ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXXVII-XXXVIII, zeszyt 3 – 1989-1990

MAREK SZYDŁOWSKI

TRAKTAT O GEOMETRACH NA ROZGRZANEJ PŁYCIE CZYLI KOSMOLOGIA SALAMANDER

WSTĘP

Według jednego z mitów średniowiecznych salamandry żyją w wiecznym ogniu. Załóżmy, że posiadają one inteligencję zdolną do poznawania otaczającego je świata. Jaki to świat? Spróbujmy go odtworzyć. W świecie tym fundamentalną rolę odgrywają procesy cieplne i winny one mocno ingerować w całościowym opisie świata salamander. Racjonalna postawa badacza kosmosu salamander każe mu w konstrukcji obiektywnego opisu stosować metody matematyki i fizyki. Możemy sobie więc wyobrazić, że równanie przewodnictwa cieplnego opisuje zasadnicze procesy fizyczne świata salamander; inne procesy pominiemy - nazwiemy to zasadą wyłączności procesów cieplnych. Naszą ambicją jest zbudowanie nauki o globalnej strukturze świata salamander - dokładniej jego modelu. Pewnych wzorców takiej konstrukcji dostarcza nam fizyka. W każdym takim modelu możemy wyróżnić trzy elementy: 1 - zespół pojęć teoretycznych, narzędzi służących do opisu zjawiska, 2 - dziedzinę rzeczywistości do której model się odnosi, 3 - reguły przyporządkowujące pojęciom teoretycznym przedmioty z dziedziny /np. procedury pomiarowe/. Pojęcia, którymi będziemy się posługiwać przy opisie świata salamander, są w pewnym sensie podobne do tych, które sami stosujemy do opisu otaczającego nas świata. Rozgrzana płyta - przestrzeń życiowa salamander - jest dwuwymiarową powierzchnią, na której temperatura zmienia się od punktu do punktu: $T = \Gamma/x,y/$; zakładamy, że gęstość powierzchniowa energii cieplnej jest stała i równa p. Dodajmy jeszcze, że salamandry żyjąc dysponują jedynie metodą pomiaru odległości za pomocą taśm mierniczych, których własności rozszerzalności są określone przez współczynnik h.

/ $h > 0$ rozszerzanie, $h < 0$ skracanie/.

1. ARENA ŻYCIOWA SALAMANDER - SPOJRZENIE Z ZEWNĄTRZ

Wyobraźmy sobie na początek świat na rozgrzanej płycie bez powiązania z pomiarem, oglądamy z zewnątrz. Będzie nim nieskończona płaszczyzna R^2 z zadanym na niej skalarnym polem temperaturowym $T = T(x,y)$ oraz stałą gęstością powierzchniową źródeł p. Możemy zdefiniować nowe pole wektorowe $\vec{\Phi} = -k \operatorname{grad} T(x,y)$, gradientu temperatury, gdzie k jest współczynnikiem związanym z danym ośrodkiem przewodzącym, zwanym stałą przewodnictwa cieplnego tj. $\vec{\Phi} = -\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} - k\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}$. Pole $\vec{\Phi}$ jest polem źródłowym, tj. jego dywergencja jest równa gęstości powierzchniowej energii cieplnej $p = \frac{dQ}{dS} = \frac{dQ}{dxdy}$. Stąd korzystając z definicji pola otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{\Phi} = p \Longleftrightarrow & \operatorname{div} (-k \operatorname{grad} T) = p \\
& -k \operatorname{div} (\operatorname{grad} T) = p \\
& -k \,\Delta T = p \qquad /1/
\end{aligned}
$$

gdzie:

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - jest operatorem zwanym laplasjanem

$\operatorname{div} \vec{\Phi} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y}$ - jest operatorem zwanym dywergencją,

Φ_x, Φ_y - są składowymi pola Φ wzdłuż osi x i y.

Równanie /1/ jest równaniem przewodnictwa. Podstawowy problem teorii przewodnictwa polega na tym, aby przy zadanym rozkładzie gęstości źródeł określić rozkład temperatury $T(x,y)$.

Dla przykładu załóżmy sferyczną symetrię płaszczyzny, tj. że $T = T(r)$; innymi słowy, że temperatura jest funkcją odległości od pewnego wyróżnionego punktu $r = 0$, gdzie $T = T_0$. Wtedy równanie /1/ przyjmie postać:

$$-\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right] = p \qquad /2/$$

Można to sprawdzić, obliczając z definicji wektora gradientu:

$$-k \operatorname{grad} T(x,y) = -k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}\right),$$

gdzie: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wówczas otrzymamy:

$$-k \operatorname{grad} T(x,y) = -k\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial T}{\partial r}$$

Następnie z definicji operatora dywergencji obliczamy:

$$\operatorname{div} f/r/ \frac{\vec{r}}{r} = \operatorname{div}\left[f\,/r/x,y/\ \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]$$, co daje:

$$\operatorname{div} f/r/ \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + f\right) = \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\ /rf/$$

Podstawiając do tej tożsamości $f = -k\frac{\partial T}{\partial r}$ i przyrównując do p otrzymamy równanie /2/.

Rozwiążmy równanie /2/ w interesującym nas przypadku: $T = T\,/r/$ oraz $T\,/0/ = T_o$.

Całkując otrzymamy

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{pr^2}{2k} + C$$

$$T/r/ = -\frac{pr^2}{4k} + C\ln\frac{1}{r} + C$$

Ponieważ w $r = 0$ $T = T_o$, stała C musi być równa zeru oraz $C = T_o$. Ostatecznie:

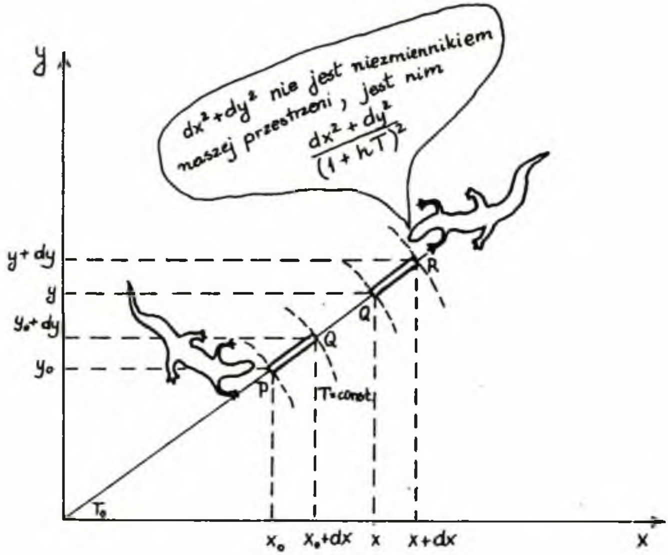
$$T/r/ = -\frac{pr^2}{4k} + T_o \qquad /3/$$

2. MODEL GEOMETRYCZNY PRZESTRZENI FIZYCZNEJ SALAMANDER

Geometrzy na rozgrzanej płycie mogą wykonywać pomiary odległości za pomocą taśm mierniczych. Pomiar polega na tym, że doprowadzają pręt mierniczy do stanu równowagi cieplnej z płaszczyzną rozgrzanej płyty i stwierdzają koincydencję. Ponieważ twory na płycie nie dysponują inną metodą pomiaru, ten sposób pomiaru będzie wyznaczał strukturę ich przestrzeni fizycznej. Swoje badania będą opierać na podstawowej formie kwadratowej ds^2 - odległości pomiędzy dwoma nieskończenie bliskimi punktami P /x,y/, Q /x + dx, y + dy/, fundamentalnym niezmienniku ich przestrzeni. Uwzględniając własności fizyczne prętów mierniczych /skrócenie lub rozszerzanie/, możemy go zapisać w postaci:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{/1 + hT/^2} \qquad /4/$$

Gdyby pręty miernicze nie wykazywały zmian długości pod wpływem temperatury, otrzymalibyśmy $ds^2 = dx^2 + dy^2$, tj. tak jak w przypadku euklidesowym. Ponieważ element o długości ds zmienia się o czynnik $\frac{1}{1 + hT}$, otrzymujemy związek /4/. /Rys. 1/.



Rys. 1. Płaszczyzna rozgrzanej płyty oglądana z zewnątrz.

Dowolną przestrzeń o metryce /4/ będziemy nazywać modelem geometrycznym przestrzeni fizycznej salamander.

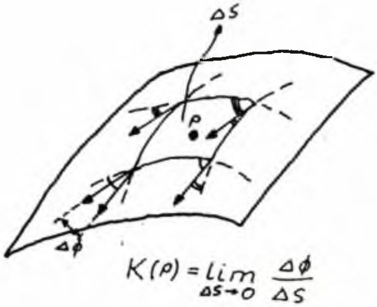
Za pomocą prętów mierniczych geometrzy będą ustalać najkrótsze odległości pomiędzy punktami - tzw. geodezyjne. Podstawową wielkością charakteryzującą geometrię wewnętrzną świata salamander jest tzw. krzywizna Riemanna. O ile współczynniki przy dx^2, dy^2 określające wszystkie wewnętrzne własności przestrzeni zależą od układu współrzędnych, o tyle istnieje dokładnie jedna wielkość powiązana z tymi współczynnikami oraz ich pochodnymi niezależna od układu współrzędnych, charakteryzująca geometrię wewnętrzną, jest nią krzywizna Riemanna. W przypadku metryki posiadającej ogólną postać:

$$ds^2 = f\,/x,y/\,/dx^2 + dy^2/$$

krzywizna Riemanna jest równa:

$$K = -\frac{1}{2f}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} \qquad /5/$$

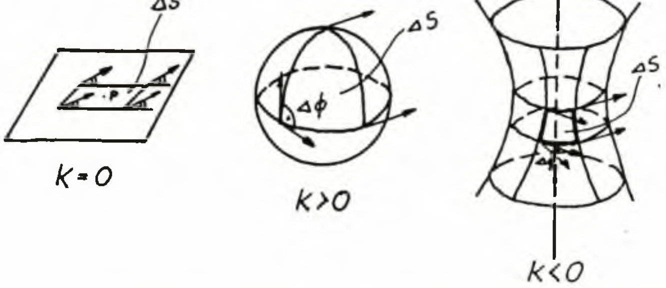
Wielkość K posiada prostą interpretację geometryczną. Wyobraźmy sobie pewien fragment powierzchni S. Określmy przeniesienie równoległe wektora stycznego do powierzchni wzdłuż geodetyki w ten sposób, że punkt zaczepienia porusza się wzdłuż geodetyki, a sam wektor przemieszcza się w sposób ciągły, tak że kąt, jaki tworzy on z geodetyką i jego długość pozostają bez zmian. /Rys. 2/.



Rys. 2. Konstrukcja przeniesienia równoległego na S.

W ten sposób postępując możemy dokonać przemieszczenia wektora wzdłuż granicy nieskończenie małego równoległoboku ograniczającego powierzchnię ds, aproksymując dowolną krzywą ograniczającą powierzchnię ds geodezyjnymi. Otrzymamy przemieszczenie wzdłuż granicy dowolnego nieskończenie małego brzegu obszaru dS. Wtedy stosunek różnicy kątów, jakie tworzył ten wektor pierwotnie i po przemieszczeniu /kąt obrotu $\Delta \Phi$ / do wielkości obszaru dS, gdy dS $\to$ 0, jest stałą wielkością definiowaną jako krzywizna K /P/. Jeśli powyższą konstrukcję przeprowadzić na płaszczyźnie uzyskamy kąt obrotu $\Delta \Phi = 0$, na sferze $\Delta \Phi > 0$, na powierzchni siodłowej $\Delta \Phi < 0$. Oznacza to, że płaszczyzna posiada zerową krzywiznę, sfera - dodatnią, natomiast powierzchnia typu siodła - ujemną /Rys. 3/.

$$K_P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta S}$$



Rys. 3. Powierzchnie o zerowej dodatniej i ujemnej krzywiźnie.

Określmy teraz krzywiznę K dla metryki /4/ ze związku /5/, podstawiając wcześniej:

$$ds^2 = W^4 /dx^2 + dy^2/; \ W^2 = /1 + hT/^{-1} \qquad /6/$$

otrzymamy:

$$K = - \frac{1}{2W^4} \Delta \ln W^4 = - \frac{2}{W^4} \left\{ \frac{1}{W} \Delta W - \frac{1}{W^2} /\mathrm{grad}\ W/^2 \right\}$$

Dla małych gradientów temperatury wyrażenie to przechodzi w:

$$K = - \frac{2}{W^5} \Delta W \qquad /7/$$

Wyrażając krzywiznę za pomocą temperatury otrzymamy:

$$K = /1 + hT/\ h \Delta T - h^2 /\mathrm{grad}\ T/^2$$

Po wstawieniu /1/ otrzymujemy:

$$K = - /1 + hT/ \frac{hp}{k} - \frac{h^2}{k^2} |\Phi|^2 \qquad /8/$$

Z zależności /8/ wynika, że w przypadku dowolnego dwuwymiarowego rozkładu temperatury T = T/x,y/ krzywizna K przestrzeni zależy od gęstości powierzchniowej energii cieplnej p i szybkości zmian temperatury wzdłuż r.

Dla przypadku sferycznie symetrycznego rozkładu temperatury danego przez /4/ otrzymamy:

$$K = - \frac{hp}{k} /1 + hT_o/ \qquad /9/$$

Z /9/ wynika, że przestrzeń fizyczna salamander jest przestrzenią o stałej krzywiźnie zależnej od stałych h, p, k oraz T_o. Jeśli temperatura T wolno zmienia się z odległością $|\vec{\Phi}|^2 \sim \left|\frac{\partial T}{\partial r}\right|^2$ możemy zaniedbać i otrzymamy:

$$K = - /1 + hT/ \frac{hp}{k}$$

I teraz krzywizna przestrzeni zależy od punktu. Przestrzeń nie posiada stałej krzywizny.

O tym że dla sferycznie symetrycznego rozkładu temperatury geometria wewnętrzna powierzchni z metryką /4/ jest geometrią przestrzeni o stałej krzywiźnie, możemy się przekonać również w następujący sposób. Zanurzamy w płaskiej trójwymiarowej przestrzeni sferę o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Odległość ds^2 pomiędzy dwoma nieskończenie bliskimi punktami tej przestrzeni jest określona przez formę:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad /10/$$

Aby określić odległość ds^2 pomiędzy punktami sfery, narzucamy warunek leżenia punktów na sferze /pseudosferze, jeśli α zespolone/: $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$. Określając z tego związku $dz = -\frac{xdx + ydy}{z}$ /po zróżniczkowaniu/ i po podstawieniu współrzędnych biegunowych otrzymujemy:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{d - \frac{r^2}{\alpha^2}} + r^2 d\emptyset^2 \qquad /11/$$

gdzie podstawiono: $x = r\cos\emptyset \qquad 0 \leqslant r \leqslant \infty$

$y = r\sin\emptyset \qquad 0 \leqslant \emptyset \leqslant 2\pi$

Dla sfery krzywizna Riemanna $K = \frac{1}{\alpha^2}$, dla pseudosfery $K = -\frac{1}{\alpha^2}$, dla płaszczyzny $K = 0$. Ogólnie mamy:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\emptyset^2 \qquad /12/$$

	$K > 0$	przestrzeń sferyczna
gdy	$K = 0$	przestrzeń płaska
	$K < 0$	przestrzeń hiperboliczna

Metrykę /12/ możemy sprowadzić do innej postaci. Jeśli wprowadzimy nową zmienną $\tilde{r}$: $r = \frac{\tilde{r}}{1 + \frac{\tilde{r}K}{4}}$, wtedy otrzymamy:

$$ds^2 = \frac{d\tilde{r}^2 + r^2\, d\emptyset^2}{/1 + \frac{K}{4}\tilde{r}^2/} \qquad /13/$$

Podstawiając do /13/ zależność /9/ oraz zamieniając $\tilde{r}$ na r : $\tilde{r} = \frac{hp}{k/K/}\, r$, otrzymujemy metrykę /4/.

Zachodzi tak dlatego, ponieważ dla dwóch przestrzeni o tej samej krzywiźnie K oraz tego samego wymiaru i sygnaturze jednakowych znaków przed współczynnikami formy jednakowej przestrzennie zawsze istnieje lokalnie przekształcenie izometryczne jednej na drugą. Stąd metryka /13/ reprezentuje ogólny przypadek metryki przestrzeni 2-wymiarowej o stałej krzywiźnie K oraz sygnaturze /+ +/. Wystarczy więc skonstruować dowolny jej przykład, aby zagadnienie rozwiązać dostatecznie ogólnie.

3. WŁASNOŚCI ŚWIATA SALAMANDER

Będziemy się teraz zajmować bliżej własnościami świata salamander o stałej krzywiźnie K danej z /9/.

Jeśli krzywizna K jest ujemna metrykę /12/ możemy sprowadzić do postaci:

$$ds^2 = R^2 /d\chi^2 + \sin^2\chi \, d\phi^2/ \qquad /14/$$

gdzie: $R = /-K/^{-\frac{1}{2}}$

oraz $\tan h \frac{1}{2}\chi = \frac{r}{2R}$

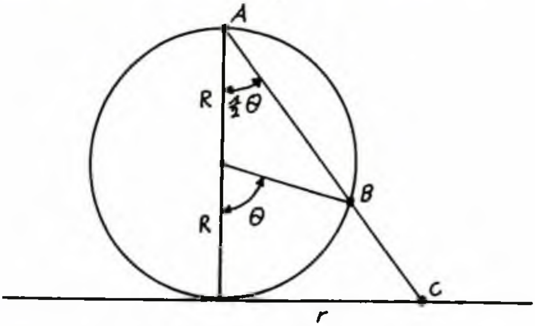
Natomiast jeśli K jest dodatnie

$$ds^2 = R^2 /d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2/ \qquad /15/$$

gdzie: $R = K^{-\frac{1}{2}}$

oraz $\quad \mathrm{tg} \frac{1}{2}\Theta = \frac{r}{2R}$

Wielkość R w związku /15/ możemy interpretować jako promień wszechświata. Geometria opisana metryką /15/ jest geometrią sferyczną, natomiast opisana metryką /14/ geometrią hiperboliczną. Transformacja /15/ jest rzutem stereograficznym punktu B na sferze na punkty płaszczyzny /Rys. 4/. Przestrzeń w metryce /15/ posiada skończoną powierzchnię $S = 4\pi R^2$, chociaż jest nieograniczona: salamandry poruszając się po niej, nigdy nie trafią na jej granicę. Przestrzeń określona metryką /14/



Kąt Θ zmienia się od $-\pi$ do π, kąt ϕ zmienia się od 0 do 2π. Kąty są mierzone we współrzędnych biegunowych.

Rys. 4. Rzut stereograficzny sfery na płaszczyznę.

4. ZGEOMETRYZOWANA FIZYKA NA ROZGRZANEJ PŁYCIE

Równanie /8/ ustala odpowiedniość pomiędzy krzywizną przestrzeni a rozkładem temperatur i gęstością energii. Geometryzacja w ścisłym tego słowa znaczeniu oznacza odpowiedniość pomiędzy geometrią przestrzeni /czasoprzestrzeni/ a parametrami energetycznymi. Lewa strona zgeometryzowanego równania reprezentuje pewną wielkość skonstruowaną ze współczynników formy kwadratowej, natomiast prawa gęstość energii itp. Załóżmy dla uproszczenia, że rozkład temperatury jest taki, że funkcja T/r/ bardzo wolno zmienia się z odległością, tj. możemy posłużyć się przybliżeniem /7/.
Wtedy otrzymamy:

$$K = -\frac{2}{W^5}\,\Delta W = -/1+hT/\,\frac{hp}{k} = -\frac{1}{W^2}\,\frac{hp}{k}$$

$$ds^2 = W^4\,/dx^2 + dy^2/; \qquad W^2 = /1 + hT/^{-1}$$

Związki te możemy przepisać, przeliczając gęstość energii p w metryce $ds^2 = dx^2 + dy^2$ na gęstość powierzchniową energii w metryce /6/, tj.

$$q = \frac{dQ}{dS} = \frac{dQ}{\sqrt{W^4 \cdot W^4}\;dx\,dy} = \frac{p}{W^4}$$

Wtedy otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta W &= \tfrac{1}{2}\,W^7\,\frac{hq}{k} \\ ds^2 &= W^4\,/dx^2 + dy^2/ \qquad\qquad /16/ \\ W^2 &= /1 + hT/^{-1} \end{aligned}$$

Równania /16/ są równaniami zgeometryzowanej teorii przewodnictwa. Zgeometryzowana teoria ma tę zaletę w porównaniu z klasyczną, że jest ściśle powiązana z procedurą pomiarową w świecie salamander.

Równania /1/ możemy również wyprowadzić z zasady wariacyjnej. Wystarczy wybrać na funkcję gęstości Lagrange'a funkcję o postaci:

$$Z = -\frac{p}{k}\,T + \frac{1}{2}\,/\nabla T/^2$$

Wówczas równania Eulera-Lagrange'a:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{\partial Z}{\partial(\partial T/\partial x_k)} = \frac{\partial Z}{\partial T}$$

prowadzą do równania /1/, jeśli podstawimy $\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} = -\frac{P}{k}$

Zapiszmy równania /16/ zgeometryzowanej teorii przewodnictwa w postaci wariacyjnej. Wystarczy wybrać Z' o postaci:

$$Z' = \frac{1}{2} /\nabla W/^2 - \frac{1}{2} W^8 \frac{hp}{k}$$

Gęstość Lagranzjanu odniesiona do metryki $ds^2 = W^4 /dx^2 + dy^2/$ wynosi: Z'/W^4. Ostatecznie otrzymujemy:

$$Z = \frac{1}{2W^4} /\nabla W/^2 - \frac{1}{2} W^4 \frac{hp}{k}$$

$$ds^2 = W^4 /dx^2 + dy^2/ \qquad /17/$$

Równania /17/ są bazą kanonicznego formalizmu zgeometryzowanej teorii przewodnictwa.

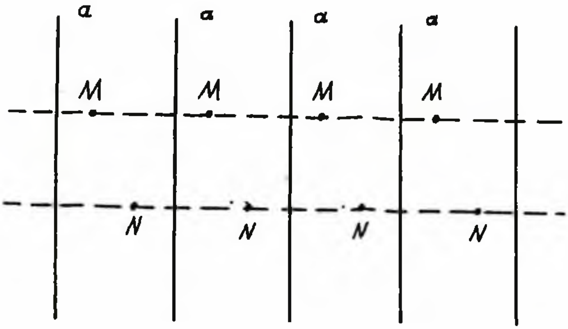
4. PROBLEMY GLOBALNE KOSMOLOGII SALAMANDER

Wcześniejsze rozważania pokazały, że struktura geometryczna świata salamander jest określona przez fundamentalną formę kwadratową ds^2. Forma ta określa strukturę lokalną ich świata. Ta sama forma kwadratowa ds^2 określi nam płaszczyznę, płaszczyznę zwiniętą w walec itp., a dzieje się tak dlatego ponieważ posiadamy swobodę w określeniu struktury topologicznej. Mówiąc obrazowo możemy wykonywać różne deformacje powierzchni, takie jak rozciągania, ściskania, bylebyśmy nie dokonywali rozrywań czy sklejeń. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że dwie formy kwadratowe uważamy za równoważne, jeśli posiadają one ten sam typ różniczkowy, tj. jeśli dopuszczają istnienie wzajemnie jednoznacznego i w obie strony ciągłego odwzorowania jednej przestrzeni na drugą, czyli istnienie tzw. homeomorfizmu.

Oprócz klasyfikacji przestrzeni o stałej krzywiźnie ze względu na znak krzywizny, możemy dokonać podziału na przestrzenie zwarte /z każdego pokrycia przestrzeni można wybrać podpokrycie skończone/ oraz otwarte /przestrzeń, która nie jest zwarta/. Przykładem przestrzeni zwartej jest sfera, torus, niezwartej - płaszczyzna.

Aby to dokładniej zilustrować, rozważmy nierównoważne, z topologicznego punktu widzenia, formy przestrzeni o stałej krzywiźnie. Podzielmy zatem płaszczyznę zbiorem prostych równoległych $\{a\}$ na jednakowe paski i określmy pewien kierunek na płaszczyźnie, na przykład prostopadły do układu prostych

$\{a\}$. Wybierzmy w dowolnym z obszarów pewien punkt M. Przesuwając wydzielony obszar między prostymi możemy go nałożyć na dowolny inny pasek; punkt M zajmie wtedy nowe położenie, które oznaczymy również przez M. Zbiór wszystkich punktów otrzymanych z M w ten sposób oznaczmy przez M . Potraktujmy teraz zbiór punktów M jako element pewnej nowej przestrzeni R. W zbiorze R możemy wprowadzić metrykę:



Rys. 5. Konstrukcja walca z płaszczyzny.

ϱ /x,y/; x = $\{M\}$, y = $\{N\}$ tak, że ϱ /x,y/ jest równe minimalnej odległości euklidesowej pomiędzy punktami zbioru $\{M\}$ i punktami zbioru $\{N\}$. Łatwo się przekonać, że metryka ϱ /x,y/ spełnia aksjomaty metryki. Funkcja ϱ /x,y/ została tak zdefiniowana, że dostatecznie małe ε - otoczenie dowolnego punktu x = $\{M\}$ przestrzeni R jest izometryczne z ε - otoczenia punktu na płaszczyźnie euklidesowej. Całą tę konstrukcję możemy sobie wyobrazić jako nawijanie płaszczyzny na walec w taki sposób, że cały pasek tworzy powierzchnię boczną walca.

Idąc podobną drogą można znaleźć inne warianty topologiczne przestrzeni o zerowej krzywiźnie. Wniosek, jaki narzuca się po tych uwagach, jest następujący: w naszym opisie struktury geometrycznej przestrzeni tkwi pewna nieoznaczoność globalnych własności przestrzeni.

5. KOSMOLOGIA SALAMANDER A KOSMOLOGIA ISTOT ZIEMSKICH

Ambicją kosmologów ziemskich jest zbudowanie nauki o globalnej strukturze i ewolucji wszechświata. W skali globalnej kosmosu fundamentalną rolę odgrywają oddziaływania grawitacyjne. Teorią opisującą świat w dużej skali jest ogólna teoria względności, która jest w istocie teorią grawitacji.

Na rozgrzanej płycie fundamentalną rolę odgrywają procesy cieplne. Teorią opisującą świat salamander jest zgeometryzowana teoria przewodnictwa. Zadanie zbudowania nauki o globalnej strukturze wszechświata okazało się zamierzeniem zbyt ambitnym chociażby ze względu na nieoznaczoność własności topologicznych. Powiedzielibyśmy raczej, że dysponujemy wiedzą o wielkoskalowej strukturze świata. Dotyczy to zarówno kosmologii salamander, jak i kosmologii istot ziemskich. W metodzie pomiaru jesteśmy ograniczeni przez skończoną wartość prędkości światła. Dlatego nasz świat posiada lokalnie strukturę stożkową. Modelami wszechświata są pewne przestrzenie /czasoprzestrzenie/ z określoną formą kwadratową ds^2, której współczynniki są powiązane równaniami pola ogólnej teorii względności. Równania te ustalają odpowiedniość pomiędzy geometrią a rozkładem mas, energią. Modelem świata salamander jest również pewna przestrzeń dwuwymiarowa z zadaną formą kwadratową ds^2 wyznaczoną poprzez metodę pomiaru za pomocą prętów mierniczych, które wykazują własność rozszerzalności. Lokalnie spełnione są równania zgeometryzowanej teorii przewodnictwa. Zarówno równania pola, jak i równania tej teorii dają się wyprowadzić z zasady wariacyjnej. Do tego momentu analogia jest dość wyraźna i świadczyć to może o dydaktyczności przykładu. Istnieją jednak pewne zasadnicze różnice we własnościach obu światów. Świat salamander jest konstrukcją statyczną, natomiast świat istot ziemskich wykazuje wielkoskalowy ruch galaktyk. Świat salamander jest wieczny, natomiast świat istot ziemskich przeżywał w trakcie swojej ewolucji stan osobliwy.

Na zakończenie zwróćmy jeszcze uwagę na następujący fakt. Geometria jako dział matematyki jest nauką czysto formalną i nie odnosi się do rzeczywistości. Natomiast model geometryczny /geometria zinterpretowana fizycznie/ przestaje być działem matematyki, stając się dziedziną fizyczną podlegającą empirycznemu sprawdzeniu. Według konwencjonalizmu Poincare'go wybór geometrii jest czystą konwencją, możemy bowiem zakładać prostą geometrię i wtedy prawa fizyki są bardziej skomplikowane albo odwrotnie - formułować proste prawa na tle bardziej skomplikowanej geometrii.

Pogląd taki wydaje się być błędny. Tak samo w przypadku rozgrzanej płyty, jak i ogólnej teorii względności za pomocą reguł pomostowych dokonujemy fizycznej interpretacji geometrii. A ta podlega empirycznej weryfikacji i określa problematykę kosmologii obserwacyjnej.