M A T E R I A Ł Y   I   S P R A W O Z D A N I A

ROCZNIKI KULTUROZNAWCZE
Tom VII, numer 4 — 2016

DOI: http://dx.doi.org/10.18290/rkult.2016.7.4-8

TOMASZ GRĘBSKI

O RELACJACH MIĘDZY MATEMATYKĄ I MUZYKĄ

WSTĘP

W niniejszym artykule zajmiemy się dwoma przejawami kultury należącymi do dwóch jej dziedzin – nauki i sztuki, aby przeanalizować związki między nimi. Nauką, którą się zajmiemy, jest matematyka, a sztuką – muzyka. Czy muzyka i matematyka mają ze sobą coś wspólnego? I czy w ogóle mogą mieć? Dla większości osób są to bardzo odległe dziedziny. Wiadome jest, że ktoś wrażliwy na muzykę będzie ją wszędzie słyszał i będzie się starał wszystko „umuzyczniać", matematyk zaś będzie się starał wszystko opisywać matematycznie, będzie poszukiwał zależności i podobieństw. Badając zatem relacje między tymi dwoma przejawami kultury, lepiej zrozumiemy i poznamy każdy z nich.

Próby powiązania muzyki ze światem nauki były podejmowane od dawna. Już w czasach starożytnych Arystoksenos, uczeń Arystotelesa, jako pierwszy uznał muzykę za dyscyplinę naukową i dokonał rewolucji w filozofii muzyki[1]. Z jednej strony Arystoksenos odrzuca matematyczne teorie pitagorejczyków i twierdzi, że pozostają poza sferą muzyki, z drugiej zaś odrzuca empiryzm. W rzeczywistości Arystoksenos uwzględnia jednak w swej teorii motywy pitagorejskie, ale kładzie nacisk na zmysłowe składniki muzyki[2].

Mgr TOMASZ GRĘBSKI – egzaminator maturalny z matematyki, nauczyciel dyplomowany matematyki w Zespole Szkół nr 2 im. M. Reja w Kraśniku; adres do korespondencji: ul. Sikorskiego 25, 23-210 Kraśnik; e-mail: tomasz@rey.edu.pl

[1] Martin L. WEST. *Muzyka starożytnej Grecji*. Przeł. Anna Maciejewska, Maciej Waziński. Kraków: Homini 2003 s. 19.

[2] Joanna DITTRICH. *Filozofia muzyki Arystoksenosa*. „Zeszyty Naukowe Towarzystwa Doktorantów UJ" Nr specjalny 3 (2/2011), Kierunki badawcze w filozofii II.

Eduard Hanslick w swej książce *Vom Musikalisch-Schönen* (1854) broni tezy, że istotą muzyki jest jej forma (muzyka czysta). Przeważa jednak pogląd, że jedną z wartości dzieła muzycznego mogą być idee ogólne – w tym także przekonania natury filozoficznej czy światopoglądowej[3].

O tzw. *ineffable* w filozofii muzyki możemy przeczytać w najnowszej książce brytyjskiego estetyka analitycznego Nicka Zangwilla *Music and Aesthetic Reality: Formalism and the Limits of Description*[4], w której *ineffable* pojawia się jako kluczowy element konstrukcji filozoficznej, której celem jest m.in. rehabilitacja i ponowne umocowanie tezy formalizmu w estetyce muzycznej[5]. Teza Zangwilla, że „muzyka sama w sobie nie ma nic wspólnego z emocjami", zostaje również podana w wątpliwość[6].

Analizowano również muzykę pod kątem sposobów sytuowania się praktyk kompozytorskich względem doświadczenia historyczności sztuki, traktowanego jako element kulturowej specyfiki zachodniej muzyki artystycznej[7].

Thrasybulos Georgiades, grecki muzykolog i pianista, przyjmuje matematyczno-pitagorejski paradygmat rozumienia muzyki[8].

Powiązań m.in. muzyki Bacha z nauką dotyczy książka amerykańskiego fizyka i informatyka Douglasa R. Hofstadtera *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* z 1979 r.[9] Autor zestawia myśl wielkiego matematyka i logika Kurta Gödla (1906-1978) z artystycznymi wizjami holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera (1898-1972) oraz muzyką Jana Sebastiana Bacha. Ich dzieła wiąże z sobą poprzez odwołanie się do programu komputerowego Quine, do struktur DNA i do biologii molekularnej.

O obecności symetrii w muzyce i potrzebie jej występowania w niej pisała Anna Brożek w książce *Symetria w muzyce czyli o pierwiastku racjonalnym w komponowaniu dzieł muzycznych*[10].

---

[3] Maria GOŁASZEWSKA. *Muzyka filozofii. Esej o podwójnych znaczeniach.* „Muzyka" 2005 nr 1 s. 6.

[4] London: Routledge 2015.

[5] Jan CZARNECKI. *Ineffable w filozofii muzyki.* W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń.* Red. Lidia Godek, Maciej Musiał, Marek Woszczek. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM 2015 s. 222.

[6] Krzysztof GUCZALSKI. *Formalizm w muzyce – przypadek Nicka Zangwilla.* W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń* s. 229.

[7] Krzusztof MORACZEWSKI. *Wewnętrzna historyczność sztuki. Przykład muzyki.* W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń* s. 232.

[8] Edyta ORMAN. *Muzyka na tle innych sztuk w ujęciu Thrabsybulosa Georgiadesa.* W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń* s. 230.

[9] New York: Basic Books 1979.

[10] Kraków–Tarnów: OBI–Biblos 2004.

Na podstawie tych kilku przykładowych publikacji możemy stwierdzić, że muzyka była, jest i zapewne będzie badana pod kątem jej związków z innymi dziedzinami kultury, w szczególności z matematyką. Celem tego artykułu jest przyjrzenie się dwóm wspomnianym wcześniej dziedzinom: muzyce i matematyce pod kątem ich związków i podobieństw. Jako cel obrałem sobie udowodnienie tezy, że relacje między matematyką i muzyką istnieją i są znaczące. Z punktu widzenia kulturoznawstwa takie relacje są ważne, gdyż mogą przyczynić się do lepszego zrozumienia obu dziedzin. Podczas analizy przytoczę szereg faktów, które pozwolą udowodnić postawioną tezę.

Analizowałem kompozycje muzyczne pod kątem świadomego stosowania w nich zależności matematycznych, jak również utwory, w których można zauważyć struktury matematyczne u kompozytorów, którzy matematykami nie byli. Artykuł gromadzi również znane wcześniej fakty z historii matematyki i muzyki, naświetlone pod kątem relacji miedzy nimi. Część tych problemów poruszałem już w swoich artykułach w czasopiśmie „Matematyka" oraz „Wiedza i Życie" w latach 2014-2015.

Przytoczę teraz definicje encyklopedyczne przybliżające te dwa pojęcia:

Muzyka – „muz. sztuka, której tworzywem są percypowane przez ludzi dźwięki, wytwarzane przez nich głosem i/lub za pomocą instrumentów muzycznych. Źródłami dźwięku są: głos ludzki, instrumenty muzyczne i przyrządy elektroakustyczne. Muzyka jest przedmiotem odrębnej dyscypliny naukowej – muzykologii, która obejmuje m.in. estetykę muzyczną, zajmującą się problemem istoty muzyki i przeżycia muzycznego oraz specyfiką muzyki w odróżnieniu od innych sztuk. Utwór muzyczny jest wynikiem współistnienia tzw. współczynników (elementów) muzycznych: rytmu i metrum, melodii, harmonii, dynamiki, agogiki, artykulacji, barwy dźwięku, budowy formalnej (formy muzyczne). Współczynniki muzyczne nigdy nie występują w izolacji, ale też nie wszystkie muszą występować łącznie (np. w utworze jednogłosowym brak jest czynnika harmonicznego), jedne z nich mogą dominować nad innymi (np. rytm w utworach tanecznych) lub też mogą zmieniać się role poszczególnych elementów (np. w wariacjach). Muzyka występuje w postaci autonomicznej (zwykle muzyka instrumentalna, rzadziej wokalna jako wokaliza) lub łączy się ze słowem (gatunki wokalne i wokalno-instrumentalne), gestem (taniec), akcją sceniczną (gatunki sceniczne, np. opera). Przekazywanie muzyki odbywa się bądź w bezpośrednim kontakcie wykonawcy z odbiorcą, np. w sali koncertowej, bądź za pomocą przyrządów służących do odtwarzania zjawisk dźwiękowych, jak gramofon, magnetofon (muzyka mechaniczna). Systematyki muzyki można dokonywać na podstawie różnych kryteriów, co powoduje krzyżowanie się jej rodzajów".[11]

[11] http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/muzyka;3944813.html (dostęp: 16.12.2015).

Można powiedzieć, że muzyka to sztuka organizacji struktur dźwiękowych w czasie. Jest jedną z dziedzin sztuk pięknych w dużym stopniu wpływającą na psychikę człowieka przez dźwięki. Celem muzyki jest m.in. przekaz subiektywnych odczuć kompozytora lub wykonawcy, który ma wpływ na odczucia, reakcje i świadomość słuchacza przetwarzającego te doznania w sposób zupełnie indywidualny. Od mowy ludzkiej różni się znacznie większą abstrakcyjnością przekazywanych treści oraz wykorzystaniem oprócz głosu ludzkiego również instrumentów muzycznych, jak też wszelkich dźwięków elektronicznych, naturalnych oraz nieartykułowanych. Muzyka jest jednym z przejawów ludzkiej kultury. Można przyjąć, że muzyka od zawsze towarzyszyła człowiekowi w pracy, zabawie, odpoczynku oraz w obrzędach, również od początku łączona była z tańcem i słowem. Z początku muzyka służyła celom praktycznym – pomagała w pracy zespołowej, była formą komunikacji, a z czasem wykształciła się jako jedna z gałęzi sztuki.

> **Matematyka** „to nauka dedukcyjna, gałąź wiedzy, której cel można określić jako badanie konsekwencji przyjętych założeń".[12]

Można powiedzieć, że matematyka to nauka dostarczająca narzędzi do otrzymywania ścisłych wniosków z przyjętych założeń, a zatem dotycząca prawidłowości rozumowania. Ponieważ założenia mogą dotyczyć najróżniejszych dziedzin myśli ludzkiej, zakres matematyki jest szeroki i stale się powiększa. Wiele dziedzin nauki i technologii w pewnym momencie zaczyna definiować swoje pojęcia z dostatecznie dużą precyzją, aby można było stosować do nich metody matematyczne. Tak stało się np. z mechaniką klasyczną, mechaniką statystyczną, ekonomią (ekonometria), lingwistyką (lingwistyka matematyczna), teorią gier, a nawet niektórymi działami politologii (teoria głosowań). Obecnie standardem w naukach eksperymentalnych jest potwierdzanie istnienia obserwowanych zależności za pomocą metod statystyki. Pomaga to odróżnić rzeczywiste zależności od przypadkowej zbieżności. Leonardo da Vinci w swoim *Traktacie o malarstwie* stwierdził: „Żadne dociekanie ludzkie nie może być nazwane prawdziwą wiedzą, o ile nie przeszło próby dowodu matematycznego"[13].

Jedną z dziedzin matematyki jest matematyka teoretyczna, która jest często rozwijana bez wyraźnego związku z konkretnymi zastosowaniami. Paul Dirac, angielski fizyk teoretyk, jeden z twórców mechaniki kwantowej i elektro-

---

[12] http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/matematyka;3938552.html (dostęp: 16.12.2015).

[13] Leonardo DA VINCI. *Traktat o malarstwie*. Przeł. Maria Rzepińska. Gdańsk: Słowo/Obraz Terytoria 2006 s. 545.

dynamiki kwantowej, laureat Nagrody Nobla z dziedziny fizyki stwierdził: „Matematyka jest narzędziem stworzonym specjalnie do wszelkich abstrakcyjnych koncepcji i nie ma ograniczeń dla jej potęgi w tym zakresie"[14]. Mamy tu zatem podobne zjawisko jak w sztuce, która również potrafi być abstrakcyjna i nieograniczona w tworzeniu i odkrywaniu.

Na podstawie tych definicji i tych krótkich komentarzy można już powiedzieć, że obydwie dziedziny to formy sztuki, które posiadają własny alfabet, a raczej język symboli, z którego budowane są słowa, a potem całe zdania czy wręcz poematy. Studia matematyczne uczą wypowiadania się na bardzo abstrakcyjne zagadnienia matematyczne w sposób ścisły i uporządkowany. A muzyka przecież jest najbardziej abstrakcyjną i uporządkowaną formą sztuki i tak jak matematykę nazywamy „królową nauk", tak muzykę można by nazwać „królową sztuki".

Po tym wstępie przejdźmy do głównej części artykułu, czyli pokazania faktów świadczących o relacjach muzyki z matematyką.

FAKT 1: PITAGOREJCZYCY (CZASY STAROŻYTNE)

Matematyczną harmonię w muzyce jako pierwsi odkryli pitagorejczycy. Uważali, że „wszystko jest liczbą" i chcieli dosłownie wszystko opisać za pomocą liczb. Pitagorejczycy wiedzieli, że człowiek odbiera jako harmonijne (przyjemne) zestawienie takich dźwięków, których częstotliwości pozostają ze sobą w stosunku będącym ilorazem niewielkich liczb naturalnych[15]. Chodzi tu o tzw. wielką czwórkę liczb: 1, 2, 3, 4. Zauważyli, że jeżeli długości dwóch napiętych jednakową siłą strun mają się jak 2:1, to struny te dają przyjemne współbrzmienie. Podobnie stosunki 3:2 i 4:3 też dają przyjemne brzmienie. Zależności te są liczbowym opisem konkretnych interwałów muzycznych (odległości między dźwiękami): oktawy, kwinty czystej i kwarty czystej. W wyjaśnieniu tego faktu pomaga fizyka, nałożenie bowiem na siebie dwóch fal spełniających powyższą własność daje w rezultacie regularny (okresowy) wynik określany w teorii muzyki mianem konsonansu. Nałożenie na siebie fal o niepasujących częstotliwościach da wynik nieregularny nazywany dysonansem.

---

[14] Robert i Michèle ROOT-BERNSTEIN. *Sparks of Genius. The thirteen thinking tools of the world's most creative people*. New York–Boston: Houghton Mifflin Company 1999 s. 75.

[15] Marek KORDOS. *Wykłady z historii matematyki*. Warszawa: WSiP 1994 s. 47-48.

Przyjrzyjmy się jeszcze naukowej kwestii odbioru muzyki. Struktury dźwiękowe składają się z zestawów fal akustycznych o dobranych częstotliwościach i amplitudach oraz ciszy pomiędzy nimi. Nazwy dźwięków, np. C, C♯, D, D♯, E itd., to w istocie stałe oznaczające określone częstotliwości fal. Dźwięk podstawowy A_1 to dźwięk o częstotliwości 440 Hz. Ten sam dźwięk zagrany o oktawę wyżej ma częstotliwość dwukrotnie wyższą, czyli 880 Hz. Wiedząc, że obecnie mamy skalę równomiernie temperowaną, częstotliwości pozostałych dźwięków możemy łatwo obliczyć, ponieważ stosunek częstotliwości dwóch kolejnych (odległych od siebie o półton) dźwięków jest stały i wynosi $\sqrt[12]{2}$. Wartość ta wynika stąd, że skoro podniesienie dźwięku o jedną oktawę (12 półtonów) daje dwukrotny wzrost częstotliwości, to pojedynczy półton musi oznaczać wzrost częstotliwości właśnie o czynnik $\sqrt[12]{2}$. Stąd możemy już łatwo wyliczyć częstotliwości wszystkich dźwięków. Matematycznie mamy do czynienia z ciągiem geometrycznym. Jak to jednak możliwe, że z dźwięków, których częstotliwości powstają z tonu podstawowego przez mnożenie przez czynnik $\sqrt[12]{2}$, który jest liczbą niewymierną, można skomponować muzykę miłą dla ucha? I co na to powiedziałby Pitagoras, który uwielbiał liczby naturalne, a tu mamy liczby niewymierne? Okazuje się, że otrzymane w ten sposób liczby niewymierne (częstotliwości dźwięków) są bardzo dobrymi przybliżeniami stosunków zdefiniowanych przez Pitagorasa, co przedstawia poniższa tabela[16]:

Nazwa interwału	Współczynnik w dzisiejszej skali równomiernie temperowanej	Przybliżenie współczynnika	Stosunek pitagorejski
sekunda wielka	$\sqrt[12]{2^2}$	1,12246	9:8
tercja mała	$\sqrt[12]{2^3}$	1,18921	6:5
tercja wielka	$\sqrt[12]{2^4}$	1,25992	5:4
kwarta czysta	$\sqrt[12]{2^5}$	1,33483	4:3
kwinta czysta	$\sqrt[12]{2^7}$	1,49830	3:2
septyma wielka	$\sqrt[12]{2^{11}}$	1,88774	17:9
oktawa	$\sqrt[12]{2^{12}} = 2$	2,00000	2:1

Rys.1. Tabela własna autora na podstawie
http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/36/zdan.pdf

[16] Anna ZDANOWICZ. *Matematyka w muzyce*. http://www.msn.ap.siedlce.pl/ smp/msn/36/zdan.pdf (dostęp: 16.12.2015).

Tabela ta nie zawiera oczywiście wszystkich interwałów. Chciałem pokazać, że budując akordy i skale muzyczne, musimy trzymać się pewnych reguł, których podłoże tkwi właśnie w matematyce. Wszystkie podstawowe akordy w muzyce spełniają te reguły, np. akordy durowe zbudowane są z dźwięku podstawowego, tercji wielkiej, kwinty czystej oraz ich harmonicznych. Nie we wszystkich akordach oczywiście przestrzega się tych zasad. Wtedy takie akordy są „trudniejsze w odbiorze”. Wykorzystuje się je w bardziej skomplikowanych gatunkach muzycznych, np. takich jak jazz.

Pitagoras był bardzo dumny z faktu, że udało mu się opisać muzykę liczbami. Można powiedzieć, że spełniło się wtedy jedno z jego marzeń. Warto wspomnieć, że pitagorejczycy na swoje spotkania przynosili instrumenty muzyczne i oddawali się improwizacji. Patrząc z dzisiejszego punktu widzenia, można powiedzieć, że owe spotkania były zapowiedzią tzw. *jam sessions*. Niestety nie wiadomo, czy byli dobrymi wykonawcami i jak naprawdę brzmiała ich muzyka, nie dysponujemy bowiem żadnymi nagraniami z tamtych czasów. Matematyczne zależności w muzyce, które odkrył Pitagoras, były zatem możliwe nie tylko dzięki wiedzy matematycznej, ale i praktycznym umiejętnościom muzycznym.

FAKT 2: GUIDO D’AREZZO (ŚREDNIOWIECZE)

Wiemy, że matematyka posługuje się własnym językiem – językiem symboli. Muzyka również ma swój język symbolicznego zapisu. Kiedy nastąpiło wprowadzenie symboliki do muzyki? Jakie to miało znaczenie?

Przenieśmy się teraz dosyć daleko w czasie od Pitagorasa, a mianowicie do wieku XI. Przykładem powiązania muzyki z matematyką może być tu fakt, że w tym okresie miały początki muzyki algorytmicznej, tzn. zaczęto stosować w muzyce język symboli, za którego pomocą opisywano melodię. Prekursorem tego był włoski benedyktyn z opactwa Pomposa, kompozytor i teoretyk muzyczny Guido D’Arezzo (ur. 990-1000, zm. 1045-1050)[17].

Do swych kompozycji użył schematu przypisującego różne wysokości dźwięku do pierwszych głosek religijnego tekstu. Chodzi o fragment łacińskiego hymnu do św. Jana:

[17] Susan ROTH. *Do Re Mi: If you can read music, Thank Guido D’Arezzo*. Boston, Mass.: Houghton Mifflin Company 2006.

UT queant laxis, **RE**sonare fibris.
MIra gestorum, **FA**muli tuorum.
SOLve polluti **LA**bii reatum **S**ancte **I**oannes[18]

Jak widać, powstały w ten sposób nazwy dzisiejszej solmizacji. Początkowo dźwięk „do” nazywał się „ut”, a zmianę tę tłumaczy się m.in. łatwiejszym wymawianiem. Symbolikę tę rozwijano i w XV wieku Guillaume Dufay (1400-1472), muzyk i kompozytor franko-flamandzki, duchowny i bakałarz prawa kanonicznego, przypisał różne wartości tempa różnym częściom kompozycji na podstawie wymiarów budynku katedry.

Mamy tu zatem dowód sformalizowania muzyki, wprowadzenia nowego języka do muzyki – języka symboli, jakże popularnego w matematyce. Miało to ogromne znaczenie dla rozwoju muzyki, stworzony bowiem został wspólny język dla kompozytorów całego świata.

FAKT 3: JAN SEBASTIAN BACH (BAROK)

Kolejny dowód na, można powiedzieć, matematyczność w muzyce znajdziemy w epoce baroku, kiedy żył i komponował Jan Sebastian Bach (1685-1750), o którym słyszał chyba każdy. Ten genialny niemiecki kompozytor i organista jest do dziś jednym z najpopularniejszych twórców muzyki klasycznej. W swej grze osiągnął najwyższy poziom wirtuozerii, a kontakt z jego muzyką sprawia wrażenie styczności z czymś idealnym, wręcz matematycznym. W 1801 r. w „Allgemeine Musikalische Zeitung” napisano:

> Imię Johanna Sebastiana Bacha jaśnieje ponad wszystkimi niemieckimi kompozytorami pierwszej połowy ubiegłego (XVIII) stulecia. Objął on duchem wypływającym z myśli Newtona wszystko, co do tej pory wiedziano o kompozycji muzycznej i dawano za przykład, przeniknął jej głębiny tak całkowicie i trafnie, że musi być słusznie uznany za twórcę praw rzeczywistej harmonii, które obowiązują do dziś[19].

Nasuwa się pytanie: co sprawiło, że jego muzyka jest tak przemyślana i doskonała? Czy Bach świadomie stosował formalne zasady kompozycji? Czy zdawał sobie sprawę z ich matematycznego charakteru? Bach nie przypuszczał zapewne, jak dalece jego muzyka sięga podstaw nauk ścisłych oraz że będzie analizowana pod kątem matematycznym.

---

[18] David HULSE. *A fork in the road: an inspiring journey of how ancient solfeggio frequencies are empowering personal and planetary transformation!* Bloomington, Ind.: Authorhouse 2009 s. 59.

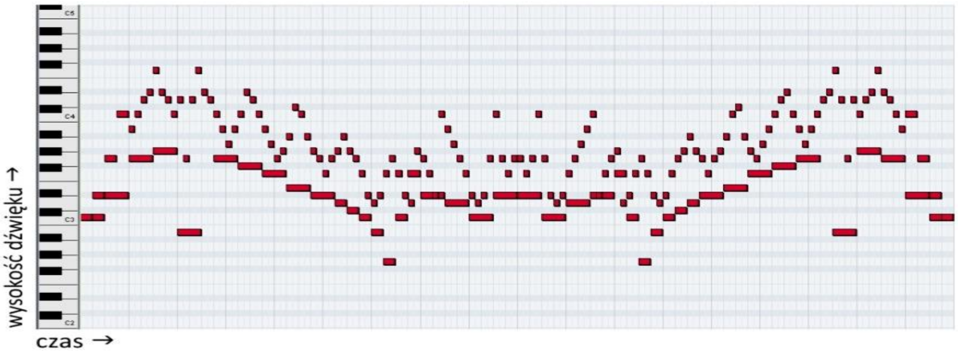
[19] „Allgemeine Musikalische Zeitung” 3:1801. Cyt. za: http://www.muzykotekaszkolna.pl/wiedza/kompozytorzy/bach-jan-sebastian-1685-1750 (dostęp: 16.12.2015).

Wiele formalnych własności widać i słychać w utworze z dzieła *Musikalisches Opfer* („Muzyczne ofiarowanie"), jednym z ostatnich w dorobku kompozytora (1747). Inspiracją do jego powstania była wizyta Bacha 7 maja 1748 r. na dworze króla pruskiego Fryderyka II w Poczdamie pod Berlinem, gdzie jego syn Carl Philipp Emanuel Bach pełnił funkcję klawesynisty. Król, który odebrał staranne wykształcenie muzyczne i sam był flecistą oraz kompozytorem, zagrał Bachowi temat, a następnie poprosił o zaimprowizowanie fugi. Bach nie spełnił wówczas prośby króla, ale po powrocie do Lipska postanowił zmierzyć się z tym zadaniem. W ten sposób powstał dedykowany władcy cykl utworów – niezwykle kunsztownych kanonów i skomplikowanych fug, które autor określił dawną nazwą *ricercar* (z włoskiego 'szukać'). W liście do króla Bach napisał:

> Waszej Królewskiej Mości poświęcam niniejszym z najgłębszym oddaniem tę muzyczną ofiarę, której najszlachetniejsza część z najłaskawszej własnej ręki Waszej pochodzi. Z pełną czci radością wspominam jeszcze szczególną łaskę królewską, gdy w czasie mej niedawnej bytności w Poczdamie raczył Wasza Królewska Mość osobiście zagrać mi na klawesynie temat do fugi, najłaskawiej mnie przy tym zobowiązując, aby takową w najwyższej obecności Waszej zaraz wykonał.

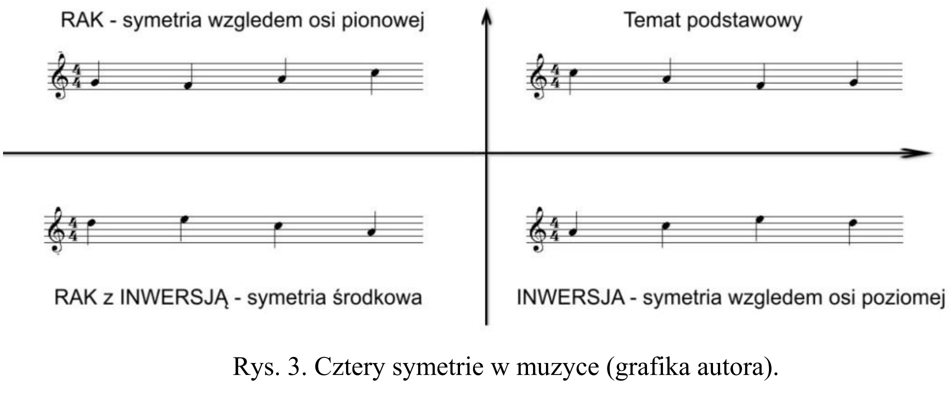
Pierwszy z kanonów wchodzących w skład *Musikalisches Opfer* zatytułowany jest *Quaerendo invenietis* (z łaciny: „Szukajcie, a znajdziecie"). Znany jest też jako Krab Kanon i można porównać go do wstęgi Möbiusa[20]. Pozwala to nawet lepiej zrozumieć jego strukturę. Do tej muzycznej wstęgi Möbiusa Bach dołączył symetrię, co widzimy na poniższym rysunku.

[20] Wstęga Möbiusa – dwuwymiarowa zwarta rozmaitość topologiczna istniejąca w przestrzeni trójwymiarowej, którą można uzyskać, sklejając taśmę końcami przy odwróceniu jednego z końców o kąt 180°. Jej najważniejszą cechą jest to, że ma tylko jedną stronę (jest tzw. powierzchnią jednostronną). Ma również tylko jedną krawędź – „sklejenie" tej krawędzi (niemożliwe w przestrzeni trójwymiarowej) daje butelkę Kleina. Opisana przez Augusta Möbiusa, niemieckiego matematyka, i Johanna Benedicta Listinga w 1858 r.



Rys. 2. Ilustracja Kanonu Krab w programie muzycznym Cubase (grafika autora).

Dokładniej analizując, załóżmy, że mamy jakiś podstawowy temat muzyczny – oznaczmy go symbolem **P**. Jego odbicie w pionie tworzy inwersję, czyli serię lustrzaną (polega to na zachowaniu porządku interwałów[21] przy zmianie ich kierunku). Odczytanie tematu od końca tworzy tzw. raka **R**, a gdy poddamy temat podstawowy obu tym przekształceniom, otrzymamy raka z inwersją **RI**[22]**.** I już chyba czujemy, że zbliża się matematyka, a w szczególności przekształcenia geometryczne. Jeśli umieścimy to w układzie współrzędnych, to otrzymamy symetrię osiową względem osi OX, OY oraz symetrię środkową względem początku układu współrzędnych. W przypadku symetrii względem osi poziomej – osią symetrii jest środkowa linia w pięciolinii. Widać to doskonale na poniższym rysunku na przykładzie czterech nut.



Rys. 3. Cztery symetrie w muzyce (grafika autora).

---

[21] Interwał – w muzyce różnica wysokości między dwoma dźwiękami współbrzmiącymi lub następującymi po sobie.

[22] Alicja JARZĘBSKA. *Strawiński: myśli i muzyka*. Kraków: Musica Iagellonica 2002.

Bach bawił się tymi przekształceniami świadomie i kładł nuty przed muzykami siedzącymi przy stole. Każdy z nich czytał je (grał), traktując pięciolinię tak, jakby narysowana była od jego strony. Wtedy pozornie prosty kanon nabierał mocy, brzmiał przyjemnie dla ucha – i to na głosy, a przede wszystkim odsłaniał cały kunszt muzyczny kompozytora, a przez strukturę kompozycji pokazywał również duże relacje z matematyką. Widzimy zatem w utworach Bacha niezwykłą precyzję, bardzo przemyślaną i poukładaną. Przy okazji warto przytoczyć słowa Jean-Philippe'a Rameau, kompozytora i teoretyka muzyki epoki baroku: „Muzyka jest nauką, powinna zatem posiadać ściśle określone reguły wyprowadzone z jakiejś ewidentnej zasady, a zasada ta może być rozpoznana tylko za pomocą matematyki"

FAKT 4: WOLFGANG AMADEUSZ MOZART (KLASYCYZM)

Przenieśmy się teraz do epoki klasycyzmu. Mamy tu geniusza nie tylko tej epoki, ale i wszechczasów. To oczywiście Wolfgang Amadeusz Mozart (1756-1791). Postać i muzyka Mozarta należy do najbardziej złożonych zjawisk w historii muzyki, ale nie tylko. Wokół jego osoby narosło wiele legend i kontrowersji. Wielu ludziom trudno wyobrazić sobie, jak człowiek, który przeżył zaledwie 35 lat, zdołał napisać około 700 utworów, często tak rozbudowanych jak opery czy oratoria, a przy tym tak bardzo oryginalnych. Czy Mozart kierował się zasadami matematycznymi? Tego się pewnie nigdy nie dowiemy. Wiemy natomiast, że równocześnie z twórczością muzyczną Mozart zachwycał się matematyką. Sięgnijmy do dzieciństwa Mozarta. Mozart miał starszą o pięć lat siostrę Marię Annę nazywaną Nannerl, która także przejawiała uzdolnienia muzyczne. Razem z nią mały Wolfgang grywał duety klawesynowe. To właśnie jego siostra Nannerl opowiadała, że gdy uczył się matematyki, wszystkie meble w domu, ściany i podłoga były pokryte liczbami. Mówiła również, że „gdy uczył się matematyki, nie myślał i nie rozmawiał o niczym innym jak o liczbach". To wskazuje, że lubił matematykę i kochał liczby. Przecież nikt bez zainteresowania liczbami nie wypisywałby ich wokół siebie. Mając 14 lat, pisał do siostry, aby wysłała mu jego ćwiczenia z arytmetyki. Alfred Einstein (nie mylić z Albertem Einsteinem), jeden z biografów Mozarta, pisał, że liczby towarzyszyły mu przy komponowaniu przez całe życie. Nawet na marginesie swoich kompozycji zapisywał równania matematyczne, m.in. w utworach *Fantazja* oraz *Fuga*

C-dur, gdzie obliczał swoje szanse wygrania na loterii[23]. Mimo że równania te nie odnoszą się do kompozycji, pokazują zainteresowanie Mozarta matematyką. Co go tak naprawdę interesowało w rachunku prawdopodobieństwa, tego nie wiemy. Może po prostu zainteresowanie matematyką, a może chęć opracowania systemu na wygrywanie na loterii. Na pewno potrzebował pieniędzy, i to nie tylko na codzienne życie. Mozart słynął z zamiłowania do zabawy, a to kosztowało. Lubił także różne zagadki logiczne, m.in. bardzo mu się spodobała anegdota o perskim wynalazcy gry w szachy. Oto jej treść:

> Podanie głosi, że twórca szachów, uczony Sissa-Nassir – gdy władca Indii, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go wszystkim, czego zapragnie – zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno ziarenko złożone na pierwszym polu.

Okazało się, że władca Indii, mimo ogromnego bogactwa, nie był w stanie takiego honorarium wypłacić. Owa zapłata to suma ciągu geometrycznego, złożonego z potęg liczby 2 z wszystkimi kolejnymi wykładnikami od 0 do 63, co wyniesie: 18 446 774 073 709 551 615 ziaren. Zapisując to matematycznie, mamy:

$$2^0 + 2^1 + 2^3 + \cdots 2^{63} = \sum_{n=1}^{64} 2^{n-1} = 18446774073709551615$$

Ten fakt również świadczy o zainteresowaniu Mozarta liczbami i logicznym myśleniem. Dokładna zależność między muzyką a matematyką u Mozarta jest ciągle przedmiotem wielu dyskusji, które mają na celu opisać jego dzieła matematycznie. Analiza strukturalna jego muzyki i jej wpływu na słuchacza, sugeruje, że taki związek istnieje. Wieloletnie badania potwierdziły, że słuchanie muzyki Mozarta poprawia koncentrację i pobudza myślenie matematyczne. Nazwano to „Efektem Mozarta". W 2004 r. okazało się jednak, że szeroko reklamowana poprawa wykonania wizualno-przestrzennych zadań w teście inteligencji jest, po pierwsze, chwilowa (efekt utrzymuje się 10-15 minut), po drugie – zależy od preferencji muzycznych dziecka. Czyli jeśli dziecko nie lubi muzyki klasycznej, to mu nie pomoże, nawet chwilowo. (Badania takie prowadzili np. Kristin M. Nantais, E. Glenn Schellenberg[24]).

---

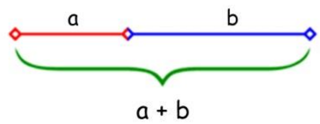
[23] Alfred EINSTEIN. *Mozart: Człowiek i dzieło. Mozart: Człowiek i dzieło*. Przeł. Adam Rieger, Stefan Jarociński. Kraków: Polskie Wydawnictwo Muzyczne 1975.

[24] Kristin M. NANTAIS, E. Glenn SCHELLENBERG. *The Mozart Effect: An Artifact of Preference*. „Psychological Science" 1999 nr 10 (4) s. 370-373.

Mimo to muzyka może rozwinąć inteligencję dziecka. Badania nad rozwojem mózgu pokazały, że wykonywanie muzyki bardzo rozwija pewne jego rejony. W rezultacie dzieci uczące się regularnie gry na instrumencie potrafią lepiej niż ich rówieśnicy wykonywać różne zadania poznawcze, np. szybciej rozwijają zasób słownictwa i łatwiej zapamiętują nowe słowa. Poza tym dzieci szkolone muzycznie mają lepiej rozwiniętą pamięć operacyjną, zdolności matematyczne, lepszą orientację w czasie i przestrzeni oraz umiejętność czytania (dowodzą tego badania, jakie prowadzili E. Glenn Schellenberg oraz Aniruddh D. Patel, John R. Iversen[25]). W wyniku badań okazało się nawet, że nauka śpiewu i fortepianu daje lepsze efekty w rozumowaniu abstrakcyjnym niż nauka informatyki.

Wróćmy teraz do analizy muzyki Mozarta i zastanówmy się, skąd się wzięła jej doskonałość. Tu zapewne wielu matematyków pomyśli o złotych proporcjach. Ponieważ złote proporcje są naturalne, to wielu artystów, architektów i kompozytorów było i pozostaje pod ich wpływem, co można zauważyć w ich dziełach. Chcieli tworzyć coś wyjątkowego, ale jednocześnie pragnęli, by dzieło współgrało z zachwycającą i doskonałą naturą.

Złoty podział odcinka polega na podziale tego odcinka na dwie nierówne części tak, aby stosunek całego odcinka do dłuższej części podziału był równy stosunkowi dłuższej części odcinka do krótszej. Obrazuje to poniższy rysunek.



Rys. 4. Ilustracja złotego podziału odcinka (grafika autora)

czyli, zapisując matematycznie, otrzymamy:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$$

Rozwiązaniem tego równania jest tzw. złota liczba:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$$

Czy można zauważyć złty podział w otworach Mozarta. Przyjrzyjmy się jego sonatom. Złotym podziałem w tych utworach zajmował się m.in. ame-

[25] Aniruddh D. PATEL, John R. IVERSEN *The linguistic benefits of musical abilities*. „Trends in Cognitive Sciences" 2007 nr 11 s. 369-372.

rykański matematyk John F. Putz[26]. Wiele osób twierdzi, że w tych sonatach zastosowany jest złoty podział. Sonata to podstawowa forma muzyczna, wykształcona i typowa dla epoki klasycyzmu. Występuje m.in. w symfoniach, sonatach i koncertach. Istotą formy sonatowej jest dualizm tematyczny. Aby zobaczyć złoty podział w sonatach Mozarta, podzielmy sonatę na dwie części:

1. **Ekspozycja**, w której prezentuje się dwa kontrastujące tematy.
2. **Przetworzenie i Repryza**. Przetworzenie to najbardziej swobodna część formy sonatowej. Następuje tu przetwarzanie tematów pod względem melodycznym, rytmicznym, harmonicznym i fakturalnym.

Rys. 5. Podział sonaty (grafika autora).

Przyjrzyjmy się teraz, jak Mozart dzielił te części. W poniższej tabeli przedstawiłem podział sonaty na dwie części oraz dokładną ilość taktów w każdej z nich i w całej sonacie. Przy okazji warto wspomnieć, że sonaty Mozarta skatalogował Ludwig von Köchel i w 1862 r. opublikował *Chronologisch-thematisches Verzeichnis sämtlicher Tonwerke Wolfgang Amadé Mozarts*[27], czyli chronologicznie i tematycznie ułożony rejestr dzieł Mozarta, znany jako KV – *Köchel-Verzeichnis*, czyli *Katalog Köchla*.

Na szczególną uwagę zasługuje sonata K 279I. Podział w niej jest wręcz doskonały, najbardziej zbliżony do złotego podziału. Ilość taktów jest liczbą naturalną, nie da się tego zatem zrobić dokładniej.

$$\frac{62}{38} = 1{,}6315 \ldots \frac{100}{62} = 1{,}6129 \ldots$$

Podobnie jest w sonacie 279 II

$$\frac{46}{28} = 1{,}6428 \ldots \frac{74}{46} = 1{,}6086 \ldots$$

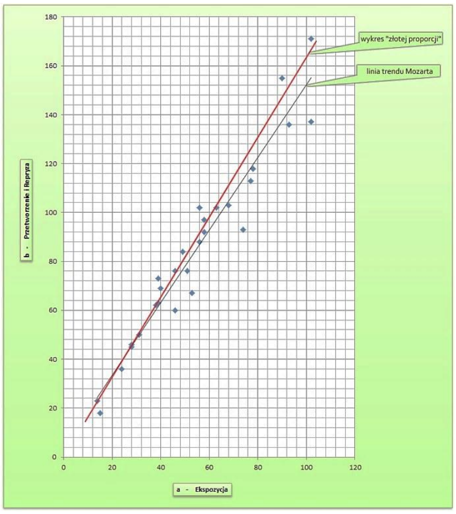
[26] John F. PUTZ. *The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart*. „Mathematics Magazine" 68:1995 No. 4 s. 275-282.

[27] Ludwig Ritter von KÖCHEL. *Chronologisch-thematisches Verzeichnis sämtlicher Tonwerke Wolfgang Amadé Mozarts*. Leipzig: Breitkopf & Härtel 1905.

Podział sonat według Köchla	ilość taktów			$\frac{a+b}{a}$	$\frac{b}{a}$
	Ekspozycja	Przetworzenie i Repryza	Całość sonaty		
	a	b	$a+b$		
279,I	38	62	100	1,6129	1,6316
279,II	28	46	74	1,6087	1,6429
279,III	56	102	158	1,5490	1,8214
280,I	56	88	144	1,6364	1,5714
280,II	24	36	60	1,6667	1,5000
280,III	77	113	190	1,6814	1,4675
281,II	40	69	109	1,5797	1,7250
281,II	46	60	106	1,7667	1,3043
282,III	15	18	33	1,8333	1,2000
282,III	39	63	102	1,6190	1,6154
283,I	53	67	120	1,7910	1,2642
283,II	14	23	37	1,6087	1,6429
283,III	102	171	273	1,5965	1,6765
284,I	51	76	127	1,6711	1,4902
309,I	58	97	155	1,5979	1,6724
311,I	39	73	112	1,5342	1,8718
310,I	49	84	133	1,5833	1,7143
330,I	58	92	150	1,6304	1,5862
330,III	68	103	171	1,6602	1,5147
332,I	93	136	229	1,6838	1,4624
332,III	90	155	245	1,5806	1,7222
333,I	63	102	165	1,6176	1,6190
333,II	31	50	81	1,6200	1,6129
457,I	74	93	167	1,7957	1,2568
533,I	102	137	239	1,7445	1,3431
533,II	46	76	122	1,6053	1,6522
545,I	28	45	73	1,6222	1,6071
547a,I	78	118	196	1,6610	1,5128

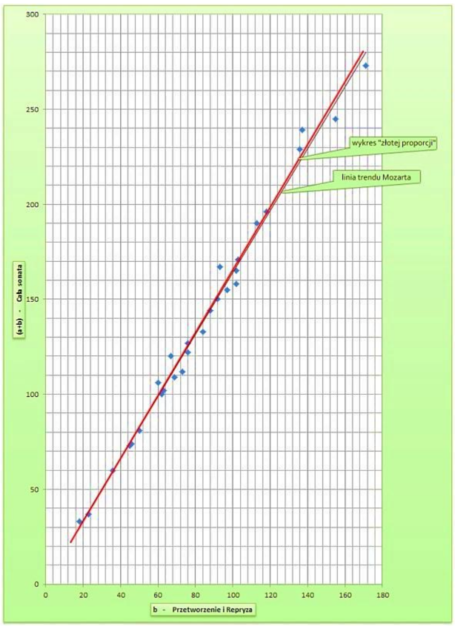
Rys. 6. Ilość taktów poszczególnych sonat wraz z obliczonym stosunkiem podziału (tabela autora).

Do lepszej oceny stopnia spójności ze złotą liczbą zastosujmy wykres punktowy na początek dla zależności: $\frac{b}{a}$. Na wykresie (Rys. 7) umieszczona jest tzw. linia trendu oraz wykres proporcjonalności prostej $y = \varphi x$ o współczynniku $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$:



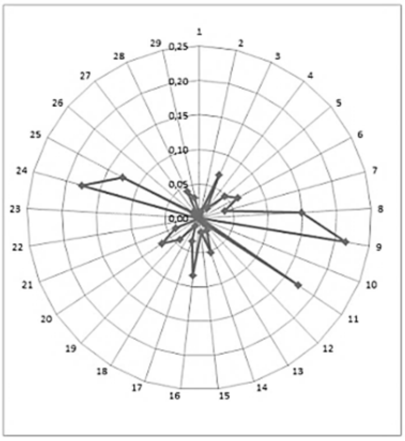
Rys. 7. Tak zwana linia trendu oraz wykres proporcjonalności prostej $y = \varphi x$ o współczynniku $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (wykres autora).

Jeśli to ma być złoty podział, to również stosunek $\frac{a+b}{b}$ powinien być w pobliżu złotego podziału. Widać to na poniższym wykresie (Rys. 8):

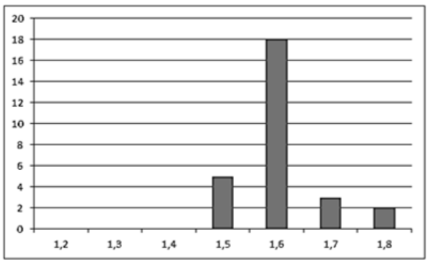


Rys. 8. (wykres autora)

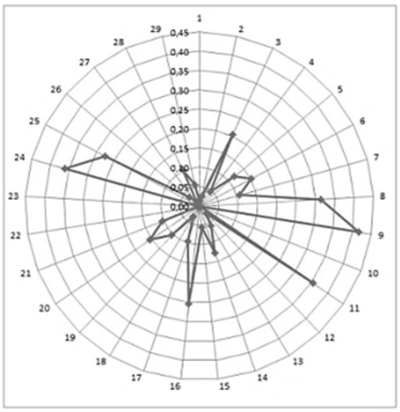
Jak ten podział zbliża się do złotej liczby widać też na poniższym kołowym i słupkowym wykresie – dla stosunku $\frac{a+b}{b}$ Rys. 9 i 10, dla stosunku $\frac{b}{a}$ Rys. 11 i 12.



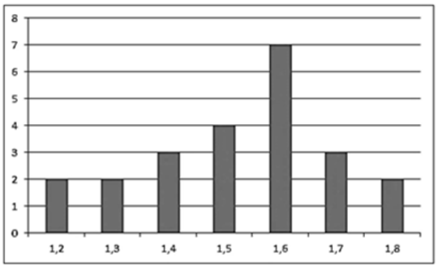
Rys. 9. Środek koła ilustruje złotą liczbę (grafika autora)



Rys. 10. Najwyższa kolumna ilustruje złotą liczbę (grafika autora)



Rys. 11. Środek koła ilustruje złotą liczbę (grafika autora)



Rys. 12. Najwyższa kolumna ilustruje złotą liczbę (grafika autora)

Jest to imponujący dowód na to, że Mozart dzielił sonatę w pobliżu złotego podziału, i to z dużą dokładnością. Czy robił to świadomie, tego się pewnie nigdy nie dowiemy. Nawet jeśli nie był tego świadomy, to miał niesamowite „wewnętrzne wyczucie” złotego podziału. Oczywiste jest, że sonaty składającej się np. z 200 taktów żaden kompozytor nie podzieli w stosunku 1:199, 2:198 czy nawet 20:180. Taki podział nie zapewniałby odpowiedniej długości pierwszej części na wprowadzenie tematu sonaty. Z drugiej zaś strony, aby zapewnić wprowadzenie tematu, nie musimy dzielić sonaty w złotych proporcjach. Mozart jednak to robił. I to właśnie chyba jest „to coś” w jego muzyce.

Kolejnym matematycznym elementem w muzyce Mozarta jest symetria z translacją. Można zauważyć, że melodia „idzie” raz w górę, a raz w dół, potem zaś powtarza się to kilkakrotnie. To tak jakbyśmy mieli jakiś wzór i idąc według niego zauważamy ich symetrie i powtarzalność. Dokładnie chodzi o to, że główny temat powtarza się, ale Mozart w każdym powtórzeniu zmienia wysokość nuty lub kilku nut. W muzyce nazywa się to transpozycją, a w matematyce translacją. Tak więc, łącząc symetrię, okresowość oraz translację, można by w pewien sposób opisać utwór muzyczny. Lubimy pewną przewidywalność w muzyce, ale też chcemy być trochę zaskakiwani. Zbytnia powtarzalność staje się nudna, ciągłe zaś zaskakiwanie zbyt męczące. Mozart robił to z doskonałym wyczuciem. Słuchając jego muzyki, w pewnym sensie jesteśmy przygotowani na kolejny temat, ale wiemy, że nas czymś nowym zaskoczy. Wspomniana wcześniej symetria być może związana jest z obserwacji kuli bilardowej, którą Mozart często puszczał po stole bilardowym i obserwował, jak odbija się od brzegów stołu. Jeśli spojrzeć na to matematycznie, możemy nawet porównać to do przekształceń typu $|f(x)|$ lub $f(|x|)$. Symetrie doskonale słychać w *Symfonii No 40*[28].

[28] Tomasz GRĘBSKI. *M jak Mozart i M jak Matematyka*. „Matematyka” 2014 nr 11 s. 2-9.

Bardzo interesująca jest też tzw. *Musical Dice Game Minuet*, czyli *Muzyczna gra w kości*. W 1787 r. Mozart napisał 16-taktowego menueta oraz instrukcję, jak należy go grać. Menuet składał się z dwunastu części. Najpierw grano pierwszą część, następnie wybierano jedną z jedenastu pozostałych części. Wybierano ją w specyficzny sposób: rzucano dwiema kostkami do gry i sumowano wynik wyrzuconych oczek. Suma oznaczała numer części, którą należało zagrać. Mozart tak skomponował to dzieło, że każda część, niezależnie od jej kolejności, pasowała do następnej. W bardziej rozbudowanej grze muzycznej można było nawet zmieniać kolejności taktów w poszczególnych częściach. Dawało to tryliony możliwości. Mozart uwielbiał takie zabawy z muzyką, a przy okazji można stwierdzić, że i z matematyką. Liczba możliwości zagrania utworu to przecież kombinatoryka, a szansa zagrania danej części, to rachunek prawdopodobieństwa. Wiemy, że Mozart robił notatki z rachunku prawdopodobieństwa na marginesach swych kompozycji.

Myślę, że Mozart na pewno lubił liczby i matematykę. Kto wie, gdyby zajął się matematyką, czy i w tej dziedzinie nie zostałby geniuszem, mając tak niesamowite wyczucie?

FAKT 5: LUDWIG VAN BEETHOVEN (KLASYCYZM)

W epoce klasycyzmu mamy jeszcze jednego geniusza, którym był Ludwig van Beethoven (1770-1827). Kompozytor i pianista niemiecki, ostatni z tzw. klasyków wiedeńskich i jednocześnie prekursor romantyzmu w muzyce, uznawany za jednego z największych twórców muzycznych wszechczasów. Wiemy, że Beethovena spotkało chyba największe nieszczęście jako muzyka, ponieważ od około 25 roku życia zaczął tracić słuch, ale mimo to nie poddał się i nie zaprzestał tworzenia swoich dzieł, nawet w okresie całkowitej głuchoty. Wróćmy jednak do tematu matematyki w muzyce. Wiemy na pewno, że Beethoven nigdy nie studiował matematyki wyższej, a mimo to w jego muzyce jest wiele matematycznego myślenia, i to na bardzo wysokim poziomie. Chodzi o teorię grup, którą możemy znaleźć w algebrze[29]. Grupa to pewien zbiór (nazwijmy go G), który ma następujące cechy:

- posiada jakieś elementy $(a, b, c, \dots)$, i w którym określone jest pewne działanie (oznaczmy je przez *), a wynik tego działania należy do grupy;

[29] A. BROŻEK. *Symetria w muzyce* s. 20

- w grupie istnieje element neutralny n, taki, że $a * n = a$;
- dla każdego elementu $a \in G$ istnieje do niego element odwrotny: a^{-1}, taki że $a * a^{-1} = n$;
- działanie określone w grupie jest łączne.

Aby łatwiej było to zrozumieć, podam przykład takiej grupy: liczby całkowite z działaniem dodawania. Sprawdźmy czy ma cechy grupy:

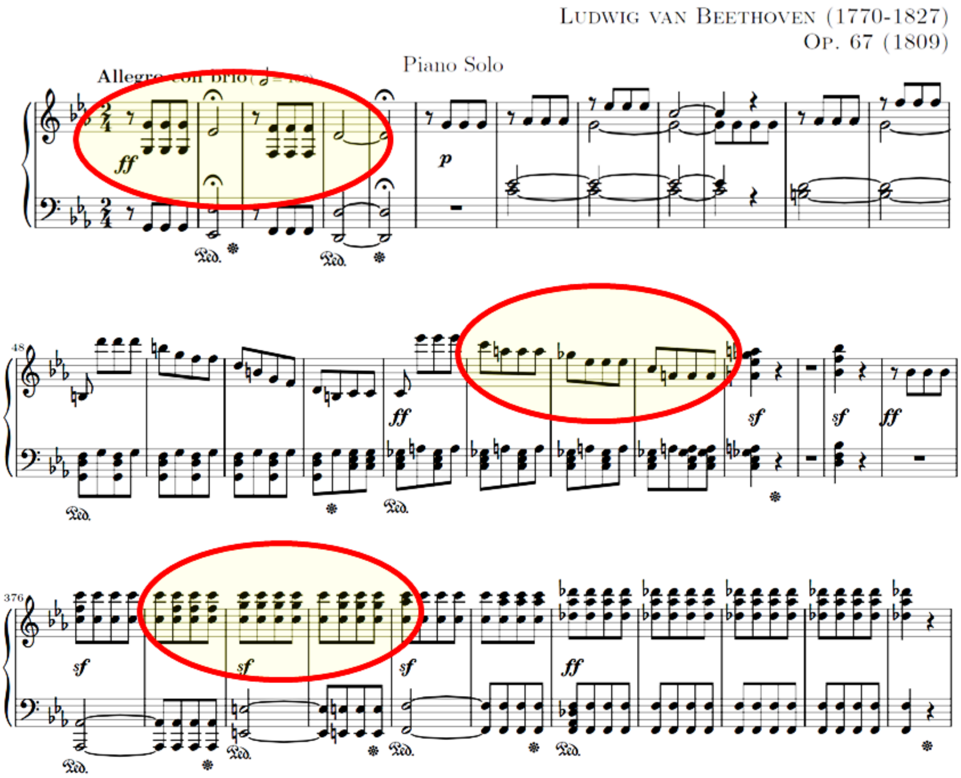
- wynik dodawania należy też do liczb całkowitych;
- elementem neutralnym jest liczba 0, bo $a + 0 = a$;
- elementem odwrotnym jest $-a$, bo $a + (-a) = 0$;
- dodawanie jest oczywiście łączne.

Za pomocą teorii grup można opisać elementy *V Symfonii* Beethovena (tzw. Symfonii Przeznaczenia). „Beethoven użył w niej tego, co krystalografowie nazywają przestrzenną grupą transformacji symetrycznych. Na takim już poziomie abstrakcji krystaliczny diament i *Piąta Symfonia* Beethovena to jedno i to samo”[30]. Operacje grupy przestrzennej związane z krystalografią to translacja, rotacja, odbicie lustrzane, inwersja i operacja jednostkowa. Beethoven intuicyjnie wyczuwał grupy i symetrię przestrzenną, ale oczywiście ich tak matematycznie nie nazywał. Jego grupa to przestrzeń posiadająca trzy wymiary: wysokość, czas i głośność.

Teraz konkrety: od razu na początku *V Symfonii* przedstawia nam element grupy, który składa się z trzech identycznych nut oraz czwartej nuty – niespodzianki. Oznaczmy ten element jako *XXXY*. Element ten przedstawia nam kilka razy z delikatnymi przerwami, abyśmy mogli dobrze go rozpoznać. Następnie przeprowadza operację translacji, tzn. każda nuta zostaje przeniesiona na inną wysokość i powstaje nam kolejny element grupy. W następujących taktach stosuje operator rotacji (czyli obrót o 180°), a potem operator lustrzany (chodzi tu o wcześniej opisywany rak, tylko zapisany we właściwym kierunku grania). W środku pierwszej części wprowadza coś w rodzaju operatora tożsamościowego (element neutralny). Na tym nie koniec – z tych elementów tworzy potem grupę o bardziej skomplikowanej budowie, mianowicie element tej grupy składa się z czterech elementów wcześniejszej grupy (trzy takie same i jeden inny, czyli mamy 16 nut). Taka struktura przypomina też tzw. fraktal.

---

[30] Chuan C. CHANG. *Fundamentals of Piano Practice*. [Charleston, SC]: Booksurge 2009 s. 209



Rys. 13. Fragment *V Symfonii* Beethovena z wyszczególnionymi fragmentami opisanych w tekście przekształceń w grupie (grafika autora).

W innych swoich kompozycjach również stosował opisaną teorię, a to stanowi dodatkowy dowód na to, że musiał w jakiś sposób intuicyjnie czuć teorię grup i świadomie rozróżniać różne przestrzenie. Czy Beethoven świadomie używał tego mechanizmu i nikomu się tym nie pochwalił – tego się już pewnie nie dowiemy, ale jedno jest pewne: miał umysł geniusza, skoro takie złożone obiekty widział i słyszał[31].

FAKT 6: DODEKAFONIA (XX WIEK)

Lata dwudzieste XX wieku to ważny moment w muzyce poważnej, ponieważ wówczas przestaje tu dominować zasada harmonii, a kompozytorzy odchodzą od systemu tonalnego i reguł faworyzujących konsonans. Wtedy

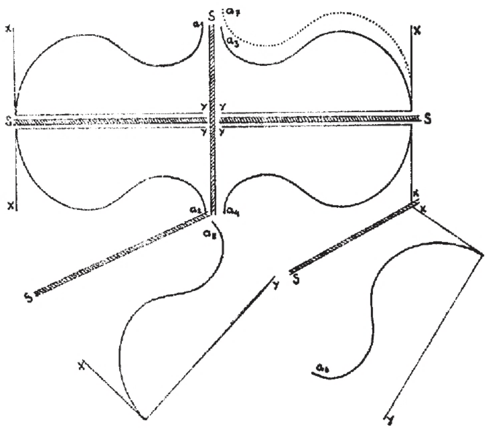
[31] Tomasz GRĘBSKI. *Muzyka sfer*. „Wiedza i Życie” 2014 nr 9 s. 58

też w Austrii i Niemczech rozwija się tzw. dodekafonia, czyli muzyka dwunastotonowa, która – można powiedzieć – ma dwa główne założenia:

1. Odrzuca tonalność i traktuje wszystkie dźwięki skali chromatycznej jako całkowicie autonomiczne elementy. W konsekwencji nie ma już tzw. mocnych punktów, czyli dominant. Można powiedzieć, że każdy dźwięk jest „równouprawniony”;
2. Żaden dźwięk nie powinien być powtórzony, dopóki nie zostaną użyte wszystkie dźwięki skali.

Najbardziej znanymi kompozytorami, którzy stworzyli i posługiwali się tą techniką kompozytorską, byli Arnold Schönberg (1874-1951), Anton Webern (1883-1945) i Alban Berg (1885-1935).

Schönberg nazywał dźwięki matematycznie – były to ciągi, szeregi lub serie. Ciągi te przekształcał na kilka sposobów, nawiązując jednocześnie do wykształconych w polifonii średniowiecza symetrii: inwersja, rak i inwersja raka. W muzycznej skali współczesnej mamy 12 dźwięków, czyli 11 interwałów między nimi. Stosując zasadę dodekafonii, możemy obliczyć wszystkie możliwości utworzenia takich szeregów. Do obliczenia użyjemy permutacji, czyli otrzymujemy: 11! = 39916800 możliwości. Do tego dochodzi transpozycja, rak oraz inwersja. Daje to ogrom możliwości przy komponowaniu. Sposób zapisu tych kompozycji był również inny niż tradycyjnej notacji muzycznej. Oto przykładowy zapis Schönberga przedstawiający zasady przy dodekafonii:



Rys.14. Przykładowy zapis A. Schönberga[32].

[32] Maciej GOŁĄB. *Dodekafonia. Studia nad teorią i kompozycją pierwszej połowy XX wieku*. Bydgoszcz: Pomorze 1987 s. 92.

Można to również przedstawić w stylu kwadratów magicznych, np. używając oznaczeń: P – temat podstawowy, I – inwersja, R – rak, RI – rak inwersji, można stworzyć następujące kwadraty, które mogą służyć jako wzór czy automat przy komponowaniu (Rys. 15)[33]:

P	I	R	RI	P	RI	R	I	P	R	RI	I
R	RI	P	I	R	I	P	RI	RI	I	P	R
RI	R	I	P	I	R	RI	P	I	RI	R	P
I	P	RI	R	RI	P	I	R	R	P	I	RI
P	I	RI	R	P	RI	I	R	P	R	I	RI
RI	R	P	I	I	R	P	RI	I	RI	P	R
R	RI	I	P	R	I	RI	P	RI	I	R	P
I	P	R	RI	RI	P	R	I	R	P	RI	I

Rys. 15. Ilustracja kombinacji tematu muzycznego (grafika autora).

Skąd wzięły się pomysły na taki sposób zapisu? Po prostu dla muzyki dodekafonicznej tradycyjna notacja muzyczna oparta na pięciolinii i znakach chromatycznych stała się niewystarczająca. Z czasem zaczęto stosować zapis muzyczny oparty na liczbach, co spowodowało prawie całkowite zepchnięcie tradycyjnej estetyki muzycznej na drugi plan.

FAKT 7: IANNIS XENAKIS (XX WIEK)

Kolejny dowód na relacje, a nawet, w tym przypadku, powiązanie matematyki z muzyką to twórczość greckiego kompozytora Iannisa Xenakisa (1922-2001). Urodził się w Rumunii. Był synem greckiego biznesmena. Skończył politechnikę, a po studiach został wcielony do wojska, zdezerterował i musiał wyemigrować – wybrał Francję. Tam od 1959 r. pracował jako inżynier, architekt i projektant w pracowni Le Corbusiera. Później jednak całkowicie poświęcił się twórczości kompozytorskiej. W jego przypadku powiązanie muzyki z matematyką stało się przedmiotem artystycznych dociekań. Xenakis stwierdził, że „każdą muzykę można w końcu rozłożyć na szereg operacji i układów o charakterze czysto logicznym. Dźwięki lub

[33] Elżbieta STRÓŻECKA. *Między matematyką, muzyką i filozofią*. Teksty Konferencji MathPAD, Toruń, UMK, 2012. https://mathcas.files.wordpress.com/2012/09/a11-strozecka_ muzyka1.pdf

struktury dźwiękowe należy traktować jako znaki, jako dźwiękowe symbole, stanowiące swoiste elementy obszernego zbioru, w którym i do którego stosować można teorię zbiorów, rozmaite systemy logiczne i algebraiczne”[34]. W swych utworach wykorzystywał m.in. rachunek prawdopodobieństwa (utwór *Pithoprakta*), teorię grup (utwór *Nomos Alpha*), teoria gier (utwór *Pojedynek*), teorię zbiorów (utwór *Herm*)[35]. Nigdy nie zapisywał swych utworów notacją muzyczną, nigdy nie pisał ich przy fortepianie. Jego narzędziem pracy była deska kreślarska i kalka techniczna. Przy zapisie posługiwał się figurami i bryłami, do których przykładał wielką wagę. Oto przykłady zapisu jego kompozycji.

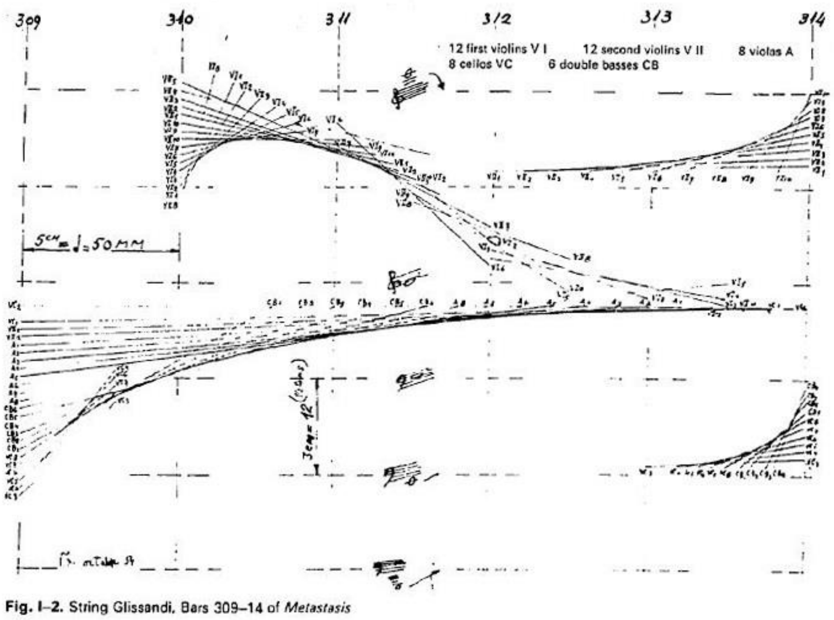


Fig. I–2. String Glissandi, Bars 309–14 of *Metastasis*

Rys. 16. Przykład zapisu kompozycji I. Xenakisa[36].

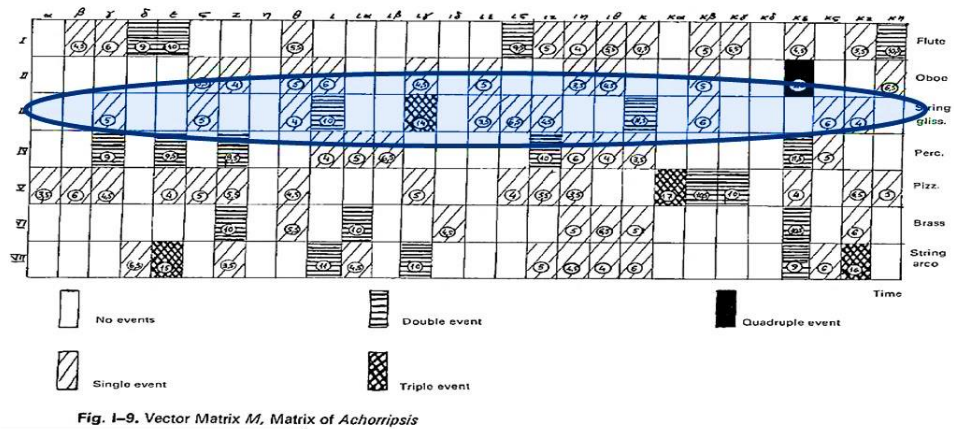
Gdyby ktoś nas zapytał, co może przedstawiać ten rysunek, jestem pewien, że raczej nikt nie powie, że to utwór muzyczny. Wiele utworów zapisywał w formie tabel, np.:

---

[34] Iannis XENAKIS. *Debussy a sformalizowanie muzyki*. „Ruch Muzyczny” 1962 nr 16 s. 7.

[35] James HARLEY. *Iannis Xenakis: Racjonalny mistyk, architekt dźwięku*. „Muzyka” 43:1998 nr 4 s. 17-34.

[36] Iannis XENAKIS. *Formalized Music*. Stuyvesant, NY: Pendragon 1992 s. 3.



Rys.17. Przykładowa analiza III wiersza utworu *Achorripsis* przedstawiającego *glissando*. Jedną z cech *glissando* jest prędkość[37].

Rozkład wartości prędkości jest zgodny z rozkładem Gaussa:

$$f(v) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{\frac{-v^2}{a^2}}$$

Prawdopodobieństwo, że wartość prędkości będzie między v_1 a v_2

$$P(\lambda) = \theta(\lambda_2) - \theta(\lambda_1)$$

gdzie $\theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2}\, d\lambda$

Prawdopodobieństwo, że i-ty segment będzie miał długość x: $P_x = \delta e^{-\delta x} dx$

A jak brzmi jego matematyczna muzyka? Zachęcam do posłuchania. Po tym krótkim wprowadzeniu będzie można trochę lepiej zrozumieć jego muzykę, dlaczego jest właśnie taka, a nie inna. A czy jest przyjemna dla ucha, czy nie? To już pozostawiam Czytelnikowi.

FAKT 8: RUDRESH MAHANTHAPPA (XX WIEK)

Doskonałym przykładem świadomego wykorzystania elementów matematyki w kompozycjach muzycznych jest również twórczość amerykańskiego muzyka jazzowego hinduskiego pochodzenia Rudresha Mahanthappa (ur. 1971 r.).

[37] Tamże s. 28-33.

Recenzja jego płyty z 2006 r. zatytułowanej *Codebook* ukazała się nie w czasopiśmie muzycznym, lecz w naukowym miesięczniku „Science", ponieważ utwory na płycie są inspirowane matematyką i powstały z wykorzystaniem reguł matematycznych. Znajdziemy tu utwory mające strukturę opartą na ciągu Fibonacciego, w innych utworach wykorzystał pewną własność liczby 142857. Liczba ta pomnożona przez 2, 3, 4, 5 lub 6 daje wynik będący permutacją jej cyfr (np. $142857 \cdot 2 = 285714$, $142857 \cdot 3 = 428571$ itd). W utworze *Play It Again Sam*, zadedykowanym Samuelowi Morse'owi, perkusista (Dan Weiss) na początku utworu wystukuje swoje imię alfabetem Morse'a, kropki gra krótkimi, kreski zaś długimi dźwiękami[38].

FAKT 9: TOOL (XX WIEK)

Ciąg Fibonacciego został też świadomie wykorzystany w utworze *Lateralus* amerykańskiej grupy TOOL (założonej w 1990 r.), wykonującej muzykę z pogranicza rocka i metalu progresywnego.

Oto fragment tekstu:

Black then white are all I see in my infancy.
Red and yellow then came to be,
reaching out to me, lets me see.
As below so above and beyond I imagine,
drawn beyond the lines of reason.
Push the envelope. Watch it bend[39].

Wokalista, śpiewając ten tekst, dzieli go na pewne części i sylaby, które układają się w ciąg Fibonacciego. Liczby w nawiasach to kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego:

(1) Black
(1) Then
(2) White are
(3 All I see
(5) In my infancy
(8) Red and yellow then came to be
(5) Reaching out to me

[38] John Bohannon. *Riffs on Numerical Themes*. „Science" 315:2007 Issue 26 (January 2007) s. 462-463.

[39] http://www.azlyrics.com/lyrics/tool/lateralus.html (dostęp: 16.12.2015).

(3) Lets me see
(2) There is
(1) So
(1) Much
(2) More that
(3) Beckons me
(5) To look through to these
(8) Infinite possibilities
(13) As below so above and beyond I imagine
(8) Drawn outside the lines of reason
(5) Push the envelope
(3) Watch it bend

Ponadto wokal zaczyna się po 1 minucie i 37 sekundach, czyli po ok. 1.61 części minuty, co – jak wiadomo – jest przybliżeniem złotej liczby. W refrenie jest też nawiązanie do spirali Fibonacciego.

FAKT 10: MATEMATYCY-MUZYCY

Na koniec podam kilka przykładów osób, które doskonale połączyły i pogodziły nauki ścisłe z muzyką. Poprzez to chcę pokazać, że człowiek nauki może też pięknie grać czy śpiewać i być doskonałym artystą.

Jako pierwszy na myśl przychodzi mi Albert Einstein (1879-1955). To przecież z jednej strony geniusz w dziedzinie fizyki, który odkrył teorię względności, a z drugiej strony pasjonat gry na skrzypcach. Jego matka, wykształcona pianistka, zorganizowała mu lekcje gry na skrzypcach. Wiemy, że razem z nią, akompaniującą na fortepianie, tworzył doskonały duet. Einsteina najbardziej fascynowała muzyka Mozarta, o której powiedział: „Muzyka Mozarta jest tak czysta i piękna, że widzę w niej odbicie wewnętrznego piękna samego wszechświata”[40]. Muzyka nie była dla Einsteina zwykłą rozrywką, wręcz przeciwnie – pomagała mu myśleć. „Zawsze kiedy czuł, że zabrnął w ślepą uliczkę albo napotkał na swej drodze jakieś trudne wyzwanie, szukał wyjścia w muzyce i ostatecznie pokonywał trudności” – opowiadał syn uczonego, Hans Albert[41]. Jeden z przyjaciół Einsteina powiedział zaś: „Często do późna w nocy grał na skrzypcach w kuchni, impro-

[40] Walter ISAACSON. *Einstein His Life and Universe*. New York: Simon & Schuster 2007. Przekład pol.: *Einstein. Jego życie, jego wrzechświat*. Przeł. Jarosław Skowroński. Warszawa: WAB 2014 (ebook).

[41] Tamże.

wizując jakieś melodie i jednocześnie rozważając skomplikowane zagadnienia nagle przerywał grę i wykrzykiwał: Mam to!”[42]. Nasuwa się zatem pytanie, czy u Einsteina można zauważyć wspomniany wcześniej „efekt Mozarta”. Einstein był przecież zafascynowany jego muzyką. Powiedział nawet, że „Beethoven musiał tworzyć swoją muzykę, a muzyka Mozarta była tak doskonała, tak czysta i od zawsze w kosmosie czekała na odkrycie przez mistrza, który nie tylko ją odkrył, ale pokazał jej piękno i doskonałość”[43].

Matematykiem z wykształcenia, który okazał się świetnym muzykiem, jest Arthur Garfunkel (ur. 1941 r.), wokalista amerykańskiego duetu Simon & Garfunkel. Jest on absolwentem Columbia University.

Wybitny polski kompozytor i dyrygent Witold Lutosławski (1913-1994) w 1931 r. podjął studia matematyczne na Uniwersytecie Warszawskim. Po roku jednak musiał je przerwać z powodu nadmiaru zajęć muzycznych.

Dobrze znanym na świecie matematykiem-muzykiem jest amerykański topolog Thomas Andrew Lehrer (ur. 1928), absolwent matematyki na Uniwersytecie Harvarda, wykładowca Harvardu i Massachusetts Institute of Technology (MIT), autor tekstów, pianista, wykonawca piosenek i satyryk.

Również i wśród młodych ludzi mamy przykład łączenia pasji matematycznej i muzycznej. Przykładem jest Piotr Pawlak z Gdańska, który od kilku lat figuruje na listach laureatów tak ogólnopolskich, jak i międzynarodowych olimpiad matematycznych. W XVII Międzynarodowym Konkursie Chopinowskim Piotr był w grupie 160 uczestników, którzy przeszli wiele eliminacji wstępnych, aby uczestniczyć w konkursie. Na pytanie, czy zdolności matematyczne i muzyczne są ze sobą powiązane, odpowiada: „Cóż... na pewno jakiś związek istnieje. W moim przypadku jest on raczej jednostronny – wydaje mi się, że to raczej matematyka pomaga mi w muzyce niż odwrotnie. Od pewnego czasu uczęszczam na zajęcia z kompozycji i kiedy mam na przykład stworzyć jakieś kształtowanie lub rozłożyć kulminacje, moje analityczne zdolności wydają się to ułatwiać. Nie jest to oczywiście zaawansowana matematyka, jednak pewne uporządkowanie myśli przy rozważaniu dostępnych możliwości jest bardzo pomocne. Dotyczy to również kwestii wykonywania utworów – niektórzy pianiści zdają się wówczas jedynie na swoją intuicję, ja natomiast wolę najpierw na spokojnie sobie rzecz przemyśleć i rozsądnie porozkładać akcenty w całym utworze”[44]

---

[42] Tamże.

[43] Walter ISAACSON. *Great Innovators*. New York: Simon & Schuster 2011 (e-book).

[44] „Kwadrat. Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów” 2015 nr 15 s. 3-4.

ZAKOŃCZENIE

Przedstawione przykłady potwierdzają, że istnieją relacje między matematyką i muzyką. Teza zatem, którą postawiłem na początku, jest jak najbardziej słuszna. I nie chodzi tu o jakieś liczenie czy same liczby, ale przede wszystkim o myślenie, o przestrzenne spostrzeganie pewnych złożonych struktur. Przecież w twórczym umyśle matematyka czy muzyka powstają bardzo złożone struktury, mające wiele wymiarów. Struktury te są czasem tak piękne, że sami nawet nie wiemy dlaczego, a zarazem mają bardzo skomplikowaną budowę i nie dla wszystkich są zrozumiałe. Wiele osób powie pewnie, że to dwie zupełnie różne dziedziny kultury, jak się jednak okazuje, wiele je łączy. Na podstawie przytoczonych przykładów widzimy, że myślenie matematyczne pomaga w tworzeniu muzyki, jak również muzyka pomaga w myśleniu matematycznym. Możemy zatem mówić o relacjach między tymi dziedzinami. Pozwala to na lepsze ich poznanie, a także zachęca do dalszych badań w tym kierunku.

Na podstawie własnego doświadczenia matematycznego i muzycznego mogę również stwierdzić, że można je doskonale połączyć. Matematyczne myślenie pomaga w organizacji dźwięków, w zaplanowaniu utworu podczas komponowania czy w widzeniu całego utworu w czasie. W matematyce jest przecież bardzo podobnie: np. opracowanie strategii przy rozwiązywaniu zadań, dopasowanie właściwych twierdzeń itp. W tych dwóch dziedzinach nie da się oszukać: jeśli zrobimy błąd w matematyce, to zaraz to widać, jeśli w muzyce – słychać.

LITERATURA

„Allgemeine Musikalische Zeitung” 3:1801 (vom 1. Oct. 1800 bis 23. Sept. 1801). Leipzig: Breitkopf und Härtel Verlag.

BOHANNON John: *Riffs on Numerical Themes*. „Science” 315:2007 Issue 26 (January 2007) s. 462-463. DOI: 10.1126/science.1139629.

BROŻEK Anna: *Symetria w muzyce czyli O pierwiastku racjonalnym w komponowaniu dzieł muzycznych*. Kraków–Tarnów: OBI–Biblos 2004.

CHANG Chuan C.: *Fundamentals of Piano Practice*. [Charleston, SC]: Booksurge 2009.

CZARNECKI Jan: *Ineffable w filozofii muzyki*. W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń*. Red. Lidia Godek, Maciej Musiał, Marek Woszczek. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM 2015 s. 222.

DA VINCI Leonardo: *Traktat o malarstwie*. Przeł. Maria Rzepińska. Gdańsk: Słowo/Obraz Terytoria 2006.

DITTRICH Joanna: *Filozofia muzyki Arystoksenosa*. „Zeszyty Naukowe Towarzystwa Doktorantów UJ", Nr specjalny 3 (2/2011), Kierunki badawcze w filozofii II.

EINSTEIN Alfred: *Mozart: Człowiek i dzieło*. Przeł. Adam Rieger, Stefan Jarociński. Kraków: Polskie Wydawnictwo Muzyczne 1975.

GOŁĄB Maciej: *Dodekafonia. Studia nad teorią i kompozycją pierwszej połowy XX wieku*. Bydgoszcz: Pomorze 1987.

GOŁASZEWSKA Maria: *Muzyka filozofii. Esej o podwójnych znaczeniach*. „Muzyka" 2005, nr 1.

GRĘBSKI Tomasz: *M jak Mozart i M jak Matematyka*. „Matematyka" 2014 nr 11 s. 2-9.

GRĘBSKI Tomasz: *Muzyka sfer*. „Wiedza i Życie" 2014 nr 9 s. 54-59.

GRĘBSKI Tomasz: *Usłyszeć geometrię i zobaczyć dźwięki*. „Matematyka" 2014 nr 3 s. 6-12.

GUCZALSKI Krzysztof: *Formalizm w muzyce – przypadek Nicka Zangwilla*. W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń*. Red. Lidia Godek, Maciej Musiał, Marek Woszczek. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM 2015 s. 229.

HARLEY James: *Iannis Xenakis: Racjonalny mistyk, architekt dźwięku*. „Muzyka" 43:1998 nr 4 s. 17-34.

http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/matematyka;3938552.html

http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/muzyka;3944813.html

http://www.azlyrics.com/lyrics/tool/lateralus.html

HULSE David: *A fork in the road: an inspiring journey of how ancient solfeggio frequencies are empowering personal and planetary transformation!* Bloomington, Ind.: Authorhouse 2009.

ISAACSON Walter: *Einstein His Life and Univers*. New York: Simon & Schuster 2007. Przekład pol.: *Einstein. Jego życie, jego wrzechświat*. Przeł. Jarosław Skowroński. Warszawa: WAB 2014 (ebook).

JARZĘBSKA Alicja: *Strawiński: myśli i muzyka*. Kraków: Musica Iagellonica 2002

KÖCHEL Ludwig Ritter von: *Chronologisch-thematisches Verzeichnis sämtlicher Tonwerke Wolfgang Amade Mozarts*. Leipzig: Breitkopf & Härtel 1905.

KORDOS Marek: *Wykłady z historii matematyki*. Warszawa: WSiP 1994.

„Kwadrat. Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów" 2015 nr 15.

MORACZEWSKI Krzysztof: *Wewnętrzna historyczność sztuki. Przykład muzyki*. W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń*. Red. Lidia Godek, Maciej Musiał, Marek Woszczek. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM 2015 s. 222.

NANTAIS Kristin M., SCHELLENBERG E. Glenn: *The Mozart Effect: An Artifact of Preference*. „Psychological Science" 1999 nr 10 (4) s. 370-373.

ORMAN Edyta: Muzyka na tle innych sztuk w ujęciu Thrabsybulosa Georgiadesa W: *10 Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń*. Red. Lidia Godek, Maciej Musiał, Marek Woszczek. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM 2015 s. 230.

PATEL Aniruddh D., IVERSEN John R.: *The linguistic benefits of musical abilities*. „Trends in Cognitive Sciences" 2007 nr 11 s. 369-372.

PUTZ John F.: *The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart*. „Mathematics Magazine" 68:1995 No. 4 s. 275-282.

ROOT-BERNSTEIN Robert Scott, ROOT-BERNSTEIN Michèle: *Sparks of Genius. The thirteen thinking tools of the world's most creative people*. New York–Boston: Houghton Mifflin Company 1999.

ROTH Susan: *Do Re Mi: If you can read music*, *Thank Guido D'Arezzo*. Boston, Mass.: Houghton Mifflin Company 2006.

STRÓŻECKA Elżbieta: *Między matematyką, muzyką i filozofią*. Teksty Konferencji MathPAD 2012, UMK, Toruń: 2012. https://mathcas.files.wordpress.com/2012/09/a11-strozecka_ muzyka1.pdf

WEST Martin L.: *Muzyka starożytnej Grecji*. Przeł. Maciej Kaziński, Anna Maciejewska. Kraków: Homini 2003.

XENAKIS Iannis: *Debussy a sformalizowanie muzyki*. „Ruch Muzyczny" 1962 nr 16 s. 7.
XENAKIS Iannis: Formalized Music. Stuyvesant, NY: Pendragon 1992.
ZDANOWICZ Anna: *Matematyka w Muzyce.* http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/36/zdan.pl

O RELACJACH MIĘDZY MATEMATYKĄ I MUZYKĄ

Streszczenie

Czy muzyka i matematyka mają coś ze sobą wspólnego? W artykule autor zajmuje się dwoma przejawami kultury należącymi do dwóch jej dziedzin – nauki i sztuki. Nauką, którą się zajmuje, jest matematyka, a sztuką – muzyka. Muzyka była, jest i zapewne będzie przedmiotem wielu badań i poszukiwań jej związków czy relacji z innymi dziedzinami. Celem tego artykułu jest przyjrzenie się tym dwom dziedzinom pod kątem matematycznych relacji i podobieństw, które można znaleźć w muzyce, oraz udowodnienie tezy, że relacje między matematyką i muzyką istnieją. Podczas analizy tych dwóch dziedzin przytoczanych jest kilka faktów, które pozwalają udowodnić tę tezę. Analizowane są kompozycje muzyczne pod kątem świadomego stosowania w nich zależności matematycznych, jak również utwory, w których można zauważyć struktury matematyczne u kompozytorów, którzy matematykami nie byli.

Obydwie dziedziny to formy sztuki posiadające własny alfabet, a raczej własny język symboli. Studia matematyczne uczą wypowiadania się na bardzo abstrakcyjne zagadnienia matematyczne w sposób ścisły i uporządkowany. Muzyka zaś jest najbardziej abstrakcyjną i uporządkowaną formą sztuki. Tak więc jak matematykę nazywamy „królową nauk", tak muzykę można by nazwać „królową sztuki". Badając zatem relacje między tymi dwoma przejawami kultury, lepiej zrozumiemy i poznamy każdy z nich.

Słowa kluczowe: analiza; dodekafonia; formalizm; matematyka; muzyka; nauka; relacje; sztuka.

THE RELATIONSHIP BETWEEN MATHEMATICS AND MUSIC

Summary

Has music got something in common with mathematics? In this article the author deals with two expressions of culture belonging to its two disciplines: science and art. Mathematics belong to science, music to art. Music has always been and it will be the subject of profound research and exploration of its relationships with other domains. The aim of this article is to look at these two areas in the terms of mathematical relationships and similarities that can be found in music and to prove the thesis that the relationship between mathematics and music exist. While analyzing these two areas some facts are quoted that allow to prove this thesis. The author analyzes music compositions for deliberate use in their mathematical relationships, as well as songs in which mathematical structures can be seen in the works of composers who were not mathematicians.

Both areas are art forms that have their own alphabet or rather their own language of symbols. Mathematical studies teach to talk on extremely abstract mathematical problems in a strict and orderly way. Music is the most abstract and an ordered art form. And while mathematics is called "the queen of science," so music could be called "the queen of art." Thus, examining the relationship between these two manifestations of the culture we can understand and know each of them better.

Key words: analysis; art; dodecaphony; formalism; mathematics; music; relationships; science.