HENRYK PIERSA
Lublin

W SPRAWIE INTERPRETACJI RELACJI NIEOZNACZONOŚCI

Zasadę nieoznaczoności Heisenberga często wyraża się w formie: wśród wielkości fizycznych charakteryzujących mikroukład w danym stanie kwantowym istnieją takie pary, które jednocześnie z dowolną dokładnością nie mogą być zmierzone, choć każda z nich oddzielnie może być zmierzona dowolnie dokładnie. Iloczyn nieokreśloności (niedokładności) każdej zmiennej dynamicznej należącej do odpowiedniej pary jest rzędu stałej Plancka **h**[1].

Funkcjonowały, a w zasadzie implicite funkcjonują nadal dwie alternatywne interpretacje omawianych związków: kopenhaska i probabilistyczna. Według pierwszej z nich, niedokładności w określeniu odpowiedniej pary zmiennych dynamicznych odnoszą się do jednoczesnego pomiaru dokonanego na jednym obiekcie atomowym[2], według drugiej – winny być interpretowane jako średnie z pomiarów przeprowadzonych na całym zespole mikroobiektów, znajdujących się w takim samym stanie kwantowym.

Pierwszej próby probabilistycznej interpretacji relacji Heisenberga podjął się chyba K. R. Popper[3], wychodząc ze słusznego rozróżnienia między formułami matematycznymi a ich interpretacją fizykalną. W wyniku dość długich i zawiłych rozważań usiłuje uzasadnić tezę, według której relacje nieoznaczoności odnoszą się do pewnych rozrzutów statystycznych z wyników pomiaru przeprowadzanych na wielu mikroobiektach, znajdujących się w takich samych warunkach kwantowych. Konsekwencją filozoficzną rozważań Poppera jest teza, według której dla jednej cząstki elementarnej możliwy jest jednoczesny pomiar położenia i pędu z błędem mniejszym niż wyznaczony przez odpowiednią relację Heisenberga.

Wychodząc z innych, przede wszystkim filozoficznych założeń, za podobną interpretacją opowiedział się w latach pięćdziesiątych D. Błochincew[4].

---

[1] Por. np. L. I. S c h i f f, *Mechanika kwantowa*, tłum. Z. Rek, Warszawa 1977, s. 20.

[2] Por. np. N. B o h r, *Fizyka atomowa a wiedza ludzka*, tłum. W. Staszewski, S. Szpikowski, A. Teske, Warszawa 1963, s. 63 n.; W. H e i s e n b e r g, *Fizyka i filozofia*, tłum. S. Amsterdamski, Warszawa 1965, s. 29; M. B o r n, *Athomic Physics*, London–Glasgow 1947, s. 92 n.

[3] K. R. P o p p e r, *Logika odkrycia naukowego*, tłum. U. Niklas, Warszawa 1977, s. 176 n.

[4] D. B ł o c h i n c e w, *Podstawy mechaniki kwantowej*, tłum. P. Zieliński, Warszawa 1954, s. 57 n.

W celu rozstrzygnięcia kwestii, która z przytoczonych interpretacji jest poprawna, najrozsądniejsze jest odwołanie się do sposobów uzasadniania relacji nieoznaczoności. Okazuje się jednak, że tych sposobów jest wiele. Można je podzielić na dwie grupy: rozumowania czysto teoretyczne i rozumowania wykorzystujące różnego rodzaju doświadczenia myślowe.

Wśród rozumowań pierwszej grupy trzeba wymienić ogólny dowód, pozwalający na gruncie mechaniki kwantowej otrzymać nierówności Heisenberga dla dowolnej pary kanonicznie sprzężonych obserwabli (położenie-pęd, moment pędu-kąt), oraz różne rozumowania bardziej szczegółowe, odnoszące się przeważnie do zmiennych położenie-pęd. Do prób uzasadnienia drugiego rodzaju zalicza się różnego rodzaju doświadczenia myślowe, jak mikroskop Heisenberga, dyfrakcja cząstki na szczelinie, rozproszenie fotonu na poruszającym się elektronie (z wykorzystaniem efektu Dopplera[5]) oraz różne doświadczenia autorstwa Einsteina, podane w czasie jego dyskusji z N. Bohrem nad zasadnością zasady nieoznaczoności[6].

W dowodzie relacji Heisenberga punktem wyjścia jest nierówność:[7]

$$\langle AA^{\times}\rangle = \int |A^{\times}\Psi|^2 \quad dV \geq 0 \tag{1}$$

gdzie A i $A^{\times}$ są odpowiednio operatorem hermitowskim i operatorem z nim po hermitowsku sprzężonym, $\langle ... \rangle$ symbolizuje wartość średnią. Przedstawienie operatora A $(=A^{\times})$ w formie

$$A = \lambda F - iG, \qquad \lambda \in R \tag{2}$$

i podstawienie do wzoru (1) pozwala wyznaczyć nierówność:

$$\sqrt{\langle \Delta F^2 \rangle}\sqrt{\langle \Delta G^2 \rangle} \geq -i\,[F, G]. \tag{3}$$

Każdy z występujących po lewej stronie nierówności (3) czynników jest odchyleniem standardowym odpowiedniej obserwabli od wartości średniej, a $[F,G]$ – komutatorem operatorów F i G. Podstawiając w (3) $F=x$, $G=p_x$ lub $F=J_3$, $G=\alpha$, otrzymujemy relację nieoznaczoności odpowiednio dla współrzędnej x i x-wej współrzędnej pędu p_x lub „trzeciej” współrzędnej momentu pędu J_3 i kąta α:

$$\sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}\sqrt{\langle \Delta p_x^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \sqrt{\langle \Delta J_3^2 \rangle}\sqrt{\langle \Delta \alpha^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{4}$$

---

[5] Opisy różnych doświadczeń myślowych można znaleźć w: B ł o c h i n c e w, op. cit., s. 63 n.; A. E. R u a r k, H. C. U r e y, *Atoms, Molecules and Quanta*, New York–London 1930, s. 617 n.

[6] Por. B o h r, op. cit., s. 67 n.

[7] Por. np. B. S r e d n i a w a, *Mechanika kwantowa*, Warszawa 1981, s. 54 n; B o r n, op. cit., s. 330-331; B ł o c h i n c e w, op. cit., s. 60-62.

W rozumowaniu, którego rezultatem są nierówności (3), na formę analityczną funkcji falowej nie nakładano żadnych ograniczeń, żądając tylko, aby spełniała ona równanie Schrödingera.

Przy innych sposobach uzasadniania tylko pierwszej z nierówności (4) wykorzystuje się najczęściej gaussowską postać funkcji Ψ (opisującą paczkę falową)[8]. W tych przypadkach Δx jest rozumiane jako szerokość połówkowa paczki falowej, a Δp_x (lub Δk_x – współrzędna x-wa wektora falowego) dla jednej cząstki jest obliczane.

Do dwu najczęściej przytaczanych doświadczeń myślowych: dyfrakcji elektronu na szczelinie i doświadczenia z mikroskopem, ustosunkowałem się w innym artykule[9]. Wykazałem tam, że zakres stosowalności pierwszej nierówności (4) otrzymanej na podstawie doświadczenia dyfrakcyjnego jest ograniczony, natomiast wykorzystywanie do jej uzasadniania doświadczenia z mikroskopem jest niedopuszczalne. To samo stwierdzenie trzeba powtórzyć w odniesieniu do doświadczenia z rozproszeniem fotonu na poruszającym się elektronie z wykorzystaniem efektu Dopplera. Zdaniem wielu fizyków, argumentacja na podstawie doświadczeń myślowych za słusznością nierówności (4) ma pełnić bardziej funkcję heurystyczną lub ilustracyjną niż dowodową. Tę ostatnią funkcję pełni dowód formalny, którego szkic podano na początku. Z tego względu przeanalizujemy dokładnie jego najważniejsze przesłanki.

Oprócz oczywistej przesłanki (1), zakładanej w dowodzie nierówności (3) *explicite* lub *implicite* wykorzystuje się:

(a) fizykalną interpretację wyrażenia $\rho=\Psi^{\times}\Psi$,

(b) reguły konstruowania operatorów hermitowskich,

(c) tzw. twierdzenie o wartości średniej.

Ad a) Interpretacja wyrażenia „$\rho=\Psi^{\times}\Psi$" jest w zasadzie jego definicją projektującą na gruncie języka fizyki kwantowej. W związku z tym prawdziwość zdania „Wyrażenie '$\rho=\Psi^{\times}\Psi$' znaczy tyle, co gęstość prawdopodobieństwa spotkania mikroobiektu w infinitezymalnym elemencie objętości dV przestrzeni konfiguracyjnej" jest zagwarantowana przez konwencję terminologiczną. Historia mechaniki kwantowej potwierdza trafność przyjęcia tej konwencji.

Ad b) Możliwość przyporządkowania dowolnej zmiennej dynamicznej odpowiedniego operatora hermitowskiego zakłada jeden z postulatów mechaniki kwantowej. Postulat ten nie podaje wszakże przepisów na konstruowanie poszczególnych operatorów. Przy ustalaniu formy analitycznej różnych operatorów odwoływano się do kształtów wzorów na odpowiednie zmienne w mechanice klasycznej.

---

[8] Por. np. W. W e i z e l, *Fizyka teoretyczna*, t. 2_1, tłum. W. Zientek, Warszawa 1957, s. 361-362; B o r n, op. cit., s. 357.

[9] H. P i e r s a, *Niektóre doświadczenia myślowe w uzasadnianiu relacji nieoznaczoności*, „Postępy Fizyki", 48 (1997), z. 6.

Ad c) Twierdzenie o wartości średniej dla całek jest właściwie definicją wartości średniej funkcji, formułowaną w matematyce. Odpowiednio fizykalnie zinterpretowane, staje się ono twierdzeniem fizykalnym, stosowanym w fizyce, także w mechanice kwantowej. Taka fizykalna interpretacja jest poprawna pod warunkiem, że funkcje fizykalne spełniają te same warunki, co ich odpowiedniki matematyczne. Funkcja falowa, a także funkcje otrzymane w wyniku działania na nią różnych operatorów hermitowskich, spełniają potrzebne wymogi (jednoznaczność, ograniczoność, ciągłość). W mechanice kwantowej, przy omawianym sensie funkcji ρ i wykorzystaniu matematycznego twierdzenia o wartości średniej, otrzymuje się wzór na średni promień wodzący mikroobiektu $\langle r\rangle = \int r\Psi^{\times}\Psi dV$ (przy założeniu, że funkcja Ψ jest unormowana). Ponieważ działanie operatora r sprowadza się do pomnożenia dowolnej funkcji przez liczbę, przeto powyższy wzór można zapisać także w formie $\langle r\rangle = \int \Psi^{\times} r\Psi dV$. Tę postać twierdzenia o wartości średniej przyjmuje się w formie postulatu dla dowolnej zmiennej dynamicznej $\langle a\rangle = \int \Psi^{\times} a\Psi dV$[10].

Stestowanie olbrzymiej liczby konsekwencji mechaniki kwantowej pośrednio usprawiedliwia zarówno zasadność przyjęcia powyższego postulatu, jak i formy analitycznej dla najważniejszych operatorów hermitowskich oraz fizykalnej interpretacji funkcji ρ. Możemy więc stwierdzić, że w dowodzie nierówności (3) występują dostatecznie uzasadnione przesłanki.

Jak wspomniano, występujące po lewej stronie nierówności (3) i (4) wyrażenia $\sqrt{\langle\Delta F^2\rangle}$ i $\sqrt{\langle\Delta G^2\rangle}$ (lub Δx i Δp_x) przedstawiają średnie (dokładniej odchylenia standardowe od średnich) z pomiarów przeprowadzonych na wielu cząsteczkach, znajdujących się w takich samych stanach kwantowych, albo średnie z wielokrotnie przeprowadzonego pomiaru na jednej cząstce znajdującej się w takim samym stanie kwantowym.

Powyższe rozważania wskazują, że z dwu alternatywnych interpretacji Δx, Δp_x interpretacja probabilistyczna ma mocniejsze uzasadnienie. W konsekwencji wydaje się, że Popper miał rację, wygłaszając przytoczoną przez nas na początku tezę.

---

[10] P. T. M a t t h e w s, *Wstęp do mechaniki kwantowej*, tłum. A. Żardecki, Warszawa 1977, s. 35.