

MAREK SZYDŁOWSKI, Kraków  
ADAM KRAWIEC, Kraków

## NIEREGULARNE ZACHOWANIE PROSTYCH UKŁADÓW DETERMINISTYCZNYCH

Tradycyjnie złożoność układów deterministycznych przypisywana była złożoności samej natury tych układów albo zewnętrznym szumom, np. w problemie  $N$  ciał wynikałaby z faktu, że mamy dużą liczbę ciał. Ostatnie osiągnięcia teorii układów dynamicznych wydają się prowadzić do zgoła odmiennego poglądu. Proste układy deterministyczne mogą wykazywać granicznie złożone (chaotyczne lub turbulентne) zachowanie. Fakt ten spowodował olbrzymi wzrost zainteresowania problemami z dziedziny teorii układów dynamicznych i zaowocował mnogością zastosowań w prawie każdej dziedzinie nauki, od kosmologii po ekologię.

Pokażemy, jak ewoluowało pojęcie złożoności w dynamice. Materiał pracy będzie ilustrowany przykładami z różnych dziedzin fizyki. Naszym zamiarem jest nie tyle pedantyczne przedstawienie pojęć i twierdzeń matematycznych, ile wzbudzenie intuicji i pokazanie możliwych zastosowań.

Będziemy się interesować jedynie złożonością w czasowej ewolucji układów fizycznych. Problem złożoności przestrzennej układu jest o wiele trudniejszy i pozostaje jeszcze nie dopracowany, dlatego też nie będziemy go omawiać.

W otaczającym nas świecie zjawisk fizycznych, obserwując ich dynamikę w różnych skalach czasowych i przestrzennych, nieustannie stykamy się z zachowaniem, które zwykliśmy określać mianem zachowania nieregularnego, turbulентnego lub chaotycznego. Uświadamiając sobie rolę, jaką odgrywają procesy turbulентne w powstaniu obserwowalnych nieregularności we wszechświecie, procesy przypadkowych mutacji w ewolucji biologicznej czy też turbulентnego transportu ciepła w układzie klimatycznym, możemy się zastanawiać, czy bez złożoności dynamicznej rozwinęłyby się życie w obserwowanej formie.

Aby zrozumieć treść pojęcia złożoności we współczesnym paradygmacie dynamicznym, musimy się zapoznać z pewnymi użytecznymi dla dalszych rozważań pojęciami i faktami.

Czasami bardziej naturalny od ciągłego opisu dynamiki jest jej opis dyskretny, tj. zadany przez dyskretne odwzorowanie (mapę) typu:

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

gdzie  $x$  jest w ogólności wektorem  $x = (x^1, \dots, x^m)$  reprezentującym stan układu. Powyższa zależność określa, jak wartość zmiennej  $x$  w  $n + 1$ -tym kroku zależy od jej wartości w kroku poprzednim. Krokiem może być jakaś naturalna jednostka czasu: rok, miesiąc, epoka kasnerowska. Pomiedzy ciągłym a dyskretnym opisem dynamiki można ustalić odpowiedniość poprzez tzw. odwzorowanie Poincarégo. Wyobraźmy sobie trajektorię w przestrzeni stanów układu (przestrzeni fazowej), która przecina wielokrotnie pewną wybraną transwersalną powierzchnię (o wymiarze mniejszym o jeden). Odwzorowanie Poincarégo polega na przyporządkowaniu punktowi przecięcia trajektorii z tą płaszczyzną następnego punktu przecięcia. Odwzorowanie to jest więc naturalnym sposobem dyskretyzacji ciągłego problemu dynamicznego (rys. 1).

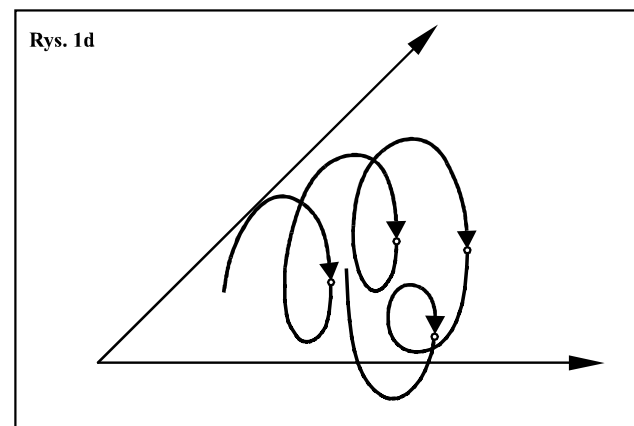
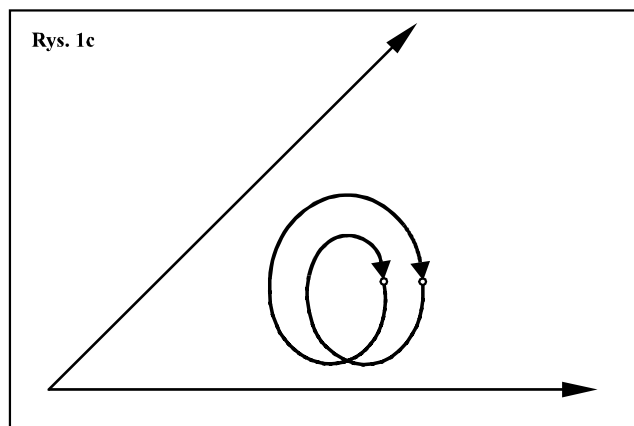
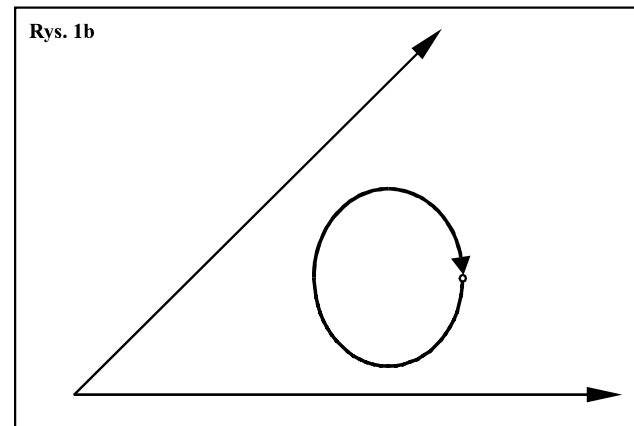
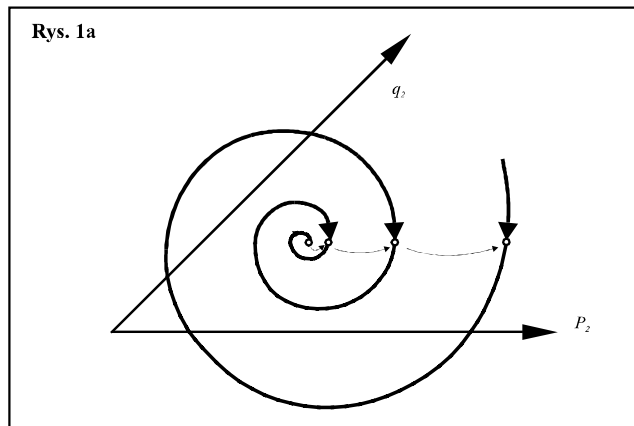
Alternatywą dla dyskretnego opisu dynamiki procesów jest opis ciągły. Dokonujemy go poprzez układ dynamiczny, przez który będziemy rozumieć układ równań różniczkowych o postaci:

$$\frac{dx^i}{dt} \equiv \dot{x}^i = F^i(x^i) \quad (1)$$

gdzie  $F^i(x^i)$  są funkcjami gładkimi swojego argumentu,  $i = 1, 2, \dots, n$  numeruje liczbę równań układu.

W różnych zastosowaniach zmienne  $x^i$  mogą oznaczać dowolne wielkości fizyczne. Może to być zmienna pozycyjna w opisie problemu ruchu, koncentracja  $i$ -tego składnika w reakcji chemicznej czy licznosc  $i$ -tej populacji jakiegoś gatunku. Wielkości  $dx^i/dt$  wtedy reprezentują chwilowe szybkości zmian tych zmiennych w czasie  $t$ . W definicji (1) żądamy, aby funkcje  $F^i$  nie zależały explicite od czasu. O takim układzie będziemy mówić, że jest autonomicznym układem dynamicznym.

Użytecznym sposobem wizualizacji rozwiązań układu (1)  $x^i(t, x_0)$  jest tzw. przestrzeń fazowa, będąca  $n$ -wymiarową przestrzenią, której każdy z punktów reprezentuje stan układu w ustalonej chwili. Rozwiązanie  $x^i(t, x_0)$  układu (1)



Rys. 1: Przekroje Poincarego na płaszczyźnie  $(p_2, q_2)$  dla układów charakteryzujących się a) ruchem do punktu stacjonarnego, b) ruchem cyklicznym, c) ruchem okresowym o podwojonym okresie, d) ruchem złożonym, chaotycznym.

tworzy w tej przestrzeni pewną krzywą, którą nazywamy krzywą fazową układu albo trajektorią fazową układu. Odwzorowanie  $t \rightarrow x^i(t, x_0) \equiv x_t^i(x_0)$  definiuje pewien ruch wzdłuż tej krzywej, tj. ustalając punkt początkowy  $x_0$ , na rozwiązanie układu (1) możemy patrzeć jak na odwzorowanie przyporządkowujące punktowi początkowemu  $x_0$  jego położenie na krzywej fazowej po upływie czasu  $t$ , czyli  $x^i(t, x_0)$ . Ten ruch nazywa się potokiem fazowym. Z fundamentalnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układu (1) wynika, że trajektorie fazowe tego układu nie mogą się przecinać.

Rozwiązania układu (1) są zdeterminowane przez wybór warunków początkowych. Ponieważ zwykle w eksperymencie warunki początkowe znane są jedynie ze skończoną dokładnością (np. dlatego, że każdy pomiar jest obciążony błędem), w badaniach jakościowych jest pożądana znajomość rodziny rozwiązań dla różnych warunków początkowych. Gdy wyznaczymy rozwiązania układu (1) dla wszystkich warunków początkowych w przestrzeni fazowej, uzyskamy pewien zbiór krzywych fazowych, tworzących tzw. portret fazowy.

Wśród rozwiązań układu istnieją tzw. osobliwe rozwiązania odpowiadające zerowaniu się prawych stron, tj.  $\forall i F^i(x^i) = 0$ . Na płaszczyźnie fazowej rozwiązania te są reprezentowane przez tzw. punkty krytyczne (albo punkty osobliwe) układu. Fizycznie punkty te odpowiadają jego położeniom równowagi.

Układ dynamiczny może być również zadany poprzez pole wektorowe zbudowane z prawych stron tego układu, tj.  $[F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^n(x^1, \dots, x^n)]$ . Podstawowy problem teorii układów dynamicznych polega na wyznaczeniu trajektorii celem uzyskania portretu fazowego. O samym układzie dynamicznym możemy myśleć jako o zbiorze krzywych fazowych albo jako o polu wektorowym mającym tę własność, że jest ono styczne do tej krzywej w każdym jej punkcie. Problem wyznaczenia trajektorii układu z gładkiego pola wektorowego nazywa się całkowaniem, stąd zamiast o trajektoriach mówimy czasami o krzywych całkowych. Od czasów Newtona, Leibniza i Eulera ważne było znajdowanie krzywych całkowych w rozwiązaniu różnorodnych problemów dynamicznych w fizyce.

Czasami model przestrzeni fazowej w postaci  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest niewystarczający. Wtedy konieczne jest wprowadzenie jako przestrzeni fazowej pewnej przestrzeni zakrzywionej (w ogólności rozmaitości różniczkowej). Np. ruch układu hamiltonowskiego dla zadanej energii całkowitej  $E$  odbywa się na powierzchni zadanej przez więź hamiltonowski  $H = E = \text{const}$ . Powierzchnia ta jest rozmaitością gładką i ponieważ jest ona na ogół zakrzywiona, wektor prędkości nie będzie na niej leżał. Wektory

styczne w każdym jej punkcie rekonstruuja tę powierzchnię w taki sposób, że są do niej styczne wzdłuż krzywej całkowej.

Rozważmy elementarną objętość komórki fazowej (kropki fazowej)  $\Delta v = dx^1 dx^2 \dots dx^n$ . Wtedy łatwo wyznaczyć względną prędkość zmian tej elementarnej objętości; jest ona równa:

$$\Lambda(x^1, \dots, x^n) = \frac{d}{dt}(\ln \Delta v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial x^i}.$$

Dla układów hamiltonowskich wielkość  $\Lambda(x^1, \dots, x^n)$  znika. Jest to treścią twierdzenia Liouville'a, mówiącego, że objętość przestrzeni fazowej jest zachowana podczas ruchu układu. Na portret fazowy takiego układu możemy patrzeć jak na pewien przepływ nieściśliwej cieczy.

O układach, dla których objętość przestrzeni fazowej jest zachowana, mówimy, że są zachowawcze. Gdy  $\Lambda(x^1, \dots, x^n) < 0$  w pewnym obszarze  $\Omega$  przestrzeni fazowej, z którego trajektorie nie wychodzą, odpowiedni układ będziemy nazywać dyssypatywnym. W tym przypadku stabilne położenia równowagi tworzą w przestrzeni fazowej zbiory niższego wymiaru. Takie zbiory nazywa się atraktorami.

W konstrukcji portretów fazowych ważną rolę odgrywają układy liniowe. Wynika to z faktu, że zachowanie układów nieliniowych w otoczeniu ich punktów krytycznych jest dobrze aproksymowane przez ich główną część liniową.

Przykład 1. Rozważmy prosty przykład dwuwymiarowego niesprężonego układu dynamicznego:

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= -x^1 \\ \dot{x}^2 &= 2x^2\end{aligned}$$

Powyższy układ wygodnie jest zapisać w postaci macierzowej:

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ogólne rozwiązanie naszego układu łatwo znaleźć metodą zmiennych rozdzielonych i wtedy otrzymujemy:

$$x^1(t) = C^1 e^{-t}, \quad x^2(t) = C^2 e^{2t}.$$

Rozwiązania leżą zatem na krzywych algebraicznych takich, że  $x^2 = k/(x^1)^2$ , gdzie  $k = (C^1)^2 C^2 = \text{const}$ . Rozwiązanie układu

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} C \quad (2)$$

definiuje ruch wzdłuż takiej krzywej: każdy punkt  $C \in \mathbf{R}^2$  porusza się do punktu  $x(t) \in \mathbf{R}^2$  danego przez (2) po czasie  $t$ .

Na powyższy układ dynamiczny możemy patrzeć jak na odwzorowanie  $\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  określone przez rozwiązanie (2), tj.

$$(t, C^1, C^2) \xrightarrow{\Phi} (C^1 e^{-t}, C^2 e^{2t}) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^1 \\ C^2 \end{bmatrix}$$

Ruch ten możemy opisać geometrycznie, rysując krzywe fazowe, będące rozwiązaniem w płaszczyźnie fazowej  $(x^1, x^2)$ . Strzałki na portrecie fazowym wykorzystujemy dla zaznaczenia kierunku ruchu, tj. kierunku wzrostu  $t$ . Dla  $C^1 = C^2 = 0$ ,  $x^1(t) = x^2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$  i początek układu jest jego punktem równowagi. Podkreślimy, że równania startujące z osi  $x^1$  osiągną punkt  $(0, 0)$  dla  $t \rightarrow \infty$ , gdy rozwiązania startujące z osi  $x^2$  osiągną ten punkt dla  $t \rightarrow -\infty$ . Te trajektorie nazywamy separatrysami wchodzącymi i wychodzącymi odpowiednio, a portret fazowy siodłem dwuwymiarowym (ze względu na sposób zachowania się trajektorii w otoczeniu punktu osobliwego).

Podstawy teorii układów dynamicznych na płaszczyźnie były sformułowane w klasycznych pracach Poincarego i Bendixona jeszcze na początku XX wieku (w związku z zagadnieniami mechaniki nieba). W szczególności w ich pracach zbudowana została (we współczesnej postaci) jakościowa teoria autonomicznych układów dynamicznych na płaszczyźnie, tj. układów:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x, y).$$

Podstawowy problem jakościowej teorii układów dynamicznych polega na wyznaczeniu granicznych trajektorii przy  $t \rightarrow \pm\infty$  oraz rozbiciu płaszczyzny fazowej na komórki. W każdej z nich zachowanie się trajektorii fazowych jest jakościowo identyczne.

Najprzyjemniejsze dla takich układów jest to, że w małym otoczeniu niezdegenerowanego punktu osobliwego  $(x_0, y_0)$ , dla którego wartości własne są niezerowe, jakościowo zachowanie układu jest równoważne zachowaniu trajektorii dla jego głównej części liniowej, tj. układu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \dot{y} &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).\end{aligned}$$

Charakter punktu krytycznego  $(x_0, y_0)$  jest zdeterminowany przez wartości własne macierzy linearyzacji układu  $A$  albo pierwiastki następującego wielomianu charakterystycznego:

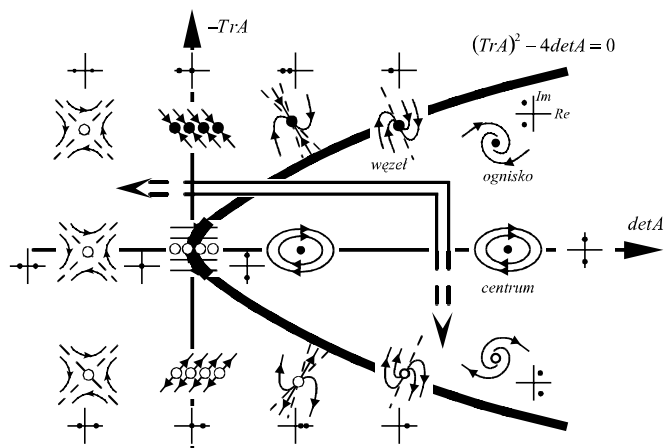
$$\det A = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \lambda^2 - \text{Tr } A + \det A = 0$$

gdzie  $A$  jest macierzą linearyzacji układu w otoczeniu jego punktu krytycznego  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ .

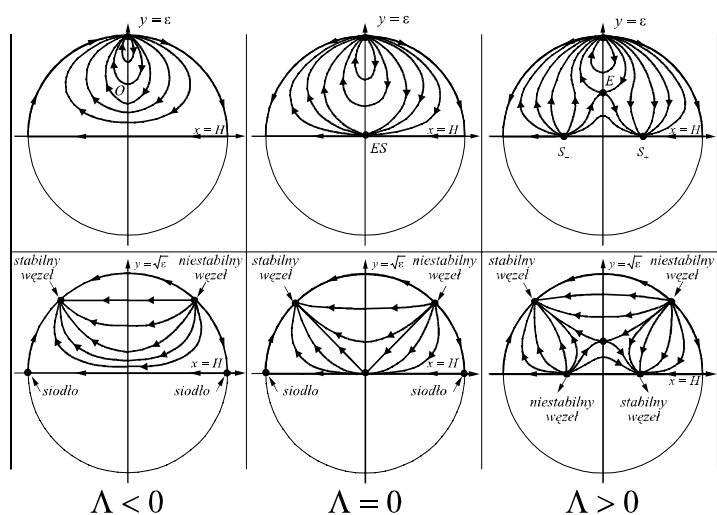
Na rys. 2 przedstawiono klasyfikację punktów krytycznych układu w zależności od śladu i wyznacznika macierzy linearyzacji.

Na rys. 3 przedstawiono pełny portret fazowy jednorodnych i izotropowych modeli Friedmanna w zmiennych  $x = \dot{R}/R = H$  – funkcja Hubble'a i  $y = \rho$  – gęstość energii, ze stałą kosmologiczną  $\Lambda$  ( $R$  jest czynnikiem skali). Portret ten dostarcza pełnej klasyfikacji tych modeli oraz pokazuje ich stabilność.

Jednym z najważniejszych wyników jakościowej teorii układów na płaszczyźnie (do którego przywiązywano przesadną wagę) było twierdzenie Poincarego-Bendixsona, które może być wypowiedziane następująco: Dla autonomicznego układu dynamicznego na płaszczyźnie, jeśli jego rozwiązania pozostają w skończonym obszarze płaszczyzny i nie przybliżają się do żadnych



Rys. 2. Klasyfikacja zachowań w otoczeniu punktów krytycznych dla układów na płaszczyźnie w zależności od śladu i wyznacznika macierzy linearyzacji układu w tym punkcie.



Rys. 3. Portrety fazowe dla modeli Friedmanna w zmiennych  $(H, \epsilon)$  – a, b, c odpowiednio dla  $\Lambda < 0$ ,  $\Lambda = 0$  i  $\Lambda > 0$ , oraz w zmiennych  $(H, \epsilon^{1/2})$  – d, e, f odpowiednio dla  $\Lambda < 0$ ,  $\Lambda = 0$  i  $\Lambda > 0$ ; gdzie  $H$  jest funkcją Hubble'a,  $a \in$  gęstością energii; oraz M: monotonicznie ekspandujące modele, 0: modele oscylujące, E: Einsteinowskie statyczne modele, A: modele asymptotyczne, S: modele de Sittera, ES: modele Einsteina-de Sittera.



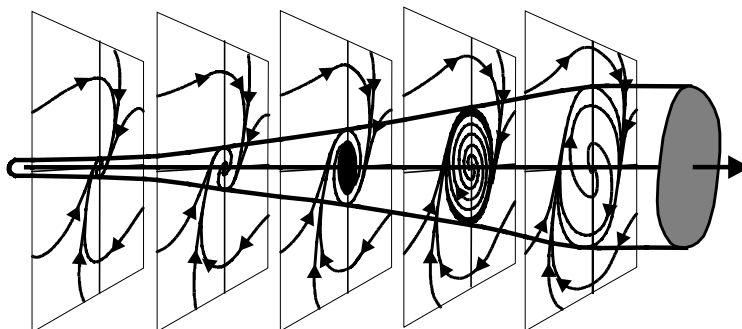
położeń równowagi, to są albo orbitą zamkniętą, albo taką orbitę osiągną. W praktyce twierdzenie to interpretowano jako mówiące, że ciągłe, dwuwymiarowe układy dynamiczne mają albo położenia równowagi, albo trajektorie okresowe. Na płaszczyźnie nie ma miejsca dla innego, np. złożonego (czy nieregularnego) zachowania. Na dalszym rozumieniu pojęcia złożoności w układach dynamicznych zaważył „syndrom płaskości”, polegający na myśleniu w kategoriach układów na płaszczyźnie.

Przejawem tego stylu myślenia był tzw. scenariusz Landaua-Hopfa powstawania turbulencji w układzie. Tę ostatnią próbowano wyjaśnić jako superpozycję ruchów okresowych o dużej liczbie częstości składowych. Rozważmy ciecz lepka, której ruch jest opisywany przez równania Naviera-Stokesa. Dlatego że równania te mają symetrię skalowania, inżynier w laboratorium może badać model samolotu w tunelu aerodynamicznym i wyciągać wnioski dla rzeczywistego obiektu. Niezmiennikiem tych przekształceń skalowania jest tzw. liczba Reynoldsa. Gdy ciecz przepływa przez rurę o charakterystycznym rozmiarze  $L$  z prędkością charakterystyczną  $v$ , wówczas liczba Reynoldsa jest proporcjonalna do iloczynu tych wielkości i odwrotnie proporcjonalna do tzw. lepkości kinematycznej. Rozważmy ciecz lepka opływającą pewne ciało. Gdy zwiększamy liczbę Reynolda (pełniącą funkcję parametru kontrolnego dla układu), zmienia się również charakter ruchu cieczy od stanu przepływu laminarnego do turbulencji, która przejawia się w postaci wirów. Jaki jest mechanizm powstawania turbulencji? Landau zaproponował następujące wyjaśnienie. Turbulencja jest superpozycją nieskończonej liczby ruchów periodycznych. Podstawowy mechanizm pojawiania się tych ruchów został nazwany na cześć Eberharda Hopfa – bifurkacją Hopfa. W tym mechanizmie stacjonarny punkt przechodzi w trajektorię okresową, następnie przekształca się w węzeł otoczony cyklem granicznym (rys. 4).

Hopf analizując uproszczoną wersję równania Naviera-Stokesa pokazał, że te równania przewidują istnienie takiego mechanizmu. Wraz z dalszym wzrostem parametru kontrolnego (liczby Reynoldsa) układ przechodzi przez szereg bifurkacji Hopfa, z których każda produkuje nową częstość, i ostatecznie tworzy to ruch z olbrzymią liczbą częstości składowych. Dla każdej cząstki cieczy pole jej prędkości przyjmuje po  $n$  bifurkacjach ogólną postać:

$$v(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t).$$

Tutaj  $f$  jest funkcją okresową o okresie  $2\pi$  względem każdej z niewspółmiernych częstości składowych  $\omega_i$  (charakterystycznych). W scenariuszu Lan-



Rys. 4: Powstawanie cyklu granicznego ze stacjonarnego stanu stabilnego w drodze bifurkacji Hopfa. Parametrem sterującym jest liczba Reynoldsa, wraz z której wzrostem obserwujemy kreację stabilnego cyklu granicznego.

daua turbulencja jest granicą nieskończonego ciągu niestabilności, a jego rozumowanie opierało się na powszechnym stereotypie: złożoność zachowania może występować jedynie w granicznie złożonym układzie. Turbulencja jest granicą nieskończonego ciągu niestabilności, ponieważ dla ruchu quasi-periodycznego o  $N$  częstościach składowych niewspółmiernych funkcja autokorelacji maleje jak  $1/\sqrt{N}$ . Gdyby  $N$  było skończone, układ pamiętałby o swoich warunkach początkowych, podczas gdy dla układów chaotycznych czy turbulentnych charakterystyczne jest zapominanie o przeszłości.

Procesy przejścia od ruchu regularnego do turbulentnego możemy zaobserwować podczas ruchu lepkiej, nieściśliwej cieczy (np. wody w rurze) czy też przy opływie przez ciecz niepłaskiego ciała. Jeśli prędkość cieczy jest dostatecznie mała, obserwujemy jej laminarny ruch i ciecz porusza się regularnie wzdłuż linii prądu. Gdy jednak prędkość jest odpowiednio duża, obserwujemy niestabilny, turbulentny przepływ, w którym chwilowe prędkości lokalne cieczy i jej ciśnienie zmieniają się w sposób chaotyczny w czasie. Woda wypływająca z kranu będzie wypływała ruchem laminarnym, dopóki siły bezwładności nie zniszczą sił napięcia powierzchniowego. Tak samo dym z papierosa unosi się do pewnej wysokości w sposób regularny, by potem tworzyć silnie nieregularny – turbulentny – przepływ.

Ruelle i Takens w 1971 r. oraz Newhouse i inni w 1978 r. sformułowali alternatywny do Landauowskiego scenariusz przejścia do turbulencji, analizując układy dysypatywne (teoria Landaua opierała się na ruchach quasi-perio-

dycznych, naturalnych dla układów zachowawczych). Pokazali oni, że już po dwóch niestabilnościach w trzeciej bifurkacji trajektorie są przyciągane do ograniczonego obszaru przestrzeni fazowej, który nazwali dziwnym atraktorem. Wchodząc do niego, trajektorie zapominają o swoich warunkach początkowych, dlatego atraktor nazywa się dziwnym. Takie atraktory mogą być traktowane jako stany stacjonarne, chociaż nie mają charakteru punktowego i są jakby rozmazane po całej przestrzeni fazowej. W obszarze atraktora początkowo bliskie trajektorie rozbiegają się eksponencjalnie (są silnie niestabilne), tak że asymptotycznie dla dużych czasów ruch staje się chaotyczny i nieprzewidywalny. Tę wewnętrzną własność układu nazywamy nadwrażliwością na małe zmiany warunków początkowych.

Sformułowanie nowego paradygmatu złożoności we współczesnej nauce w odniesieniu do badania układów dynamicznych nastąpiło dopiero po uświadomieniu sobie, że krańcowo złożone zachowanie dynamiki (niemożliwe w dwóch wymiarach) jest możliwe już w trzech wymiarach. Stało się to możliwe dzięki wysiłkowi wielu osób w różnych dziedzinach. W tym czasie zrodziło się w teorii układów dynamicznych wiele ważnych pojęć pozostających w bliskim związku z fizyką.

Jednym z takich pojęć jest pojęcie strukturalnej stabilności. Zasada powtarzalności eksperymentu głosi, że ten sam eksperyment powinien dawać identyczny wynik, jeśli zadbamy, aby zachodził w takich samych warunkach.

Oczywiście nigdy nie możemy zapewnić dokładnie identycznych warunków eksperymentu, dlatego praktycznie powtarzalność eksperymentu oznacza, że dostatecznie małe zaburzenia warunków eksperymentu nie powinny w sposób istotny odbić się na wynikach pomiaru. Wynika stąd, że matematyczny opis zjawisk powinien charakteryzować się swego rodzaju nieczułością na wpływ małych zaburzeń warunków eksperymentu. Matematyczne sformułowanie tej zasady prowadzi do pojęcia strukturalnej stabilności, którą z grubsza możemy określić następująco: układ dynamiczny nazywamy strukturalnie stabilnym, jeśli dla dowolnej, dostatecznie małej zmiany wektora prędkości fazowej powstały układ jest równoważny układowi wyjściowemu.

W definicji strukturalnej stabilności występują więc następujące dwa elementy:

- 1) dopuszczalny rodzaj zaburzeń,
- 2) pojęcie równoważności układu.

W teorii układów dynamicznych równoważność przyjmuje formę równoważności topologicznej, tj. żąda się, aby istniał homeomorfizm przestrzeni fazowych z zachowaniem orientacji krzywych fazowych. Dopuszczalne zabu-

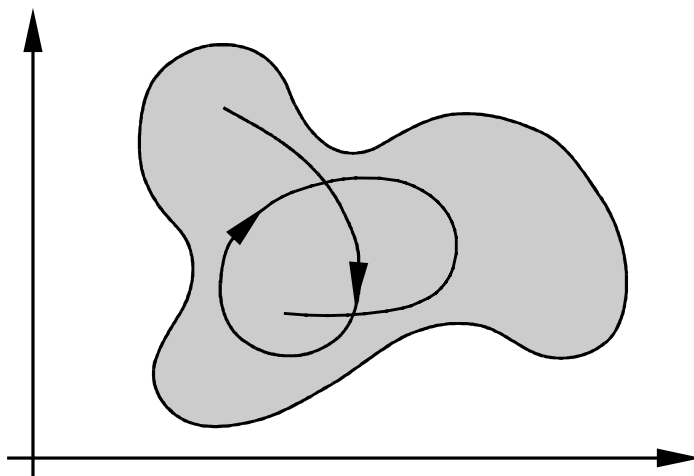
rzenia prawych stron układu są małymi co do wartości tych funkcji i ich pochodnych. Peixoto udowodnił ważne twierdzenie o układach strukturalnie stabilnych na płaszczyźnie dowodząc, że w przestrzeni układów dynamicznych na płaszczyźnie są one typowe, ponieważ tworzą otwarte i gęste podzbiory. Twierdzenie to w istocie jeszcze wzmocniło stary paradygmat myślenia w kategoriach płaszczyzny, dowodząc typowości układów stabilnych strukturalnie. Sądzono, że istnieje znaczy być strukturalnie stabilnym. Scenariusz Landaua wydawał się być poprawny, ponieważ sądzono, iż tak jak na płaszczyźnie cykl graniczny jest strukturalnie stabilny, tak samo będzie nim ruch wielookresowy o  $n$  częstościach składowych.

Zwrot nastąpił, gdy Smale w 1964 r. skonstruował pewien geometryczny przykład (równoważny 3-wymiarowemu układowi dynamicznemu), który był strukturalnie stabilny i jednocześnie wykazywał krańcowo złożony typ zachowania – „izomorficzny” ze zjawiskiem rzutu monetą. Trajektorie układu leżą w przestrzeni fazowej na pewnych zbiorach  $M \times \{\text{fraktal}\}$  (fraktal jest zbiorem typu zbioru Cantora o własnościach samopodobieństwa).

Mimo tego fundamentalnego wyniku Smale’a zwolennicy starego paradygmatu podjęli jeszcze raz próbę udowodnienia twierdzenia, że układy strukturalnie stabilne są typowe w 3 wymiarach. Gdyby tak było, można by pokusić się o klasyfikację takich układów przez podanie charakterystycznych typów zachowań, podobnie jak jest to możliwe na płaszczyźnie. Smale w 1965 r. udowodnił jednak coś zupełnie przeciwnego, a mianowicie dowiódł, że dla wymiaru  $n \geq 3$  istnieją układy, w których otoczeniu nie istnieje żaden układ strukturalnie stabilny. Ostatecznie dowodzi to, że problem pełnej klasyfikacji topologicznej układów dynamicznych ( $n \geq 3$ ) jest nierozwiązywalny z samej natury, jakkolwiek można wyróżnić pewne punkty krytyczne w 3 wymiarach. W przestrzeni układów dynamicznych istnieją całe obszary wolne od układów strukturalnie stabilnych, a małe zaburzenie nie musi nas konieczne zaprowadzić w obszar strukturalnie stabilny. Następuje teraz ostateczny zmierzch starego paradygmatu. Niskowymiarowe ( $n \geq 3$ ), a więc proste układy dynamiczne mogą wykazywać bardzo złożony, nieregularny typ zachowania.

Zastanówmy się, dlaczego nie było to możliwe w 2 wymiarach. W skrócie dzieje się tak dlatego, że w ograniczonym obszarze na płaszczyźnie takie chaotyczne trajektorie musiałyby się samoprzecinać, co jest wykluczone przez twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań układu (1) (zob. rys. 5).

Z drugiej strony w wyższych wymiarach takie samoprzecięcia nie są konieczne i stąd staje się możliwe istnienie zapętionych i ograniczonych trajek-



Rys. 5. Rysunek ilustruje, dlaczego złożone zachowanie jest niemożliwe na płaszczyźnie, gdzie zapętlenie trajektorii musi prowadzić do samoprzecięcia.

torii fazowych. Złożoność rodzi się w układzie deterministycznym (w sensie Laplace'owskim), a więc w układzie, w którym jeśli stan początkowy jest określony dokładnie, potrafimy poprzez równania ewolucyjne wyznaczyć jego stan w dowolnej chwili. Z definicji tej wynika, że źródło nieprzewidywalnego zachowania w układzie deterministycznym może leżeć w nieprecyzyjnym określeniu danych początkowych albo niestabilności układu.

Jeśli nawet pominąć kwantowo-mechaniczne ograniczenia na pomiar układu, to każdy klasyczny pomiar jest również obciążony błędem. Nieoznaczoność w określeniu danych jest więc czymś realnym. Zachowanie się układów fizycznych dowodzi, że nie jest to warunek wystarczający, ponieważ istnieje wiele układów, dla których np. małe błędy początkowe pozostaną z upływem czasu dalej małe. Widać, że wszystko zależy od wewnętrznej własności dynamiki, w którą może być wmontowany pewien nieliniowy mechanizm, który rozsadza eksponencjalnie błędy początkowe – mechanizm globalnej niestabilności (ta własność odnosi się do wszystkich trajektorii układu). Pociąga to za sobą własność nadwrażliwej czułości na zaburzenia warunków początkowych (WNC).

Zanim zilustrujemy to zjawisko na przykładach, zauważmy, że układy z chaosem były obecne w fizyce od dawna. Rzecz jednak w tym, że nie były one proste.

Historia ich odkrycia nie obyła się bez dramatów. Ludwig Boltzmann postawił sobie za cel wyprowadzenie praw termodynamiki, a w szczególności prawa wzrostu entropii, wyłącznie z praw mechaniki klasycznej. Jako model idealnego gazu przyjął układ kulek ( $N \gg 1$ ), które zderzają się ze sobą sprężysto. Dzisiaj taki model nazywa się bilardem. Układ dynamiczny, który opisuje ruch kulek, jest opisywany przez  $6N$  zmiennych (współrzędne i prędkości wszystkich kulek w przestrzeni trójwymiarowej). Przestrzeń fazowa będzie mieć również  $6N$  wymiarów. Całkowita energia układu jest zachowana i sam układ dynamiczny jest zachowawczy. Zderzenia są doskonale sprężyste, a ośrodkiem jest próżnia. Boltzmann pokazał, że pojęcie entropii można wyprowadzić z modelu mechanicznego, i udowodnił jej nieodwracalny wzrost. Jest ona proporcjonalna do logarytmu prawdopodobieństwa zastania układu w określonym stanie. W swoich rachunkach wykorzystał hipotezę, iż punkty poruszając się po trajektorii fazowej, równomiernie wypełniają dopuszczalny dla ruchu obszar przestrzeni fazowej (hipoteza ergodyczna). Tę hipotezę nazywa się inaczej hipotezą chaosu molekularnego. Wyniki Boltzmannna weszły na stałe do fizyki jako największe osiągnięcia ludzkiego rozumu. Nie oznaczało to jednak, że Boltzmann był zadowolony z tego, co uzyskał. Jego przyjaciel, matematyk Zermelo, uważał, że Boltzmann musiał gdzieś popełnić błąd. Opierał to na spostrzeżeniu, że o ile wyjściowy układ równań jest odwracalny w czasie, o tyle końcowy wynik, prawo wzrostu entropii, jest ewidentnie nieodwracalny. Musiałaby być więc naruszona symetria odbicia w czasie. Nie mogąc odpowiedzieć na postawiony zarzut, Boltzmann się zastrzeżił.

Dalsza historia tego zagadnienia jest związana z nazwiskiem Ehrenfesta. Udało mu się maksymalnie ściśle sformułować Boltzmannowski problem złamania symetrii, ale również nie potrafił go rozwiązać i się zastrzeżił. Rozwiązanie tego problemu zostało podane w 1948 przez młodego fizyka N. S. Kryłowa. Główna jego idea była następująca: symetria w układach dynamicznych może być naruszona i może zaistnieć molekularny chaos, jeśli dynamiczne rozwiązania układu są niestabilne. Po sformułowaniu tej idei Kryłow przedwcześnie zmarł. Zagadnienie zostało ponownie podjęte przez matematyczną szkołę Kołmogorowa, Anosowa i Sinaja. Pokazali oni, że w problemie bilardu dowolna trajektoria układu jest niestabilna, tj. przestrzeń fazowa składa się wyłącznie z separatrys i nie zawiera stanów stabilnych. Globalna niestabilność prowadzi do chaotycznego zachowania układu i wówczas cała dopuszczalna przestrzeń fazowa jest wypełniona równomiernie przez trajektorie. Takie układy nazywa się od nazwiska Kołmogorowa – K-systema-

mi. W tej klasie układów nowego znaczenia nabiera pojęcie entropii jako miary niestabilności. Zjawisko łamania symetrii odbicia w czasie i powstawania nieodwracalności jest właśnie konsekwencją globalnej niestabilności.

Podsumowując: do wystąpienia molekularnego chaosu koniecznym i wystarczającym warunkiem jest globalna niestabilność. Duża liczba cząstek – podkreślmy to jeszcze raz – nie jest ani koniecznym, ani wystarczającym warunkiem wystąpienia złożonego zachowania.

Dzisiaj Boltzmann mógłby odpowiedzieć Zermelo i wskazać nie tylko przyczynę molekularnego chaosu, lecz także zakreślić obszar stosowalności hipotezy ergodycznej. Zwróćmy tutaj uwagę na fakt, że teoria chaosu ma również znaczenie metodologiczne. Wcześniej zakładano, że chaos molekularny jest wygodną formą opisu zjawisk, gdy nie możemy wyliczyć poszczególnych trajektorii. Przy tym zakładano w sposób niejawni, że gdybyśmy potrafili znaleźć takie trajektorie, to moglibyśmy dokładnie przewidywać zachowanie układu. Dzisiaj wiemy, że przy niestabilnym zachowaniu trajektorii przewidywanie jest niemożliwe. Jakkolwiek to twierdzenie jest negatywne, ma niezwykle znaczenie dla nauki, większe niż wiele innych pozytywnych stwierdzeń. Rozważmy przykłady układów, których trajektorie posiadają WNC.

Przykład 2. Załóżmy, że stan naszego układu jest opisany przez liczbę z przedziału  $(0, 1)$ . Ustalmy pewną ściśle deterministyczną regułę określającą kolejne stany układu (tzw. dynamikę dyskretną, bo czas jest teraz dyskretny). Przepis kuchenny jest następujący: pomnóż przez 2 i zignoruj część całkowitą liczby. Matematycznym modelem dynamiki naszego procesu jest więc następujące równanie różnicowe:

$$x_n \rightarrow x_{n+1} = 2x_n(\text{mod}1), \quad x_n \in (0, 1).$$

Aby śledzić, co zrobi powyższe równanie (oczywiście reprezentuje ono deterministyczne prawo) z naszą wyjściową liczbą  $x_0$  (tj. kolejne iteracje  $x_0$ ), wygodnie jest zapisać tę liczbę w systemie dwójkowym, tj.  $x_0 = 0, x_1, x_2, x_3, \dots$ , gdzie  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) są zerami albo jedynekami.

Działanie naszej maszyny pracującej według powyższego wzoru polega (w kolejnym kroku) najpierw na przesunięciu ciągu w lewo (jest to wynik przemnożenia przez 2), a następnie odrzuceniu jego pierwszego wyrazu (wynik wzięcia  $(\text{mod}1)$ ). Widzimy więc, że jeden krok pracy maszyny kosztował nas utratę 1 bitu informacji o danej liczbie, i możemy sobie wyobrazić, że po  $n$  krokach  $n$  bitów informacji zostało wytracone. Jeśli więc stan początko-

wy naszego układu został opisany liczbą z dokładnością do  $n$  miejsc po przecinku, po  $n$  krokach nie będziemy mieć o niej żadnej informacji. W szczególności nie będziemy wiedzieć, czy należy ona do przedziału  $(0, 1/2)$ , czy  $(1/2, 1)$ .

Aby to uczynić, potrzebowalibyśmy bardziej szczegółowych informacji o stanie początkowym. Załóżmy, że stan układu jest liczbą rzeczywistą, ale wtedy do komputera możemy wpisać jedynie pewną liczbę wymierną i w ten sposób popełniamy błąd na samym początku. Jeśli np. porównamy liczbę  $\pi$  z jej przybliżeniem z dokładnością do  $n$ -tego miejsca, to po  $n + 1$  krokach te bliskie liczby będą się różnić znacznie, bo już na pierwszym miejscu. Przykład ten powinien nas nauczyć, że nawet gdy dynamika jest zdefiniowana przez pewną regułę deterministyczną, może się zdarzyć, że nie potrafimy nic powiedzieć, gdzie znajduje się liczba  $x_0$  po  $n$ -iteracjach (gdy  $n \rightarrow \infty$ ), tj. czy  $x_n(x_{n-1}(\dots(x_0)))$  należy do lewej czy do prawej połowy odcinka  $(0, 1)$ . To, gdzie wpadną kolejne iteracje punktu  $x_0$ , będzie asymptotycznie zjawiskiem losowym, analogicznie do zjawiska rzutu monetą. Aby się o tym przekonać, wystarczy ustalić przyporządkowanie: 0 – orzeł, 1 – reszka.

### Przykład 3. Niestabilność numeryczna.

O ile dotychczasowe przykłady były abstrakcyjne i przede wszystkim ukierunkowały naszą wyobraźnię, o tyle ten jest przykładem jak najbardziej realnym i dotyczy chaotycznego zachowania w znanym problemie bezzderzeniowego zagadnienia  $N$  ciał. Jest to problem polegający na badaniu i poszukiwaniu rozwiązań Newtonowskich równań ruchu o postaci:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{j=1}^N m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3},$$

gdzie  $m_i$  i  $\vec{r}_i$  są odpowiednio masami i wektorami pozycyjnymi ciał. Nikogo nie trzeba przekonywać, że powyższy model ma uniwersalne zastosowanie w różnorodnych zagadnieniach astrofizyki i nie tylko.

Jeśli założyć, że gromada gwiazd ma pewien charakterystyczny rozmiar  $D$  i składa się z  $N$  gwiazd o jednakowej masie, znajdujących się w dynamicznej równowadze, to z twierdzenia o wirale możemy otrzymać oszacowanie kwadratu średniej prędkości gwiazdy w gromadzie  $v^2 = GNM/D$ . Jeśli układ gwiazdowy nie znajduje się w stanie równowagi dynamicznej, to dąży do tego



stanu w pewnej charakterystycznej skali czasu zwanej czasem przejścia  $t_{cros} = 2D/v$ .

Modelowanie układów  $N$  ciał służy opracowaniu scenariuszy ewolucji gromad kulistych. Są one wynikiem numerycznych całkowań zagadnienia  $N$ -ciał.

Problem jednak w tym, że wyniki numerycznego całkowania są niezmiernie czułe na zaburzenia warunków początkowych oraz ze względu na niedokładności wynikające z samej natury metod numerycznych.

Pierwsze systematyczne badania tej wrażliwości rozwiązań były przeprowadzone przez Millera już w roku 1964. Rozważamy dwa identyczne układy  $N$ -ciał, powiedzmy układ (I) i układ (II). Załóżmy, że ich warunki początkowe nieznacznie się różnią, tj.

$$\begin{aligned}\vec{r}_i^I(0) &= \vec{r}_{i0}^I, & \vec{r}_i^I(0) &= \vec{r}_{i0}^I \\ \vec{r}_i^{II}(0) &= \vec{r}_{i0}^{II}, & \vec{r}_i^{II}(0) &= \vec{r}_{i0}^{II}\end{aligned}$$

Jako miary odstępstwa warunków początkowych użyjemy wielkości

$$\Delta(t) = \left( \sum_{i=1}^N |\vec{r}_i^I - \vec{r}_i^{II}|^2 + \sum_{i=1}^N |\vec{r}_i^I - \vec{r}_i^{II}|^2 \right)^{1/2}.$$

Miller pokazał, że dla  $4 \leq i \leq 32$   $\Delta(t)$  rośnie w przybliżeniu eksponencjalnie:

$$\Delta(t) = \exp(\mu t/t_{cros}),$$

gdzie  $\mu$  jest pewną stałą. Dla  $N = 8, 12, 32$  Miller uzyskał  $\mu/t_{cros} = 2, 4, 20$ . Rezultat Millera jest pierwszym numerycznym dowodem eksponencjalnego tempa narastania błędów w warunkach początkowych dla zagadnienia  $N$ -ciał. Dla niego było to argumentem przeciwko użyciu wyników numerycznego całkowania w badaniu ewolucji gromad już w skali czasu rzędu czasu relaksacji układu (kilka  $t_{cros}$ ), ponieważ są one zniekształcone przez efekt szybkiego narastania błędów.

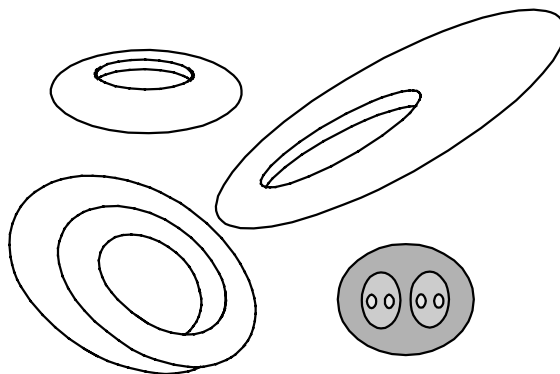
Rodzi się następujące pytanie: Co jest przyczyną tak szybkiego narastania błędów, że po czasie rzędu  $t_{cros}$  niemożliwe jest przewidywanie pozycji i prędkości wybranej gwiazdy w badaniach symulacyjnych gromady? Odpowiedź

na to pytanie nie była znana za czasów pionierskich prac Millera. Dzisiaj wiemy, że tempo narastania błędów jest konsekwencją WNC.

Hayli powtórzył wcześniejszy eksperyment Lecara, który uzgodnił 11 różnych wyników całkowań problemu 25 ciał, startując z tych samych warunków początkowych (całkowanie było przeprowadzone w czasie 2, 5 wielokrotności czasów przejścia z dokładnością wystarczającą dla zachowania całki energii na poziomie  $10^{-4}$ ). Hayli pokazał, że dla tego samego programu obliczeniowego różne komputery dawały znacząco różne wyniki już po czasie kilku  $t_{cross}$  z powodu WNC dla różnych numerycznych sposobów zaokrąglenia wyników związanych np. z rodzajem używanego procesora.

Istota WNC leży w nieliniowości układu, co pozwala mu przejawiać złożone zachowanie w ograniczonym obszarze przestrzeni. Zachowanie to jest związane z tzw. własnością hiperboliczności, która jest uogólnieniem pojęcia stałego punktu hiperbolicznego. Posiadanie tej własności oznacza, że trajektorie układu będą rozciągane wzdłuż pewnych kierunków i jednocześnie ściskane wzdłuż innych, co z kolei gwarantuje ograniczoność rozwiązań i ich strukturalną stabilność. Quasi-periodyczny ruch ze scenariusza Landaua powstawania turbulencji niestety nie posiada WNC i jest strukturalnie niestabilny.

Modelowym układem realizującym zjawisko WNC jest tzw. solenoid. Geometrycznie działanie tego odwzorowania polega na rozciąganiu jego długości przy jednoczesnym spłaszczeniu jego wymiaru poprzecznego, by następnie obwinąć nim oryginalny torus (rys. 6).



Rys. 6: Solenoid definiuje przekrój Poincarego dla pewnego przepływu w 4-wymiarowej przestrzeni. Solenoid jest efektem rozciągnięcia torusa wzdłuż jednego wymiaru i owinięcia go wokół samego siebie. Na przekroju poprzecznym otrzymamy zbiory fraktalne, powtarzając konstrukcję *ad infinitum*.

Powtarzając taką operację wielokrotnie w granicy, otrzymamy nieskończoną liczbę linii nawijających się na oryginalnym torusie, co tłumaczy użycie nazwy solenoid. Oczywiście, jest to przykład wymyślony, ale daje wyobraźni prosty przykład układu o krańcowo złożonym zachowaniu trajektorii. O powyższym odwzorowaniu możemy myśleć, że jest ono odwzorowaniem Poincarégo pełnego ruchu. Z tego względu traktujemy odwzorowanie typu solenoidu jako pewien układ dynamiczny. Jego przekrój poprzeczny na płaszczyźnie jest zbiorem Cantora. Orbity na solenoidzie są stabilne i można ustalić ich odpowiedniość z ciągiem losowych zer i jedynek.

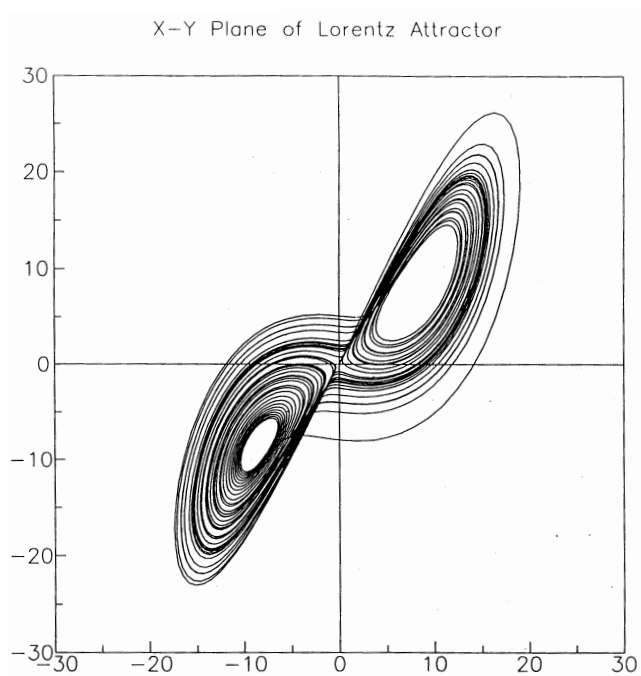
Największym odkryciem w ramach nowego paradygmatu dynamicznego było odkrycie prostych (niskowymiarowych) układów dynamicznych o złożonym zachowaniu. Historycznie pierwszym tego typu układem był układ Lorentza. Układ ten pojawił się w kontekście teoretycznego opisu tzw. eksperymentu Bénarda. W tym eksperymencie warstwa cieczy znajdująca się w polu grawitacyjnym jest podgrzewana od dołu. Ogrzana ciecz podnosi się z dołu do góry, a chłodna opada w dół. Ruchowi do góry przeciwdziała siła lepkości. Przy małych różnicach temperatur między płytami  $\Delta T$  siły lepkości dominują i ciecz pozostaje w spoczynku, natomiast transport ciepła odbywa się ze stałym przewodnictwem. Ten stan jest niestabilny i przy zwiększeniu liczby Reynoldsa  $R$  (proporcjonalnej do  $\Delta T$ ) powstają stacjonarne komórki konwekcyjne. Przy dalszym wzroście  $R$  obserwujemy przejście do chaotycznego ruchu. Układ Lorentza jest uproszczonym opisem dynamiki tego zjawiska i ma postać:

$$\begin{aligned} X &= -\sigma X + \sigma Y \\ Y &= rX - Y - XZ \\ Z &= XY - bZ \end{aligned}$$

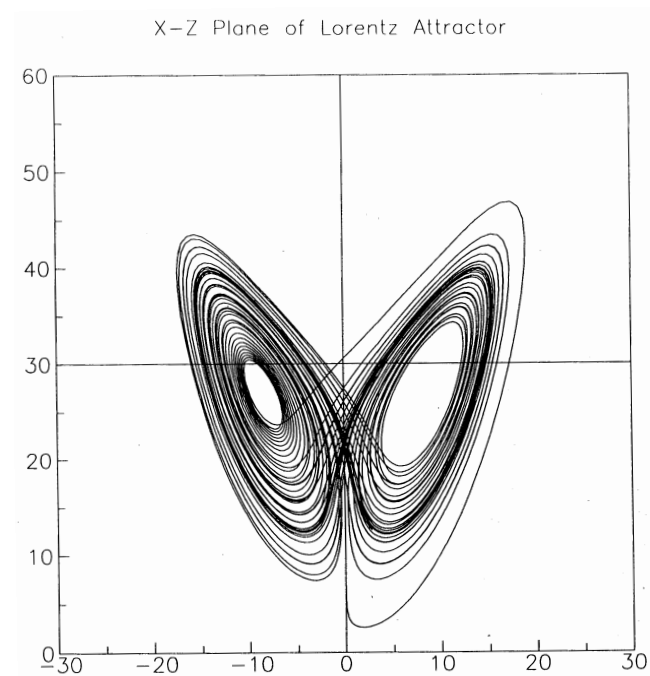
gdzie  $\sigma$ ,  $b$  – bezwymiarowe stałe charakteryzujące układ,  $r$  – parametr sterujący, proporcjonalny do  $\Delta T$ ,  $X$  jest proporcjonalny do prędkości cyrkulującej cieczy,  $Y$  charakteryzuje różnicę temperatur między podnoszącymi i opadającymi strumieniami cieczy,  $Z$  jest proporcjonalne do odchylenia pionowego profilu temperatur od wartości równowagowej.

Na rys. 7 zaznaczono rzuty trajektorii w przestrzeni stanów na płaszczyzny układu współrzędnych dla  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ . Przecinanie się krzywych fazowych jest wynikiem rzutowania. Trzy wymiary przestrzeni fazowej są ich minimalną liczbą dla pojawienia się złożonego – chaotycznego – zachowania. W widmie mocy sygnału ( $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ ) obserwujemy szerokopasmowy szum w obszarze niskich częstotliwości, a funkcja autokorelacji eksponencjalnie zanika.

Rys. 7a.



Rys. 7b.



Rys. 7. Rzuty trajektorii układu Lorentza na płaszczyzny układu współrzędnych.

Henon i Heiles, badając problem ruchu gwiazdy w zewnętrznym polu grawitacyjnym galaktyki eliptycznej, sprowadzili problem ruchu do badania hamiltonowskiego układu dynamicznego o postaci:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (p_i^2 + q_i^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 = E = \text{const}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

gdzie  $q_1, q_2$  są współrzędnymi uogólnionymi, a  $p_1, p_2$  sprzężonymi z nimi pędami.

Aby pokazać chaos w tym układzie, skonstruowali przekroje Poincarego na płaszczyźnie  $(p_2, q_2)$  dla różnych wartości energii całkowitej  $E$ , pełniącej funkcję parametru kontrolnego. W miarę jak  $E \rightarrow 1/6$ , obserwujemy losowy rozkład punktów na płaszczyźnie  $(p_2, q_2)$ , co może być świadectwem chaotycznego zachowania.

Minimalny wymiar przestrzeni fazowej, w którym chaos może się pojawić w układach ciągłych, jest trzy, jednak w układach dyskretnych wymiar minimalny jest jeden. Co ciekawe, dynamika pola grawitacyjnego w otoczeniu osobliwości początkowej ma charakter turbulentny, który daje się opisać przez taki jednowymiarowy układ znany już Gaussowi. Złożone zachowanie może wystąpić już w przypadku jednowymiarowych nieodwracalnych układów dyskretnych. Przykładem takiego układu jest odwzorowanie logistyczne

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$$

Standardowym przykładem dwuwymiarowego układu dyskretnego jest odwzorowanie Henona:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = bx_n.$$

Odwzorowanie Henona jest odwracalne i może być zapisane w postaci:

$$x_n = \frac{1}{b} y_{n+1}$$

$$y_n = x_{n+1} + \frac{a}{b^2} y_{n+1}^2 - 1.$$

Dla pewnych wartości  $a$ ,  $b$  odwzorowanie Henona wykazuje krańcowo złożone zachowanie.

Jak już podkreślono, warunkiem wystąpienia WNC jest rozciąganie i ściskanie ograniczonych trajektorii, co może być zrealizowane w dwóch wymiarach, jedynie gdy zachodzi zagięcie trajektorii. W przeciwnym wypadku, gdybyśmy wystartowali z obszaru kwadratowego, gdyby nie było zaginania przestrzeni, skończylibyśmy na dowolnie długim, cienkim pasku, w którym rozwiązania są nieograniczone.

W opisie chaosu można się posługiwać pewnymi wielkościami fenomenologicznymi, takimi jak widma mocy, funkcje autokorelacji, przekroje Poincarégo. Chociaż wskaźniki te są powszechnie używane, wiadomo, że rozwiązania quasi-okresowe z dużą liczbą częstości mogą produkować podobne efekty do tych obserwowanych dla chaosu deterministycznego. Bardziej precyzyjnym narzędziem detekcji chaosu deterministycznego są tzw. wskaźniki Lapunowa. Wielkości te zostały użyte przez ich autora w 1890 r. do badania stabilności (niestabilności) periodycznych orbit. W teorii chaosu deterministycznego mają one zastosowanie do badania układu zlinearyzowanego:

$$\frac{d\alpha^i}{dt} = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \Big|_{\bar{x}^i = \bar{x}^i(t)} \alpha^j, \quad i, j = \dots, n$$

gdzie  $\alpha^i = x^i(t) - \bar{x}^i(t)$  są składowymi wektora separacji względem pewnej trajektorii odniesienia  $\bar{x}^i(t)$ . Tak więc naturalnym środowiskiem dla użycia wskaźników Lapunowa są liniowe nieautonomiczne równania różniczkowe

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Kiedy  $M$  jest zwartą przestrzenią Riemanna, na której określony jest nasz układ (pole wektorowe), wówczas wykładniki Lapunowa w punkcie  $m \in M$  są zdefiniowane jako eksponenty zlinearyzowanych orbit przechodzących przez  $m$ . Twierdzenie Oseledca gwarantuje, że istnieje skończona granica w definicji charakterystycznego wskaźnika Lapunowa (w skrócie LCE):

$$\lambda_{Lap} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha(0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\alpha(t)\|^2}{\|\alpha(0)\|^2}$$

gdzie  $\|\alpha\|^2$  jest normą wektora separacji. Powszechnie uznaną definicją chaosu jest warunek dodatności LCE dla układu określonego na przestrzeni fazowej o mierze skończonej, gdy zbiór warunków początkowych prowadzących do chaotycznego zachowania trajektorii ma dodatnią miarę Lebesgue'a.

Własność WNC oznacza, że

$$\|\alpha(t)\| = \|\alpha(0)\| \exp(\lambda_{Lap} t).$$

Wskaźniki Lapunowa są na ogół liczone numerycznie; startując z pewnej znanej trajektorii odniesienia i z warunku początkowego  $\|\alpha(0)\|$ . Załóżmy, że po pewnym interwale czasu  $s$  dystans  $\alpha$  wzrósł do wartości  $\alpha_1$ . Wówczas dokonujemy renormalizacji, tj. redukujemy długość wektora  $\|\alpha(s)\|$  do wartości  $\|\alpha(0)\| = a_0$  i traktujemy ją jako warunek początkowy dla kolejnego rozwiązania. Stosując tę metodę wiele razy, uzyskujemy ciąg  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  i separacja po  $n$  krokach o długości  $s$  będzie równa:

$$\|\alpha(ns)\| = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n.$$

Wtedy LCE liczymy z wzoru:

$$\lambda_{Lap}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ns} \sum_{k=1}^n n \ln \alpha_k.$$

Układ jest chaotyczny, gdy  $\lambda_{Lap}(x_0) > 0$  dla prawie wszystkich  $x_0$ .

Spróbujmy w sposób bardziej nieformalny przyjrzeć się znaczeniu wskaźników Lapunowa w teorii chaosu. Każdy z nas ma intuicję pojęcia stabilności lub niestabilności. Niestabilny jest np. stan ołówka stojącego na szpicu albo ruch kulki staczającej się po zboczu góry. Jednocześnie ruch tej kulki w dolinie będzie stabilny. Dokładniejszy wgląd w stabilność układu uzyskamy, jeśli zanalizujemy zachowanie małych odchyłeń od odpowiedniego rozwiązania (stanu stacjonarnego). W stanach stacjonarnych wartości zmiennych fazowych nie zmieniają się czasie. Jednakże małe odchylenia od stanów stacjonarnych ( $\delta x^i$ ) będą już się zmieniać w czasie i tempo tych zmian będzie wyznaczone

przez układ liniowych równań różniczkowych. Rozwiązania tych równań będą się wyrażać przez eksponenty typu  $(\exp \lambda_i t)$ , w których wystąpią liczby  $\lambda_i$  będące wartościami własnymi macierzy linearyzacji. Liczby te są niczym innym jak wskaźnikami Lapunowa. Jeśli wszystkie wskaźniki Lapunowa są ujemne, to stan układu jest stabilny. Jeśli chociażby jedna z wartości wskaźników Lapunowa była dodatnia, to stan układu jest niestabilny. Faktycznie wówczas odchylenia  $\delta x_i$  narastają w czasie. We wspomnianym przykładzie ołówka ustawionego na szpicu istnieje dodatnia wartość  $\lambda_i$  równa w przybliżeniu  $10 \text{ s}^{-1}$ . Wobec tego w czasie 10 s początkowe odchylenie wzrośnie  $e^{100} \approx 10^{40}$  razy. Ta liczba jest astronomiczna i oznacza, że ołówek utrzyma się na szpicu przez 10 s, jeśli początkowe odchylenie byłoby mniejsze od  $10^{-40}$  cm. Liczba ta jest absurdalnie mała, mniejsza niż długość Plancka, i z taką dokładnością nie da się zadać warunków początkowych.

W ogólnym przypadku wskaźniki Lapunowa mogą być zespolone. O stabilności stanów układu decydują wówczas części rzeczywiste tych wartości.

Analiza niestabilności ruchu układu opiera się na badaniu ewolucji małych odchyień od zadanej trajektorii (a nie punktu stacjonarnego). Wskaźniki Lapunowa nie są już w tym przypadku stałe i zależą od czasu. Trajektorie będą niestabilne, jeśli wśród wskaźników Lapunowa znajdzie się chociaż jeden, którego część rzeczywista jest dodatnia, przy  $t \rightarrow \infty$ . Podkreślmy ważną własność wskaźników Lapunowa – są one charakterystycznymi (albo własnymi) liczbami układu i nie zależą od warunków początkowych. W ten sposób stabilność albo niestabilność wyznaczona za ich pomocą jest wewnętrzną własnością badanego układu, a nie wynikiem zewnętrznego oddziaływania. To właśnie z tego powodu wskaźniki Lapunowa nadają się do detekcji chaosu.

Fakt istnienia prostych układów dynamicznych o złożonym zachowaniu każe nam poddać rewizji pewne, wydawałoby się, ustalone na zawsze pojęcia w fizyce. I tak np. dla niestabilnych układów traci sens pojęcie układu izolowanego i nowego spojrzenia wymaga pojęcie przyczynowości. Tego rodzaju zmiany są charakterystyczne dla nowego paradygmatu złożoności w dynamice.

Zastanówmy się na zakończenie nad pojęciem przyczynowości. Zwykle pod pojęciem przyczyny rozumiemy warunki początkowe, które zgodnie z dynamiką układu prowadzą do określonego skutku. W tym języku znalezienie związku przyczynowego oznacza zrozumienie dynamiki poszczególnych procesów przejściowych. Cały czas implicite zakładamy, że przyczyna i skutek są współmierne (porównywalne). Dla procesów stabilnych (albo tzw. neutralnie stabilnych, dla których części rzeczywiste są równe zeru) przyczyna i sku-



tek są zawsze współmierne. Natomiast dla układów niestabilnych sytuacja jest diametralnie inna. Bardzo mała przyczyna może prowadzić do skutku, którego skala jest nieporównywalna z przyczyną. Zwykle w takich sytuacjach najczęściej mówimy, że przyczyną niewspółmierności jest niestabilność, a nie małe początkowe zaburzenie. Przy tym zachodzi istotne przesunięcie pojęć, przyczyną jest wewnętrzna własność układu, a nie zewnętrzne oddziaływanie. Ilustruje to dobrze przykład wzięty z życia.

Rozważmy dwie sytuacje. W pierwszej butelka Bordeaux stoi na środku stołu (stan stabilny). Ktoś przechodził koło stołu i nieostrożnym ruchem strącił ją, butelka się rozbiła. Powstaje pytanie: gdzie tkwi przyczyna tego ubolewania godnego zdarzenia? Albo inaczej: kto jest winien? Oczywiście, że winien jest człowiek, który strącił butelkę. Rozważmy drugi wariant: ta sama butelka stoi tym razem na brzegu stołu. Wystarczy małe przesunięcie i spadnie (jej stan jest bliski niestabilnemu). Przelatuje mucha – i butelka się rozbiła. Zadajemy to samo pytanie: kto jest winien? Nikt o zdrowych zmysłach nie obwini muchy za ten pożałowania godny incydent, raczej powie, że przyczyna zdarzenia leży w niestabilnym położeniu butelki. Winien jest ten, kto ją tam postawił. Zawsze musi być ktoś winien. Zauważmy, że u podstaw stwierdzenia „zdarzenie zaszło przypadkowo” również leży niestabilność układu dynamicznego.

#### CYTOWANA LITERATURA

1. G l e i c k J., Chaos: Making a New Chaos, Viking Press, New York 1987 (Chaos, Zysk i S-ka, Poznań 1996).
2. W i g g i n s W., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York 1990.
3. A r n o l d V. I., A v e z A., Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin, New York 1968.
4. A r n o l d V. I., Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York 1983.
5. R u e l l e D., Chaotic Evolution and Strange Attractors, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
6. S t e w a r t I., Czy Bóg gra w kości? PWN, Warszawa 1994.

## THE IRREGULAR BEHAVIOUR OF THE SIMPLE DETERMINISTIC SYSTEMS

## S u m m a r y

In the present paper it is discussed the irregular behaviour of the simple deterministic systems. It is studied how the understanding of complexity has changed in dynamics.