

PAWEŁ TURKOWSKI

## ILE WYMIARÓW MA WSZECHŚWIAT?

Na początku XX w. holenderski matematyk Brouwer przedstawił dowód topologicznej nierównoważności przestrzeni euklidesowych  $E^n, E^m$  dla  $n \neq m$  /1, 2/. Dowód Brouwera potwierdza naszą intuicję dotyczącą zasadniczej różnicy pomiędzy tymi przestrzeniami i nadaje sens poszukiwaniom dobrej definicji charakterystyki topologicznej zwanej wymiarem topologicznym. Taka właściwie określona definicja powinna gwarantować równość wymiaru dwu figur homeomorficznych. Powyższy postulat udało się zrealizować, /3, 4/ a teoria wymiaru rozrosła się dzisiaj do roli samodzielnego działu matematyki, który obejmuje zakresem swych badań różnorodne klasy przestrzeni i posługuje się kilkoma, starannie dobranymi, definicjami wymiaru /wymiar dim, ind, Ind i inne/ /5, 6, 7/. W przypadku przestrzeni metrycznych definicje wymiarów dim, ind i Ind są równoważne.

W ciągu ostatnich siedemdziesięciu lat przestrzenie metryczne zrobiły ogromną karierę w kosmologii, służąc jako twory do konstrukcji modeli Wszechświata. Ciągłość procesów zachodzących w przyrodzie nasuwa hipotezę, iż przestrzeń Wszechświata, jeśli nawet nie jest niezmienna, może być modelowana jako szereg płynnie następujących po sobie figur homeomorficznych. Zatem jej wymiar, jakikolwiek jest, powinien stanowić trwałą cechę przestrzeni. W przeciwieństwie do innych bardziej subtelnych charakterystyk geometrycznych, cecha ta jest lokalna - wymiar z zasady może być sprawdzony w ziemskim laboratorium. Wszystkie tego rodzaju pomiary potwierdzają przestrzenną trójwymiarowość Wszechświata. Dla przykładu: łańcuch zauważyć, że trójwymiarowa śruba obracana w czterowymiarowej przestrzeni nie zachowywałaby swojej skrętności. Pomiaru oparte na tak prostej zasadzie nie pozwalają jednak sięg-

nać głębiej niż na odległości rzędu rozmiarów molekuł:  $10^{-9}$  m. Inne, mniej bezpośrednio doświadczalne, polegające na interpretacji wyników zdarzeń cząstek elementarnych umożliwiającą dziś dostęp do odległości sięgających  $10^{-17}$  m i także nie wykazują zmian własności przestrzeni: operacyjnie zdefiniowany wymiar przestrzeni fizycznej jest, w zakresie dostępnych eksperymentom odległości, równy trzy.

W 1921 r. Teodor Kaluza odkrył zadziwiającą możliwość wyprowadzania skomplikowanych praw teorii grawitacji Einsteina i elektromagnetyzmu Maxwella, obowiązujących w przyrodzie trójwymiarowej, z prostej pojęciowo teorii, budowanej na przestrzeni o większej liczbie wymiarów. Rachunek Kaluzy można traktować jako wybieg matematyczny, można też nadawać dodatkowym wymiarom status realności, a ich nieobserwowalność tłumaczyć naszymi niedostatecznymi możliwościami eksperymentalnymi. Istnieją podstawy by przypuszczać, że w takim eksperymencie trzeba sięgnąć do odległości rzędu tzw. długości Plancka  $hG/2\pi c^3/1/2 = 1.6 \times 10^{-35}$  m. W tej sytuacji cennym sprawdzianem koncepcji realnych dodatkowych wymiarów Wszechświata jest pomysł powiązania jej z kosmologią określaną mianem kosmologicznej redukcji wymiarowej.

Przestrzeń fizyczna Wszechświata posiada nie tylko określoną strukturę geometryczną, lecz co więcej podlega ewolucji, zmieniając swoje rozmiary. Ewolucją przestrzeni rządzą równania dynamiczne wiążące jej cechy metryczne z materialną zawartością świata. Według propozycji Chodosa i Detweilera /8/, wczesny Wszechświat był wielowymiarowy, a równania einsteinowskie zmusiły go do przyjęcia postaci pozornie trójwymiarowej. Realizacja tego scenariusza wiązałaby, być może, w jedną całość bardzo odległe zdarzenia, które zaszły w prehistorycznym okresie Wszechświata, niedostępnym w żadnej bezpośredniej obserwacji, z własnościami, które ujawnia dzisiaj.

Trójwymiarowość i wysoką izotropię dzisiejszego świata Chodos i Detweiler w swej oryginalnej pracy uzyskali, wybierając arbitralnie bardzo szczególny /1 + 4/-wymiarowy model kosmologiczny. Wyrzucili przy tym nadzieję, że wybór ten będzie mógł być usprawiedliwiony dzięki dalszym badaniom. Po przebadaniu różnorodnych modeli kosmologicznych okazało się, że sam efekt "znikania" pewnej liczby wymiarów przestrzennych nie jest czymś wyjątkowym /9, 10, 11, 12/. Gdy odległość pomiędzy punktami, mierzona w pewnym kierunku, rośnie wraz z upływem

czasu, równania Einsteina zmuszają przestrzeń do kurczenia się wzdłuż innego kierunku. Proces ten można sobie wyobrazić jako rozciąganie doskonale elastycznej rurki, powodujące wzrost jej długości i jednocześnie malenie średnicy. Zmiany kształtu przestrzeni zachowują jej wymiar dopóki nie dojdzie do czegoś w rodzaju sklejenia rurki w nitkę o zerowej średnicy. Przypuszcza się jednak, że do takiego zupełnego skurczenia się dodatkowych wymiarów nie doszło, lecz ich rozmiary zostały ustabilizowane na małym poziomie.

Jeśli źródło samej redukcji liczby wymiarów leży gdzieś w równaniach Einsteina, to istnieją niewątpliwie uzależnienia jej efektów od: /a/ symetrii nałożonych na przestrzeń podlegającą ewolucji, /b/ krzywizny podprzestrzeni tworzących całą ewoluującą przestrzeń, /c/ rodzaju materii wypełniającej model. Oprócz samej możliwości pozornej zmiany liczby wymiarów przestrzeni, przez rozszczepienie jej na dwie podprzestrzenie charakteryzujące się zupełnie różnymi skalami rozmiarów, nie mniej interesujące są odpowiedzi na pytania dotyczące własności takiej asymetrycznej przestrzeni. Można sformułować następujące problemy. /A/ Czy model Friedmana może być w naturalny sposób realizowany przez wielowymiarowe równania Einsteina? /B/ Jaki jest mechanizm stabilizujący rozmiary dodatkowych wymiarów ma małym, lecz niezerowym poziomie? Przekonywające odpowiedzi udzielone na pytania /A/ i /B/ zwiększyłyby poziom zaufania, którym obdarzana jest koncepcja wielowymiarowego Wszechświata. Omówimy pokrótce kolejno punkty /a/-/c/, /A/ i /B/.

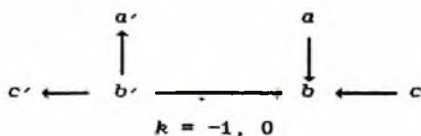
/a/ Brak jest wyników dotyczących problemu ewolucji wielowymiarowych przestrzeni niesymetrycznych. Przestrzenie symetryczne charakteryzowane są przez liczbę i wzajemne relacje pomiędzy tzw. wektorami Killinga. Istnieją częściowe klasyfikacje takich przestrzeni /13, 14/. Niezależnie od założonej symetrii przestrzeni istnieje wyraźna tendencja rozdzielania się przestrzeni w trakcie ewolucji na część ekspandującą i kurczącą się /9, 10, 11, 12, 15/. Trudno jednak wyjaśnić w ten sposób liczbę dodatkowych wymiarów.

/b/ W standardowym friedmanowskim modelu makroprzestrzeni  $M^3$  o symetrii Robertsona-Walkera uzupełnionym dodatkową przestrzenią  $S^n$  o symetrii wielowymiarowej sfery istnieje wyraźna zależność przebiegu ewolucji od założonej uprzednio krzywizny przestrzeni  $M^3$ . Efekt ten ilustruje następujący diagram /11/:



$k$  - oznacza stałą krzywizny przestrzeni  $M^3$ ,  $a, b'$  - oznaczają dwa dozwolone początkowe stany ewolucji Wszechświata,  $a', b$  - dwa dozwolone końcowe stany ewolucji, przy czym stan końcowy  $b$  realizuje znikanie dodatkowej podprzestrzeni  $S^n$  i wzrost wymiarów przestrzeni  $M^3$ ; stan  $a'$  realizuje tendencję odwrotną. Strzałka wskazuje bieg ewolucji. Dla przypadku  $k = 0, 1$  ewolucja kończąca się stanem  $b$  jest tak samo możliwa, jak ewolucja w kierunku stanu  $a'$ . W przypadku przestrzeni Robertson-Walkera o stałej ujemnej krzywiznie  $/k = -1/$  stan końcowy  $b$  jest wyróżniony. Wynik ten nie zależy od wymiaru dodatkowej przestrzeni  $S^n$ .

/c/ Wypełnienie modelu materią modyfikuje równania ewolucji zwiększając liczbę możliwych typów ewolucji. Dla przykładu efekt materii promienistej na ewolucję modelu omówionego w punkcie /b/ ilustruje poniższy diagram /12/:



Jak widać, pojawia się nowy, dodatkowy stan początkowy  $c'$  i końcowy  $c$ , przy czym końcowy stan ewolucji  $b$  pozostaje nadal wyróżniony. Wynik ten, podobnie jak w omawianym wyżej punkcie /b/, nie zależy od wymiaru sfery  $S^n$ .

/A/ W prostych modelach omówionych powyżej model Friedmana jest "wbudowany" w rozważania od początku. Istnieje bardzo niewiele wskazówek co do możliwości wykonienia się takiego modelu z innej przestrzeni, np. o mniejszej symetrii.

W szczególności mechanizm izotropizacji takiej przestrzeni, związany z obecnością i kurczeniem się dodatkowych wymiarów, jest mało wydajny lub w ogóle nie istnieje /12/.

Uwzględnienie efektów kwantowych pozwala uzyskiwać interesujące odpowiedzi na pytanie /B/. Ponadto wiadomo, że klasyczne wyjaśnienie problemu stabilizacji rozmiarów także jest możliwe /13/.

W świetle tego co powiedziano wyżej kosmologia einsteińska jest zgodna z koncepcją dodatkowych wymiarów Wszechświata, jednak nie wyróżnia ich liczby. Z drugiej strony, współczesne modele oddziaływań i cząstek elementarnych preferują pewne liczby wymiarów przestrzennych Wszechświata, np. 9, 10, 25 /16, 17/, trudno jednak dzisiaj wskazać, która z tych propozycji jest najlepsza. Zatem we współczesnych badaniach kosmologicznych wymiar często traktowany jest jako parametr, którego wartość zostanie ustalona w przyszłości. W modelach prezentujących bardzo wczesne, nieeinsteińskie etapy ewolucji kosmosu podejmowane są także próby odejścia od równań Einsteina. Wszystkie te próby stawiają sobie ambitny cel: jednoznaczne odtworzenie historii samego początku świata.

#### WHAT IS THE DIMENSION OF THE UNIVERSE?

##### S u m m a r y

We discuss the concept of dimension in its mathematical and cosmological bearings. According to Kaluza-Klein and superstring theories the Universe is fully  $N$ -dimensional /with  $N > 3$ / but all except three spatial dimensions are confined to sizes close to the Planck length. As the energies necessary to probe the extra spatial dimensions are not attainable in terrestrial accelerators, it is natural to use the Big Bang to study the effect of extra dimensions. The particular cosmology we present here is the /Friedman-Robertson-Walker/  $x/n$ -sphere/ universe. The cosmological evolution of such a world with  $n + 3$  spatial dimensions can be studied using higher-dimensional extensions of general relativity. It turns out that, within the class of both vacuum and radiation filled models, the qualitative features of the universe do not depend on the specific number of dimensions and, particularly, the cosmological dimensional-reduction occurs, i.e., the universe passess from multi-dimensional phase to the Friedman-like one. However, at present there is no theoretical explanation why just three dimensions have expanded to a large size.

#### LITERATURA

1. B r o u w e r L.: Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. "Mathematische Annalen" 70:1911 s. 161-165.
2. B r o u w e r L.: Über den natürlichen Dimensionsbegriff. "Journal für die reine und angewandte Mathematik" 142:1913 s. 146-152.
3. U r y s o h n P.: Les multiplicités canotriennes. "Comptes



- Rendus de l'Academie Paris" 175:1922 s. 440-442.
4. M e n g e r K.: Über die Dimension von Punktmengen. "Monatshefte für Mathematik und Physik" 33:1923 s. 148-160.
  5. H u r e w i c z W., W a l l m a n H.: Dimension theory. Princeton 1948.
  6. E n g e l k i n g R.: Teoria wymiaru. Warszawa 1981.
  7. E l u s z k i e w i c z J., C i e p l a k M.: Błądzenie przypadkowe na fraktalach. "Postępy Fizyki" 37:1986 s. 409-434.
  8. C h o d o s A., D e t w e i l e r A.: Where has the fifth dimension gone? "Physical. Review." D 21:1980 s. 2167-2170.
  9. S a h d e v D.: Towards a realistic Kaluza-Klein Cosmology. "Physics Letters" 137 B:1984 s. 155-159.
  10. D e m i a ń s k i M., G o l d a Z., H e l l e r M., S z y d ło w s k i M.: The dimensional reduction in a multidimensional cosmology. "Classical and Quantum Gravity" 3:1986 s. 1199-1205.
  11. T u r k o w s k i P., M a ś l a n k a K.: Phase space classification of Kaluza-Klein cosmologies. "General Relativity and Gravitation" 19:1987.
  12. T u r k o w s k i P.: A multidimensional radiation filled universe. "General Relativity and Gravitation". Przedstawione do druku.
  13. D e m i a ń s k i M., G o l d a Z., S o k o ło w s k i L. M., S z y d ło w s k i M., T u r k o w s k i P.: The group theoretical classification of the 11-dimensional classical homogeneous Kaluza-Klein cosmologies. "Journal of Mathematical Physics" 28:1987 s. 171-174.
  14. T u r k o w s k i P.: Classification of Multidimensional Cosmologies. "General Relativity and Gravitation". Przedstawione do druku.
  15. T o m i m a t s u A., I s h i h a r a H.: Dimensional reduction in an oscillatory Kaluza-Klein cosmology. "General Relativity and Gravitation" 18:1986 s. 161-171.
  16. G r e e n M.: Unification of forces and particles in superstring theories. "Nature" 314:1985 s. 409-414.
  17. E l l i s J.: The superstring: theory of everything, or of nothing? "Nature" 323:1986 s. 595-598.