Martin D a v i s. Applied nonstandard analysis. Ed. J. Wiley and Sons. New York-London-Sydney-Toronto 1977

1. Zacznijmy od prostych dwóch przykładów:
Przykład 1 - Obliczenia pochodnej funkcji $y = x^2$
Pochodna jest równa stosunkowi nieskończenie małego przyrostu funkcji /dy/ do nieskończenie małego przyrostu argumentu /dx/. W naszym przypadku $dy = /x + dx/^2 - x^2 = 2xdx + /dx/^2$, gdzie dx jest nieskończenie małą liczbą. Dalej
$\frac{dy}{dx} = \frac{/x + dx/^2 - x^2}{dx} = 2x + dx$, a ponieważ $dx \approx 0$, dx możemy pominąć i szukana pochodna jest równa 2x. Oczywiście wynik ten jest poprawny. Trudno nie zauważyć jednak całej magiczności obliczenia.
Przykład 2 - Dowód jednostajnej ciągłości funkcji ciągłej na odcinku. Ciągłość funkcji f w punkcie x oznacza, że dla dowolnego nieskończenie bliskiego x punktu x' wartość $f/x'/$ jest nieskończenie bliska wartości f/x/; inaczej dla każdego x zachodzi $x' \approx x \Rightarrow f/x'/ \approx f/x/$, gdzie zapis $\approx$ oznacza nieskończoną bliskość liczb. Ponieważ z założenia funkcja f jest ciągła w każdym punkcie x, implikacja jest spełniona dla wszystkich x i x'. W ten sposób otrzymujemy, że nieskończona bliskość dowolnych dwóch argumentów pociąga za sobą nieskończoną bliskość wartości funkcji, a to oznacza jednostajną ciągłość. Logika tego dowodu na pierwszy rzut oka jest sprzeczna z naszym zdrowym rozsądkiem: pozostaje niezrozumiałe dlaczego rozumowania powyższego nie można zastosować do przedziału, dla którego jak wiadomo twierdzenie o jednostajnej ciągłości jest fałszywe.

Analiza niestandardowa /albo teoria niestandardowych modeli analizy/ jest działem logiki matematycznej, która pozwala spojrzeć w nowym świetle na problemy klasyków analizy matematycznej, nieścisłości w ich rozumowaniach, które tym niemniej prowadziły ich do poprawnych wyników. Okazuje się możliwe wprowadzenie pewnych uściśleń i staną się one zadowalające z punktu widzenia dzisiejszych kryteriów ścisłości. Postaramy się to pokazać eksploatując przykłady 1 i 2 z książki M. Davisa.

2. Zasadniczym momentem niestandardowych modeli analizy jest traktowanie nieskończenie małych niejako wielkości zmiennych /tj. tak jak uczą nas tego współczesne podręczniki/, ale jako wielkości stałych. Podkreślmy tutaj, że właśnie takie podejście do analizy było właściwe jej wczesnej historii, a reprezentowane wtedy zarówno przez Leibniza jak i Newtona. Akceptował je Euller,a dopiero z chwilą pojawienia się metod Cauchye'go uległo dezaktualizacji. Niestandardowa analiza jest więc niczym innym jak reaktywowaniem tych starych idei. Podejście klasyków analizy było również bliższe naszych intuicji. Zwiększenie ścisłości i pójście analizy drogą Cauchye'go zostało okupione utratą intuicyjności. Żeby się przekonać o tym, że ciągle myślimy o nieskończenie małych nie jak o wielkościach, ale jak o pewnych skończonych, wystarczy otworzyć dowolny podręcznik z fizyki. Spotkać tam można nieskończenie małe przyrosty, nieskończenie małe obiekty itp. Fizyk ustalając prawo połowicznego rozpadu powie: załóżmy, że w nieskończenie małym czasie Δt ilość materii radioaktywnej zmalała o nieskończenie małą wielkość ΔN a matematyk, element długości ds zinterpretuje nie inaczej jak nieskończenie mały element długości.

Naszej intuicji jest więc bliższe traktowanie nieskończenie małych jako pewnych stałych wielkości. Analiza niestandardowa jest u ɔrawiedliwieniem poprawności naszych intuicji.

3. Analiza standardowa jest stylizacją idei Leibniza we współczesnym języku. Idąc za rozważaniem autora książki spróbujmy tę rekonstrukcję przedstawić zarysowo. Załóżmy, że obok liczb rzeczywistych istnieją jeszcze liczby nieskończenie małe. Dodatnia nieskończenie mała liczba jest mniejsza od dowolnej liczby rzeczywistej. Powiększamy więc zbiór liczb rzeczywistych o nowe liczby, tzw. niestandardowe, wśród których znajdują się nieskończenie małe. Chcielibyśmy, aby tymi nowymi elementami można było operować tak jak operujemy liczbami rzeczywistymi, tj. porównywać je z innymi oraz wykonywać na nich operacje arytmetyczne. W takim razie pozostaje nam uznać, że obok liczb nieskończenie małych istnieją również nieskończenie wielkie jako wyniki z dzielenia liczb standardowych przez nieskończenie małe. Chcielibyśmy również, aby dla każdej standardowej liczby a istniało otoczenie nieskończenie bliskich, a niestandardowych liczb o postaci a $+\delta$,

gdzie $\delta \approx 0$ /w terminologii Leibniza także otoczenie nazywa się monadą liczby a/. Jeśli ε jest nieskończenie małą, różną od zera wtedy $\varepsilon/2, 2\varepsilon, \varepsilon^2$ są również nieskończenie małymi, przy czym ε^2 jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż ε. Standardowe /rzeczywiste/ liczby wspólnie z liczbami niestandardowymi tworzą ciało uporządkowane $^*R$ liczb hiperrzeczywistych. Hiperrzeczywista liczba a może być skończona /jeśli $/a/ < c$ dla pewnego rzeczywistego c/ lub nieskończona. Dla każdej hiperrzeczywistej skończonej liczby a istnieje dokładnie jedna nieskończenie bliska liczba rzeczywista a nazywana standardową częścią liczby a i oznaczaną przez st/a/. Jeśli $a \in R \Rightarrow st/a/ = a$. W ten sposób otrzymujemy następujący ciąg włożeń: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset {}^*R$ /N - zbiór liczb naturalnych, Z - zbiór liczb całkowitych, Q - zbiór liczb wymiernych, R - zbiór liczb rzeczywistych/. Ciało hiperrzeczywistych liczb $^*R$ posiada nową własność tzw. niearchimedesowości /pierścień posiada własność archimedesowości, jeśli dla dowolnych liczb a i b istnieje takie naturalne n, że $na > b$/. Jeśli $\alpha \in R^*$, $\alpha \approx 0$, to dla dowolnego $n \in N$ mamy $n\alpha < 1$, $n\alpha < \frac{1}{1000}$ i ogólnie $n\alpha < b$ dla dowolnej rzeczywistej dodatniej liczby b. Dlatego analizę niestandardową można by nazwać analizą na osi hiperrzeczywistej albo analizą niearchimedesowską.

4. Powróćmy teraz do naszych przykładów.
Przykład 1 spełni nasze wymagania ścisłości, jeśli tylko dodamy regułę przejścia do standardowego punktu x: $st\,/2x + dx/ = 2x$, jeśli pochodną liczymy w standardowym punkcie x. Nasze wątpliwości odnośnie do rozumowania przeprowadzonego w punkcie 2 sprowadzały się do tego, że było dla nas niezbyt jasne założenie zawartości dziedziny funkcji. Spróbujmy zastosować rozumowanie z przykładu 2 do funkcji $y = \frac{1}{x}$ w przedziale /0, 1/. Jeśli traktować przedział hiperrzeczywistej prostej $^*R$ funkcja $y = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła w dowolnym punkcie $\alpha \approx 0$, $\alpha \neq 0$ więc nie dla każdego x spełniony jest warunek: $x \approx d \Rightarrow \frac{1}{x} \approx \frac{1}{\alpha}$ /wystarczy wziąć $x = \frac{\alpha}{2}$/. Dokładnie tak samo jak funkcja $y = x^2$ nie będzie ciągła w nieskończenie wielkim punkcie x /przykład 2 s. 138/. Można również pokazać, że wykorzystywana w tym przykładzie niestandardowa definicja ciągłości i jednostajnej ciągłości jest równoważna ze standardową /tw. 5,4 i 5,7 rozdział 2/.

5. W odróżnieniu od zbiorów N, Z, Q, R zbiór hiperrze-

czywistych liczb $^*R$ nie jest jednoznaczny w tym sensie, że istnieje wiele uporządkowanych ciał $^*R$ posiadających wymagane własności oraz nie istnieje naturalny sposób wyróżnienia któregoś z $^*R$. Istnienia ciała $^*R$ dowodzi się dwoma metodami. Pierwsza polega na zastosowaniu twierdzeń logiki matematycznej. Twierdzenia te mówią o istnieniu pewnych struktur posiadających określone własności. Druga z metod polega natomiast na ich konstrukcji. Liczby całkowite można traktować jako klasę równoważnych ciągów fundamentalnych /Cauchye'go/ liczb wymiernych. Konstrukcja $^*R$ jest do pewnego stopnia analogiczna.

6. Analiza niestandardowa ma swoją krótką historię sięgającą lat sześćdziesiątych. I jak to zwykle bywa w matematyce doczekała się już opracowań książkowych, jest tematem sympozjów naukowych, a pewne problemy matematyczne znalazły w niej rozwiązanie. Jej nauczanie na uniwersytetach wysubtelnia umysły studentów na magię dowodów analizy. Uczy to nas jednego, jak dalece pożyteczne jest sięganie do starych idei wielkich mistrzów.

Marek Szydłowski

Michał H e l l e r, Teoretyczne podstawy kosmologii. Warszawa 1988, ss. 195. PWN

Obserwowany obecnie dynamiczny rozwój kosmologii przyrodniczej przejawia się nie tylko w ilości ukazujących się publikacji, ale również w stosowaniu do zagadnień kosmologicznych coraz to nowych nieraz bardzo wyrafinowanych metod matematycznych. Prowadzi to często do zaskakujących rozwiązań stawiających dotychczasowe ujęcia kosmologiczne w nowym, nie zawsze zrozumiałym do końca świetle.

Odczuwa się więc potrzebę pewnego usystematyzowania problematyki kosmologicznej, spojrzenia na nią z perspektywy jej podstawowych zasad i metod, co pozwoliłoby zarówno na głębsze zrozumienie samej istoty kosmologii, jak i na ukazanie dalszych dróg jej rozwoju.

Próbą wyjścia naprzeciw tego rodzaju zapotrzebowaniom jest omawiana tu książka jednego z najwybitniejszych polskich kosmologów, autora wielu interesujących prac z zakresu nie tylko samej kosmologii, ale i jej historii oraz filozoficz-