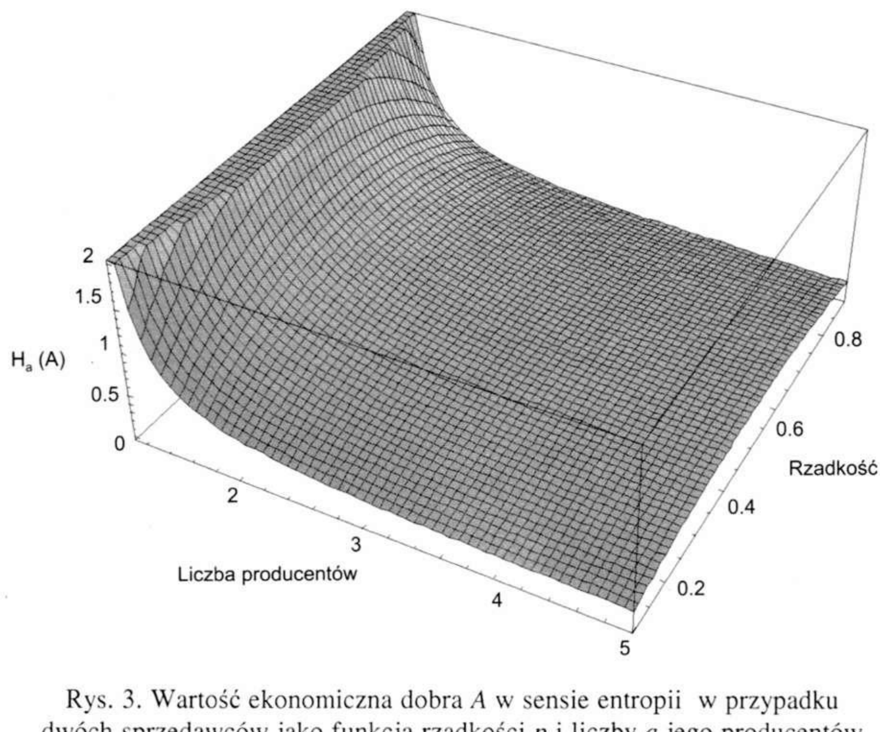
Mamy zatem (rys. 2 i rys. 3)

$$H_a(A) = p \cdot \log_a \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_a \frac{1}{1-p}, \tag{3.4}$$

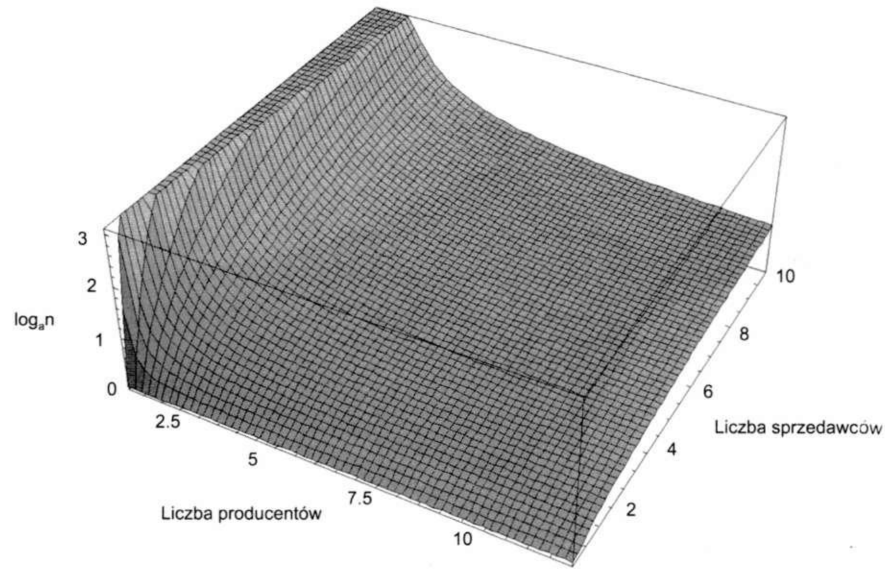
Ponieważ entropia H_a(A) przyjmuje wartość największą, gdy

$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, niezależnie od postawy $a > 1$ i wynosi ona $\log_a n$,

oznacza to, że H_a(A) jest funkcją rosnącą zmiennej n. Fakt ten można interpretować w sposób następujący: warunkiem koniecznym i dostatecznym osiągnięcia przez dane dobro największej wartości w sensie entropii jest równomierny rozkład jego podaży u wszystkich występujących na danym rynku sprzedawców (rys. 4).



Rys. 3. Wartość ekonomiczna dobra A w sensie entropii w przypadku dwóch sprzedawców jako funkcja rzadkości p i liczby a jego producentów

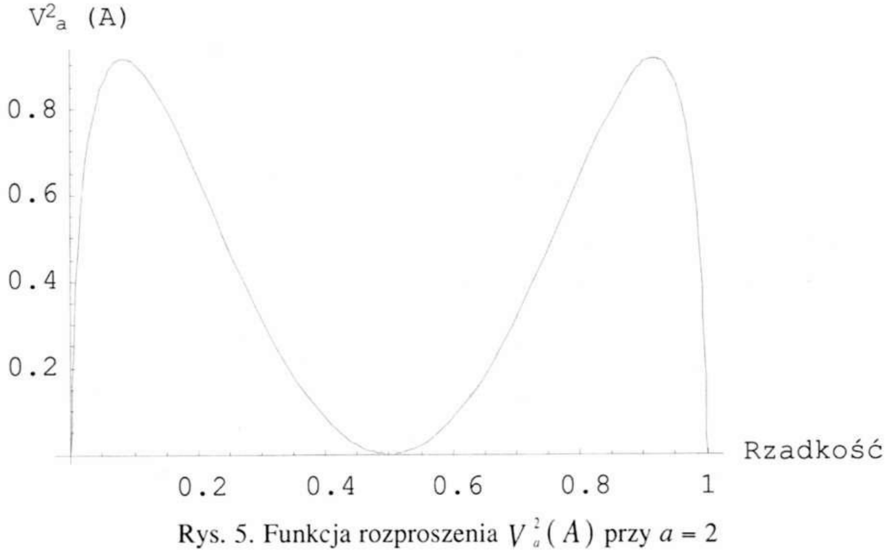


Rys. 4. Maksymalna wartość ekonomiczna w sensie entropii jako funkcja liczby producentów i liczby sprzedawców

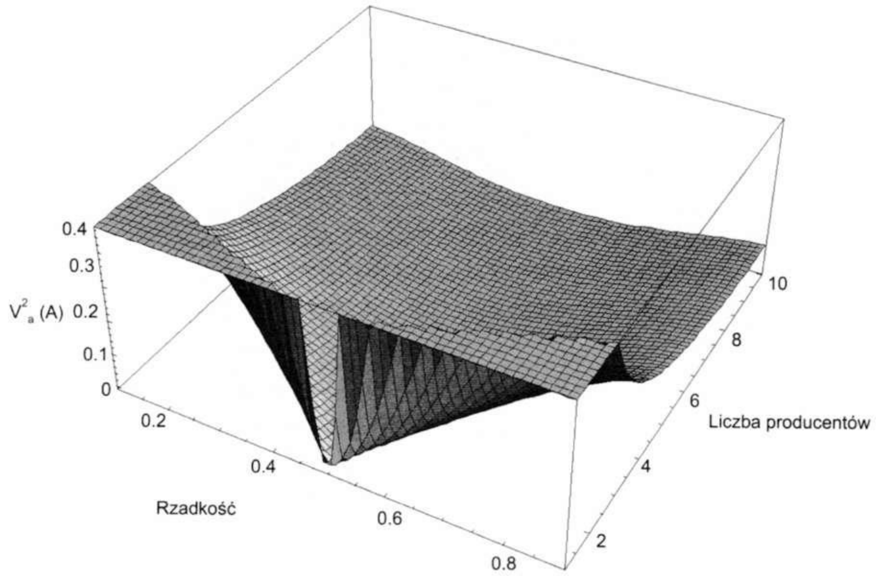
Z wartością ekonomiczną danego dobra w sensie entropii możemy powiązać funkcję V_a^2 określoną wzorem

$$V_a^2(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[\log_a \frac{1}{p_i} - H_a(A) \right]^2, \tag{3.5}$$

którą będziemy interpretować jako miarę rozproszenia wartości $H_a(A)$ (rys. 5 i rys. 6).



Rys. 5. Funkcja rozproszenia $V_a^2(A)$ przy $a = 2$



Rys. 6. Funkcja rozproszenia $V_a^2(A)$ przy $a > 1$

W przypadku rozkładu dwumianowego możemy łatwo sprawdzić, że

(3.6) $$V_a^2(A) = p\cdot(1-p)\left(\log_a \frac{1-p}{p}\right)^2.$$

Traktując a jako zmienną w $V_a^2(A)$ widzimy, że miara rozproszenia zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby producentów przyjmując wartość zerową w punkcie $p = \frac{1}{2}$ niezależnie od wyboru $a > 1$, zaś jej wartości maksymalne, symetryczne względem $p = \frac{1}{2}$, spełniają równanie

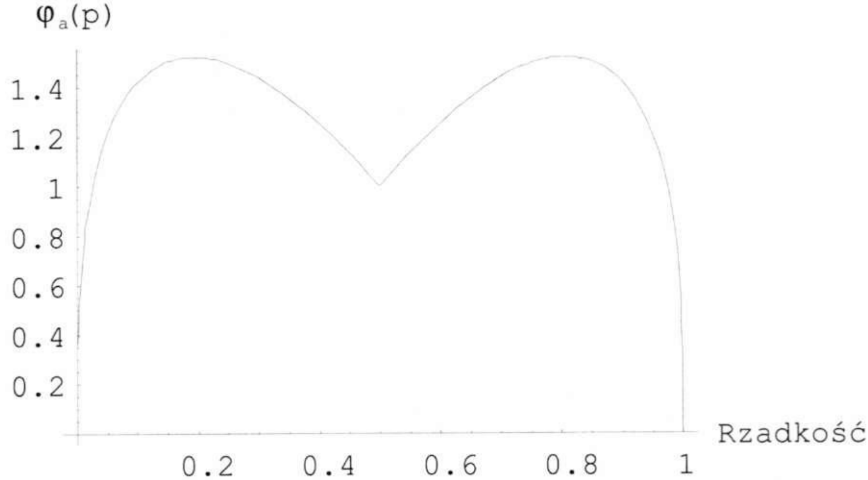
(3.7) $$\left(\frac{1-p}{p}\right)^{1-p} = e^2.$$

Oznacza to, że w przypadku dwóch sprzedawców punkty maksymalnego rozproszenia H_a nie zależą od wyboru $a > 1$.

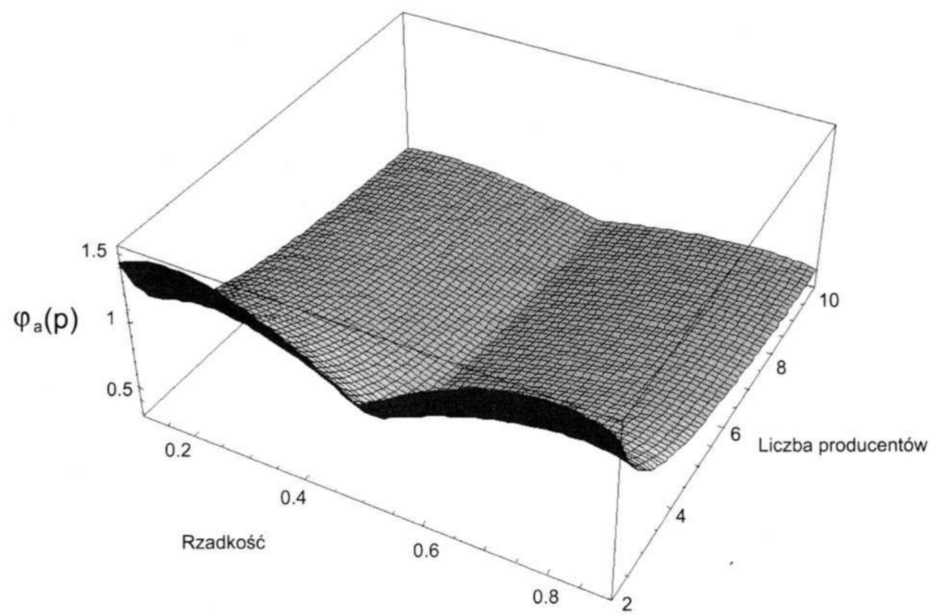
Wartość liczbową $\varphi_a(A) = H_a(A) + V_a(A)$

nazywać będziemy miarą pewności zakupu dobra A (rys. 7 i rys. 8). W rozważanym uprzednio przypadku dwumianowym otrzymujemy funkcję pewności zakupu dobra zależną od rozproszenia p i ilości producentów a, która przyjmuje postać

$$\varphi_a(p) = p \cdot \log_a \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_a \frac{1}{1-p} + \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \left| \log_a \frac{1-p}{p} \right|.$$



Rys. 7. Funkcja $\varphi_a(p)$ dla $a = 2$



Rys. 8. Funkcja $\varphi_a(p)$ dla $a > 1$

3. WARTOŚĆ EKONOMICZNA W SENSIE ENTROPII W PRZYPADKU DWÓCH DÓBR

Załóżmy, że dane są dwa dobra A_1, A_2, którym, podobnie jak poprzednio, przyporządkowane są zmienne losowe X oraz Y przyjmujące odpowiednio wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ i $y_1, y_2, \dots, y_n$ oznaczające ich możliwe ceny na rozważnym rynku. Zmienne te charakteryzuje łączny rozkład prawdopodobieństwa p_{ij}, i = 1, 2,..., n,. j = 1, 2, ..., m.. Przy powyższych oznaczeniach entropią łączną pary (A_1, A_2) nazywamy wyrażenie

$$H_a(A_1, A_2) := H_a(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot \log_a \frac{1}{p_{ij}}. \tag{4.1}$$

Jeżeli $p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, zaś $p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ wtedy entropia zmiennych X i Y traktowanych oddzielnie wyraża się wzorami

$$H_a(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_a \frac{1}{p_i}, \qquad H_a(Y) = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \log_a \frac{1}{p_j}.$$

Można wykazać[10], że

$$\frac{1}{2}\left(H_a(X) + H_a(Y)\right) \le H_a(X, Y) \le H_a(X) + H_a(Y); \tag{4.2}$$

Podane wzory odpowiadają opisowi zjawiska substytucji dóbr. Nierówność (4.2) implikuje, iż substytucja redukuje wartość dobra. Równość zachodzi wówczas, gdy dobra X i Y są niezależne, tzn. nie są dobrami substytucyjnymi[11].

Z drugiej strony nierówność (4.2) mówi o dolnym ograniczeniu wartości łącznej w sensie entropii dóbr substytucyjnych przez średnią arytmetyczną wartości poszczególnych składowych.

Innym przykładem wykorzystania funkcji entropii jest przypadek analizy związku pomiędzy wielkością popytu rynkowego a wartością ekonomiczną dobra, na które jest zapotrzebowanie.

Jeżeli p oznacza miarę rzadkości dobra A wytwarzanego przez a producentów, zaś d – liczbę konsumentów rozważanego rynku, wtedy wielkość

---

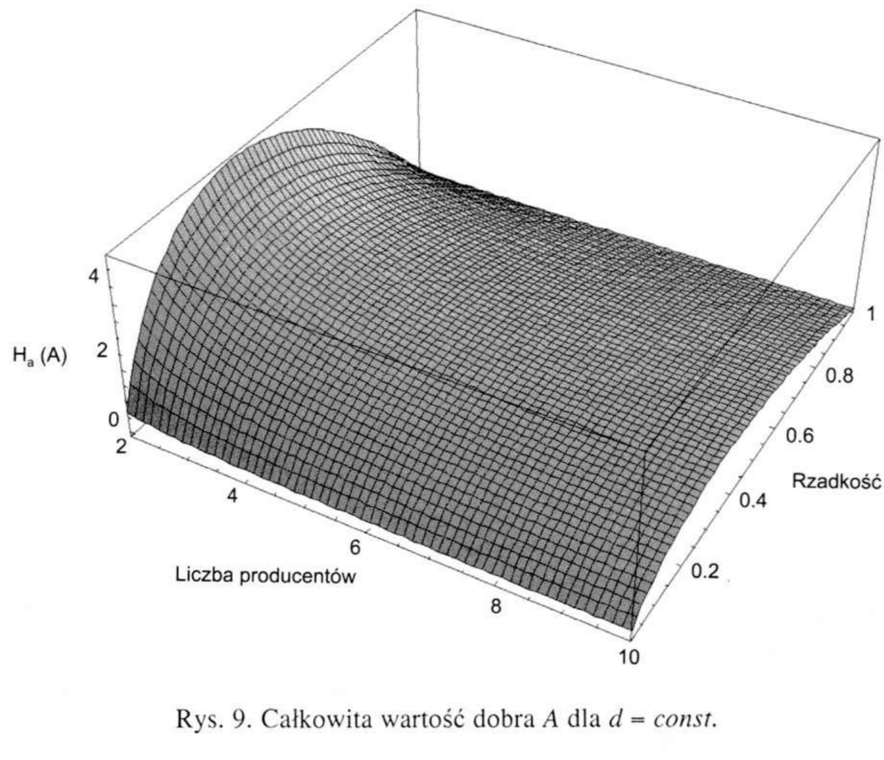
[10] D ą b r o w s k i, *O teorii informacji*, s. 45-47.

[11] T a y l o r, *Historia rozwoju ekonomiki*, s. 2-7.

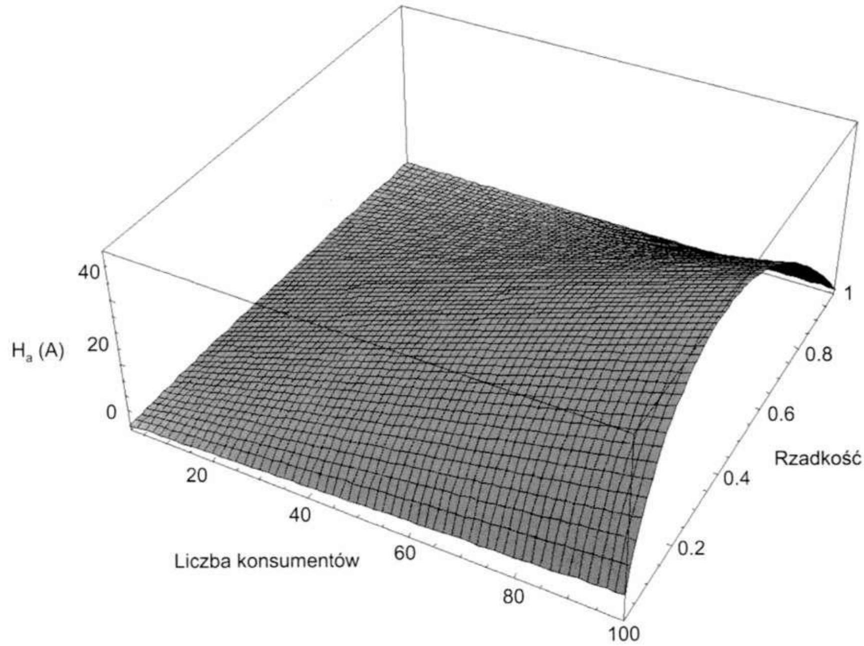
$\log_a \frac{1}{p}$ jest wartością ekonomiczną w sensie entropii dobra A. Liczba konsumentów, która zakupiła dobra A, może być wyrażona iloczynem $d \cdot p$. A zatem całkowita wartość ekonomiczna w sensie entropii sprzedanych dóbr A wynosi:

$$d \cdot p. \cdot (-\log_a p.). \tag{4.3}$$

Z formuły (4.3) wynika, że wyrażona w ten sposób wartość początkowo rośnie, a następnie, po osiągnięciu ekstremum, maleje do zera (zob. rys. 9 i rys. 10), podczas gdy funkcja wartości jednostkowej dobra A jest malejąca (zob. rys. 1).



Rys. 9. Całkowita wartość dobra A dla $d = const.$



Rys. 10. Całkowita wartość dobra *A* dla *a* = *const*.

*

Matematyczne modele ekonomiczne, będące formalnymi konstrukcjami wyrażającymi związki zachodzące między zjawiskami ekonomicznymi i ewentualnie pozaekonomicznymi, mają za zadanie uchwycenie istotnych relacji i zależności zachodzących między zjawiskami ekonomicznymi oraz badanie mechanizmów ich rozwoju.

W niniejszym artykule przedstawiono kilka przykładów zastosowania *funkcji entropii* w modelowaniu zjawisk rynkowych, kładąc szczególny nacisk na sformułowanie pojęcia *wartości ekonomicznej w sensie entropii*. Tym samym zostało zaproponowane nowe podejście do konstrukcji i analizy modeli ekonomicznych wzbogacone o, dające dużą wartość poznawczą, doświadczenia takich teorii naukowych, jak teoria informacji oraz teorie termodynamiki.

BIBLIOGRAFIA

C h e n J., An Entropy Theory of Value, http://web.unbc.ca/~chenj/

C h e n J., Information, entropy and evolutionary finance, http://web.unbc.ca/~chenj/

C h e n J., Information Theory and Market Behavior, http://web.unbc.ca/~chenj/

C h e n J., The Physical foundation of Economics. An Analytical Thermodynamic Theory, World Scientific Publishing 2005.

D ą b r o w s k i A., O teorii informacji, Warszawa: Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne 1974.

D o s z y ń M., Skłonności a entropia, „Przegląd Statystyczny" 48(2002), z.1, s. 73-78.

O r e a r J., Fizyka, t. I, Warszawa: WNT 1998.

Poradnik matematyczny. Część 2, red. I. Dziubiński, T. Świątkowski, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1982.

P r z y b y s z e w s k i R., W ę d r o w s k a E., Aksjomatyczna teoria entropii, „Przegląd Statystyczny" 52(2005), z. 2, s. 85-101.

S h a n n o n C. E., A mathematical theory of communication, „The Bell System Technical Journal" 1948, nr 27, s. 379-423, 623-656.

T a y l o r E., Historia rozwoju ekonomiki, t. II, Lublin: Delfin 1991.

ENTROPY IN THE THEORY OF VALUE

S u m m a r y

Theory of information is a rich source of methods and tools used in various domains of knowledge. The examples presented in this paper show how to apply the function of entropy in the theory of value. They attempt to enrich the research arsenal of economic by new tools.

Translated by Jan Kłos

Słowa kluczowe: entropia, wartość ekonomiczna.

Key words: entropy, economic value.