ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLVI-XLVII, zeszyt 1 – 1998-1999

BOŻENA CZERNECKA
Lublin

ZAGADNIENIE NIEOBOWIĄZYWALNOŚCI PRAWA WYŁĄCZONEGO ŚRODKA W INTUICJONISTYCZNYM RACHUNKU ZDAŃ

W 1952 r. holenderski uczony L. E. J. Brouwer napisał, że dogmat o ogólnej ważności zasady wyłączonego środka jest swoistym fenomenem w historii cywilizacji, podobnie jak dawne wierzenie w wymierność liczby π lub w ruch firmamentu wokół Ziemi[1]. Niewątpliwie prawo wyłączonego środka jest uważane przez współczesnych logików za bodajże najbardziej problematyczne ze wszystkich logicznych praw. Obiekcje pod jego adresem zgłaszają zarówno zwolennicy tzw. logik wielowartościowych, w których to logikach przyjmuje ono trzecią wartość logiczną, różną od prawdy i fałszu, jak i teoretycy mechaniki kwantowej powołujący się na paradoksalną zasadę nieoznaczoności Heisenberga, według której pewne wielkości w mechanice kwantowej nie mogą być łącznie określone.

Jednakże wydaje się, że najbardziej poważna i chyba najbardziej znana krytyka zasady wyłączonego środka związana jest z intuicjonizmem. Zasada ta nie obowiązuje w intuicjonistycznym rachunku zdań. Nasuwa się natychmiast pytanie: dlaczego prawo, które ma niekwestionowaną pozycję w klasycznym rachunku logicznym, jest przedmiotem tak zawziętych ataków ze strony przedstawicieli logiki intuicjonistycznej? Co właściwie oni krytykują?

W związku z analizami oraz porządkowaniem różnych stanowisk dotyczących nieobowiązywalności prawa wyłączonego środka podejmie się w tym artykule także próbę poszukiwania głównych pytań, które *implicite* stawia

---

[1] *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism*, „South African Journal of Science", 49(1952) 141 n.

przedstawiciel logiki intuicjonistycznej. Tego typu dociekań nie można znaleźć w literaturze. Niektórzy autorzy wypowiedzieli tylko uwagi dotyczące głównych pytań, związanych z tymi typami wiedzy teoretycznej, gdzie z powodzeniem może być stosowany klasyczny rachunek zdań. W końcowej partii wypowiedziane będą również uwagi dotyczące rozumienia przez intuicjonistów pojęcia konstruowalności.

Dobrze będzie zatem na początku przyjrzeć się pokrótce przedmiotowi owego sporu – prawu wyłączonego środka. Formalny zapis prawa $p \vee \sim p$ może być interpretowany metalogicznie (semantycznie): z dwóch zdań sprzecznych co najmniej jedno jest prawdziwe; albo ontologicznie (logicznie): z dwóch sprzecznych stanów rzeczy przynajmniej jeden istnieje (zachodzi). „Świat jest taki, że *p*, lub nie jest taki, że *p*. A więc świat jest taki, że: *p* lub nie-*p*. Świat jest więc taki, że spełnione jest w nim prawo wyłączonego środka" – pisze A. Grzegorczyk[2]. Zdaniem polskiego autora obowiązywalność analizowanego tu prawa oraz innych praw klasycznego rachunku zdań można uzasadnić w rozważaniach związanych z ontologicznym podejściem do rzeczywistości, tj. takim, że poszukuje się odpowiedzi na pytanie: „Jaki jest świat?" W uzasadnieniu tego rodzaju nie interesują nas metody i możliwości naszego poznania. „Przyjmujemy, że świat jest jakiś bez względu na to, czy mamy możliwości się o tym przekonać, czy nie. «Platon był w Indiach lub nie był w Indiach» uznajemy za prawdę, chociaż nie możemy się przekonać o prawdziwości zdań składowych występujących w tym zdaniu złożonym"[3].

W związku z tego typu rozumieniem prawa wyłączonego środka wyłaniają się pewne trudności. Autorem jednej z nich jest B. Russell: „Dzięki prawu

---

[2] *Nieklasyczne rachunki zdań a metodologiczne schematy badania naukowego i definicje pojęć asertywnych*, „Studia Logica", 20(1967) 118.

[3] Tamże. Warto dodać, że zasada wyłączonego środka jest jedną z najważniejszych zasad ogólnej teorii bytu. W przybliżeniu można ją sformułować następująco: „Każdy byt istnieje lub nie istnieje" oraz „Każdy byt jest określoną treścią istniejącą lub nie jest określoną treścią istniejącą". Zasada ta stwierdza, że każdy byt jest czymś określonym, odrębnym od drugiego bytu oraz że między bytem a niebytem nie ma nic pośredniego. Ponadto ontologiczne (metafizyczne) rozumienie tej zasady oraz zasady niesprzeczności daje podstawy do wydobycia treści semiotycznej dotyczącej funktorów negacji, koniunkcji i alternatywy. Jest to rozumienie klasyczne, na którym oparte są sformułowania odpowiednich praw klasycznej logiki zdań. Krótko mówiąc, istnieje możliwość filozoficznego uzasadnienia obowiązywalności klasycznego rachunku zdań na podstawie związków zachodzących w rzeczywistości. Por. S. K i c z u k, *Zagadnienie obowiązywalności klasycznego rachunku zdań*, „Roczniki Filozoficzne", 36(1988), z. 1, s. 39-56. Artykuł ten (a dokładniej mówiąc – jego tytuł) był inspiracją do nadania tytułu niniejszej pracy.

wyłączonego środka albo «A jest B», albo «A nie jest B» musi być prawdziwe. Stąd albo «Obecny król Francji jest łysy», albo «Obecny król Francji nie jest łysy» musi być prawdziwe. A zatem jeśli sporządzimy wykaz rzeczy, które są łyse i rzeczy, które nie są łyse, to nie powinniśmy znaleźć króla Francji na żadnej liście. Hegliści, którzy mają upodobanie do syntez, prawdopodobnie skonkludowaliby, że on nosi perukę"[4]. Trudność polega na tym, że tak odmienne przypadki, jak niebycie żadnym królem Francji oraz bycie królem Francji z bujną czupryną są zaklasyfikowane razem. Dwie wykluczające się bowiem alternatywy: „Obecny król Francji jest łysy" i „Obecny król Francji nie jest łysy" zdają się nie wyczerpywać wszystkich możliwości, nie dopełniają się wzajemnie. Obecny król Francji nie jest łysy, bo go nie ma. Można chyba powiedzieć, że mamy naturalną tendencję do podziałów dychotomicznych. Tam, gdzie takie dychotomizowanie dzieli całe uniwersum, prawo wyłączonego środka stosuje się z powodzeniem[5], ale faktem jest, że zwykle jesteśmy zainteresowani tylko określoną częścią uniwersum. Można wtedy „naprawić" brak adekwatności w jakimś alternatywnym zdaniu przez wprowadzenie okresu warunkowego, np. „Jeśli istnieje taka osoba, jak król Francji, to jest on łysy albo nie jest on łysy". Zazwyczaj jednak taki tryb warunkowy nie jest wprost wypowiedziany, lecz *implicite* zakładany. Do zagadnień, które są rozważane w jakimś ograniczonym uniwersum, prawo wyłączonego środka stosuje się w ramach tego ograniczonego pola i nie jest to bynajmniej argument przeciwko ogólnej ważności klasycznego prawa[6].

Drugą sprawą związaną z prawem wyłączonego środka jest sprawa definiowania pojęć. Wedle G. Fregego omawiane prawo jest inną postacią wymogu, aby pojęcia miały ostre zakresy. W przeciwnym razie, kiedy pojęcia są niewyraźne i niejasne, istnieje wątpliwość, czy stosują się do niego czy nie. Zatem stosowanie mętnych pojęć byłoby pogwałceniem prawa wyłączonego środka (a także prawa niesprzeczności)[7].

---

[4] *On Denoting*, [w:] *Logic and Knowledge: Essays 1901-1950*, ed. R. C. Marsh, London 1955, s. 48.

[5] Nasuwa się od razu analogia do podziału logicznego, którego formalnymi warunkami poprawności są adekwatność i rozłączność. Uważa się, że w podziałach dychotomicznych warunki te są zagwarantowane przez prawa logiki: adekwatność gwarantuje prawo wyłączonego środka, a rozłączność – prawo niesprzeczności.

[6] Por. N. Cooper, *The Law of Excluded Middle*, „Mind", 87(1978), No. 346, s. 161-164.

[7] Por. *Frege's Philosophical Writings*, ed. P. T. Geach, M. Blacks, Oxford 1970, s. 159. Te i im podobne problemy związane z prawem wyłączonego środka – jego rozumieniem

Obydwie te trudności, które N. Cooper nazywa TND-niedostatkami (*tertium non datur*[8]), można w pewien sposób przezwyciężyć, a co ważniejsze, nie dotykają one bezpośrednio samego prawa, lecz jego zastosowań. I podobnie jak nie krytykujemy prawa arytmetyki, np. 2 + 2 = 4, za to, że nie stosują się do niego położone obok siebie kulki cieczy, tak nie ma powodów do odrzucania prawa wyłączonego środka na podstawie faktu posługiwania się niejasno określonymi pojęciami czy ograniczonym uniwersum.

Pojawiają się też opinie, iż klasyczne prawo wyłączonego środka prowadzi do paradoksów, jak chociażby paradoks zdania samoreferencjalnego „To zdanie jest fałszywe". Jeśli założymy, że spełnia ono omawiane prawo, to jest zarówno prawdziwe, jak i fałszywe[9]. W związku z tym zarzutem F. B. Fitch argumentuje, że wyrażenia typu „To zdanie jest fałszywe" nie mogą być uważane za zdania w sensie logicznym, gdyż nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Są one pozbawione znaczenia. Tym samym nie mogą figurować w podstawieniowych przykładach logicznych praw. Sama zewnętrzna forma nie wystarczy, aby traktować jakieś zdanie jako podstawienie TND. I tak przykład Russella „Poczwórność pije zwłokę lub poczwórność nie pije zwłoki" nie jest poprawnym podstawieniem prawa, ale bezsensownym wyrażeniem.

Powyżej zarysowane trudności pojawiające się w związku z klasycznym TND (KTND) nie wydają się aż tak poważne, aby mogły zdyskredytować samo to prawo. W ogniu krytyki naukowej znalazło się ono dopiero za sprawą intuicjonistów. S. Haack[10] ujmuje strukturę intuicjonistycznej krytyki logiki klasycznej następująco:

(1) subiektywistyczne, konstruktywistyczne spojrzenie na matematykę podtrzymuje tezę, że

(2) pewne części matematyki klasycznej są nieakceptowalne,

i (3) to, że logika jest deskrypcją ogólnie ważnych form matematycznego rozumowania, podtrzymuje tezę, iż

(4) pewne części logiki klasycznej są błędne.

---

i obowiązywalnością – poruszali w swoich pracach również polscy autorzy, jak np. J. Łukasiewicz, Z. Zawirski, K. Ajdukiewicz, T. Czeżowski, T. Kotarbiński oraz z bardziej współczesnych Z. Kraszewski i M. Przełęcki.

[8] W dalszej części artykułu na oznaczenie prawa wyłączonego środka będę używać skrótu TND.

[9] Podobnie jest z paradoksem Russella klasy wszystkich klas, które nie są swoimi elementami.

[10] *Deviant Logic*, Cambridge 1974, s. 92.

Jeśli ten schemat jest poprawny, to odrzucenie pewnych klasycznych praw ma głębsze podstawy, sięgające rewizji ujęcia stosunku logiki do innych dyscyplin, głównie do matematyki[11].

Twórca intuicjonizmu L. E. J. Brouwer argumentuje, że w dziedzinie matematyki można znaleźć kontrprzykłady dla prawa wyłączonego środka. Definiuje on pewną własność F taką, że

(a) dla każdej liczby naturalnej można wykazać, iż posiada ona F, lub można wykazać, iż nie może ona posiadać F,

lecz (b) nie jest znana żadna metoda służąca do skonstruowania liczby posiadającej F

i (c) nie udowodniono, iż założenie, że taka liczba istnieje, prowadzi do sprzeczności.

Zatem według Brouwera

(d) liczba naturalna posiadająca F istnieje lub nie może istnieć, które to wyrażenie, będące odczytaniem formalnego zapisu $(\exists x)Fx \vee \neg(\exists x)Fx$, nie może być prawdziwe. Jest tak dlatego, iż może nie być możliwe ani skonstruowanie liczby posiadającej F, ani udowodnienie, że taka liczba nie może być skonstruowana. Wyprowadzenie sprzeczności z założenia, że liczba z F nie może być skonstruowana, nie byłoby jeszcze dowodem na to, iż ta liczba istnieje, gdyż dowieść istnienia liczby posiadającej F to tyle, co skonstruować (obliczyć) taką liczbę. A więc obalenie zdania $\neg(\exists x)Fx$ nie jest jeszcze uzasadnieniem tezy $(\exists x)Fx$[12]. Ostatecznie nie jest prawdą, że liczba posiadająca F istnieje lub nie istnieje. Nie jest przy tym jasne, czy TND jest uważane jako fałszywe, czy też pozbawione wartości prawdy. Argumentacja Brouwera sugeruje, że obydwa składniki: $(\exists x)Fx$ i $\neg(\exists x)Fx$ są fałszywe i stąd można wyprowadzić fałszywość całej alternatywy.

Prześledźmy jeszcze argumentację A. Heytinga, który był najwybitniejszym uczniem Brouwera, twórczo rozwijającym idee intuicjonizmu. Heyting wychodzi od porównania dwóch definicji liczb naturalnych:

I. k jest największą liczbą pierwszą taką, że $k - 1$ jest także liczbą pierwszą lub $k = 1$, jeżeli taka liczba nie istnieje;

[11] Angielska autorka wiąże logikę intuicjonistyczną z taką właśnie strategią powodującą zmianę systemu logicznego. Por. S. H a a c k, *Philosophy of Logics*, Cambridge 1978, s. 152-156.

[12] Jak wynika z tego przykładu, w intuicjonistycznym rachunku zdań nie obowiązuje również mocne prawo podwójnego przeczenia $\neg\neg p \rightarrow p$. Ta sprawa będzie jeszcze szerzej omówiona.

II. *l* jest największą liczbą pierwszą taką, że *l* – 2 jest także liczbą pierwszą lub *l* = 1, jeżeli taka liczba nie istnieje.

Matematyka klasyczna nie dostrzega różnic pomiędzy tymi definicjami, natomiast dla intuicjonistów ważne jest to, że *k* może być wyliczona (*k* = 3), podczas gdy nie mamy żadnej metody wyliczenia *l*. Nie wiadomo bowiem, czy ciąg liczb pierwszych bliźniaczych *p*, p + 2 jest skończony czy nie. W związku z tym intuicjoniści odrzucają drugą jako definicję liczby naturalnej, gdyż uważają, że liczba naturalna jest dobrze zdefiniowana tylko wtedy, gdy dana jest metoda jej wyliczenia. W ten sposób dochodzi do odrzucenia TND; gdyby bowiem ciąg liczb pierwszych bliźniaczych był skończony lub nie był skończony, wtedy druga definicja definiowałaby liczbę naturalną. Zdaniem Heytinga logik klasyczny zwróciłby uwagę, że nasza wiedza o istnieniu czy nieistnieniu ostatniej pary liczb pierwszych bliźniaczych zależy od wielu przypadkowych okoliczności i nie ma wpływu na prawdę matematyczną. Albo istnieje nieskończenie wiele takich par i wtedy *l* = 1, albo ich liczba jest skończona i wtedy *l* jest równe największej liczbie pierwszej takiej, że *l* – 2 jest też liczbą pierwszą. W każdym możliwym do pomyślenia przypadku *l* jest zdefiniowana, nie ma więc znaczenia, czy potrafimy tę liczbę wyliczyć czy też nie[13].

Z intuicjonistycznego punktu widzenia definicja druga stałaby się poprawna, gdyby został rozwiązany problem liczb pierwszych bliźniaczych W związku z tym K. Menger[14] proponuje następujący eksperyment myślowy: załóżmy, iż udowodniono, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych bliźniaczych. Czy – pyta dalej Menger – przed momentem udowodnienia *l* = 1, czy nie? Aby wyjaśnić sens tego rzekomo kłopotliwego pytania, trzeba, zdaniem Heytinga, odwołać się do istniejącego niezależnie od naszej wiedzy świata przedmiotów matematycznych, w którym „*l* = 1" jest prawdziwe w pewnym absolutnym sensie. Jednakże intuicjonista zdecydowanie odrzuca tego typu metafizyczne założenia, ograniczając się do badania myślowych konstrukcji matematycznych jako takich. Twierdzenie matematyczne jest tylko stwierdzeniem, że została wykonana pewna konstrukcja matematyczna, natomiast przed wykonaniem konstrukcji nie ma jeszcze twierdzenia. Z uwagi na powyższe ustalenia można więc powiedzieć, że intuicjonista stawia pytanie następujące: Czy została wykonana w moim umyśle określona konstrukcja matematyczna?

---

[13] A. H e y t i n g, *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam 1966, s. 1 n.

[14] *Der Intuitionismus*, „Blätter deutscher Philosophie", 4(1930) 311-325.

Wiele przykładów (podobnych do powyższego) podają intuicjoniści jako argument przeciwko ogólnej obowiązywalności prawa wyłączonego środka. Rodzi się jednak w tym miejscu pytanie – czy prawo wyłączonego środka odrzucone przez zwolenników logiki intuicjonistycznej jest tym samym prawem, które obowiązuje w logice klasycznej? Inaczej mówiąc: czy odrzucane TND jest identyczne z KTND? Gdyby tak faktycznie było, należałoby dociekać przyczyn takiego stanu rzeczy. Z pewnością można by wtedy powiedzieć, że systemy te są konkurencyjne, choć wydaje się, iż rachunek intuicjonistyczny byłby konkurentem nie zasługującym na to, aby go poważnie traktować. Wszystko wskazuje jednak na to, że tak nie jest. Formuły prawa, choć mają taki sam zapis, przypuszczalnie mają różne znaczenia, stwierdzają co innego. A przecież prawo logiki to nie tyle jego symboliczny zapis, co treść prawa.

Znaczenie prawa wyłączonego środka zależy od znaczenia dwóch występujących w nim stałych logicznych: funktorów negacji i alternatywy. Dociekania związane z rozumieniem tych funktorów w logice intuicjonistycznej przedstawimy na podstawie deklaratywnych wypowiedzi różnych autorów na ten temat, a także analizy kontekstów wystąpienia tych stałych logicznych.

Warto na początku zauważyć, że według stanowiska intuicjonistów twierdzenie logiczne nie jest niczym innym, jak tylko twierdzeniem matematycznym o najwyższym stopniu ogólności. Za zmienne zdaniowe logiki intuicjonistycznej można podstawiać wyłącznie zdania matematyczne. Pytanie, czy logika ta znajduje zastosowanie poza matematyką, pozostaje poza obszarem zainteresowań intuicjonistów.

Ponadto intuicjoniści odróżniają zdania i asercje. Asercja jest uznaniem zdania. Zdanie matematyczne wyraża pewne oczekiwanie, np. zdanie „Stała Eulera C jest wymierna" wyraża oczekiwanie, że potrafimy znaleźć dwie liczby całkowite a i b takie, że C = a/b. Być może – jak sugeruje Heyting – bardziej odpowiednie byłoby tu słowo „intencja", stosowane przez fenomenologów. Intuicjoniści używają słowa „zdanie" na oznaczenie intencji wyrażanej językowo przez zdanie. Intencja natomiast odnosi się nie tylko do stanu rzeczy uważanego za istniejący niezależnie od nas, lecz także do doświadczenia, uważanego za możliwe[15]. Uznanie zdania oznacza wypełnienie intencji, np. asercja „C jest wymierne" oznaczałaby, że faktycznie znaleziono wymagane liczby. Asercję od odpowiadającego jej zdania odróżnia się za pomocą znaku „$\vdash$", wprowadzonego przez Fregego. Uznanie zdania nie jest

[15] Por. A. H e y t i n g, *Intuicjonistyczne podstawy matematyki*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów*, red. J. Misiek, Kraków 1986, s. 33.

więc samo zdaniem, lecz stwierdzeniem empirycznego faktu, mianowicie wypełnienia intencji wyrażonej przez zdanie.

W świetle powyższych uwag łatwiej będzie uchwycić sens funktorów służących do tworzenia z pewnych zdań – zdań (bardziej) złożonych. Przede wszystkim zostanie poddany analizie funktor negacji, którego idiosynkryzje znaczeniowe – zdaniem M. Dummetta – ponoszą winę za odrzucenie przez intuicjonistów TND[16]. W przeciwieństwie do niego J. Łukasiewicz za ten fakt obarcza odpowiedzialnością sposób rozumienia alternatywy[17]. Intuicjonistyczna interpretacja negacji różni się od zwykłego jej rozumienia. Po pierwsze – wedle intuicjonistów – należy odróżnić użycie słowa „nie" w matematyce (a tym samym i w logice) od stosowania go w wyjaśnieniach niematematycznych, wyrażonych w języku potocznym. W twierdzeniach matematycznych niejasności nie mogą powstać: „nie" zawsze ma ścisły sens. „Zdanie *p* nie jest prawdziwe" lub „zdanie *p* jest fałszywe" oznacza: „jeśli założymy prawdziwość *p*, dojdziemy do sprzeczności". Gdy jednak mówimy, że generator liczby ς[18] nie jest wymierny, nie uważa się tego za twierdzenie matematyczne, lecz za wypowiedź na temat stanu rzeczy; rozumie się przez to, że, jak dotąd, nie podano dowodu wymierności ς. Ponieważ nie zawsze łatwo widać, czy zdanie uważa się za twierdzenie matematyczne, czy za wypowiedź na temat aktualnego stanu naszej wiedzy, Heyting przestrzega, aby być ostrożnym w formułowaniu takich zdań. Tam, gdzie pojawia się niebezpieczeństwo niejasności, matematyczną negację wyraża się mówiąc: „niemożliwe jest, że ...", „fałszem jest, że ...", „nie może być, aby ..." itp., podczas gdy faktualną negację wyraża się przez: „nie mamy prawa twierdzić, że ...", „nikt nie wie, że ..." itd.

Po drugie, zgodnie z ogólną tendencją panującą wśród intuicjonistów do oczyszczania matematyki (tym samym logiki) od negatywnych myśli, negacja w ujęciu intuicjonistycznym jest czymś w pełni pozytywnym[19]. Można po-

---

[16] Por. *Antyrealistyczne spojrzenie na język, myśl, logikę i historię filozofii analitycznej. Z Michaelem Dummettem rozmawia Fabrice Pataut*, „Kwartalnik Filozoficzny", 26(1998), z. 1, s. 170.

[17] Por. J. Łukasiewicz, *O intuicjonistycznym rachunku zdań*, [w:] tenże, *Z zagadnień logiki i filozofii*, pod red. J. Słupeckiego, Warszawa 1961, s. 267.

[18] Jeżeli 9 z pierwszego ciągu 0123456789 w liczbie π jest k-tą cyfrą po przecinku, to $\varsigma = \frac{10^k - 1}{3 \times 10^k}$.

[19] Zdaniem Hossacka w takim stanowisku można się dopatrzyć wpływu Locke'a, według którego asercja jest połączeniem dwóch idei, negacja zaś ich separacją. Locke traktował zatem rozdzielenie jako pozytywny czyn ze strony człowieka, a tym samym uwolnił negację od

wiedzieć, że negacja jest intencją sprzeczności zawartą w intencji pierwotnej. Heyting podaje taką oto nieformalną definicję negacji: Zdanie „C nie jest wymierne" oznacza oczekiwanie, że z założenia o wymierności C można wyprowadzić sprzeczność. Warto zauważyć, iż negacja zdania odsyła zawsze do procedury dowodowej, prowadzącej do sprzeczności, nawet jeśli zdanie wyjściowe nie sugeruje żadnej procedury dowodowej[20]. Trzeba jednak na chwilę zatrzymać się na kwestii rozumienia sprzeczności. W stosunku do powyższej definicji wydaje się bowiem, że można postawić zarzut cyrkularności, gdyż naturalny sposób rozumienia sprzeczności jest taki, iż wymaga asercji i negacji tego samego zdania. Heyting proponuje, aby pojęcie sprzeczności uznać za pojęcie pierwotne, jako że „zredukować je do pojęć prostszych byłoby niezmiernie trudno, natomiast łatwo jest rozpoznać sprzeczność jako taką. We wszystkich praktycznie przypadkach da się ona sprowadzić do postaci 1 = 2"[21]. Heyting stoi więc na stanowisku, że pojęcie sprzeczności jest wystarczająco jasne i że negacji na niej opartej można w matematyce używać.

Nie wszyscy autorzy podzielają jednak ten ostatni pogląd Heytinga. Przeciwko wykorzystywaniu sprzeczności w matematyce najwyraźniej opowiedział się G. F. C. Griss[22]. Skonstruował on intuicjonistyczny rachunek logiczny bez pojęcia negacji, w którym to rachunku wszystkie wyrażenia są albo prawdziwe, albo źle zbudowane. Podobnie M. Dummett nie przyjmuje rozwiązania Heytinga w odniesieniu do pojęcia sprzeczności i dlatego proponuje odmienne rozumienie negacji. Wedle niego mamy dowód negacji zdania *p*, jeśli mamy dowód zdania $p \rightarrow 0 = 1$. Lecz powyższej definicji Dummetta zarzucono, że nie zapewnia ona jednoznacznego sensu negacji[23]. Jakkolwiek nie wszyscy

---

czystej negatywności. Por. K. G. H o s s a c k, *A Problem about the Meaning of Intuitionist Negation*, „Mind", 49(1990), No. 394, s. 207-209.

[20] Por. H e y t i n g, *Intuicjonistyczne podstawy matematyki*, s. 33.

[21] T e n ż e, *Intuitionism* [...], s. 98. Ostatnią tezę Heyting ilustruje następującym przykładem. Rozważmy zdanie „$\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną". Wymaga ono konstrukcji liczb całkowitych *a*, *b* takich, że $a^2 = 2b^2$. Na podstawie znanego matematycznie rozumowania można przypuścić, że *a* i *b* są względnie pierwsze. Z drugiej strony *a* jest parzyste, zatem 4 dzieli a^2, a stąd 4 dzieli $2b^2$ i *b* jest parzyste; *a* i *b* mają więc wspólny podzielnik 2. Przeczy to założeniu, że *a* i *b* są względnie pierwsze. Sprzeczność (w rozumieniu Heytinga) można wyrazić w takiej oto formie: największy wspólny podzielnik dla *a* i *b* wynosi równocześnie 1 i 2. Z tego przykładu można wnioskować, że Heyting uznaje za sprzeczność utożsamienie (równość) dwóch różnych (nieidentycznych) przedmiotów.

[22] *Negationless Intuitionistic Mathematics*, p. I-IV, „Indagationes Mathematicae", 8(1946) 675-681; 12(1950) 108-115; 13(1951) 193-199, 452-471.

[23] Por. H o s s a c k, art. cyt., s. 213 n.

logicy i matematycy zgadzają się z Heytingiem w kwestii rozumienia funktora negacji, decydujemy się na kontynuację niniejszych rozważań tokiem jego myślenia jako prowadzącym dla intuicjonizmu.

Każdą matematyczną asercję można wyrazić w takiej oto postaci: „Wykonałem w swoim umyśle konstrukcję A". Matematyczną negację tej asercji można wypowiedzieć jako: „Wykonałem w swoim umyśle konstrukcję B, która wyprowadza sprzeczność z założenia, że konstrukcję A doprowadzono do końca". Natomiast zaprzeczenie matematycznej asercji, czyli faktualna negacja pierwszej asercji brzmi: „Nie wykonałem w swoim umyśle konstrukcji A". Ostatnia wypowiedź nie ma jednak charakteru matematycznego twierdzenia, lecz jest empirycznym stwierdzeniem, które może być prawdziwe lub fałszywe w zależności od tego, czy wykonałem konstrukcję czy nie[24].

W świetle uwag zawartych w powyższym akapicie wydaje się, że na gruncie logiki intuicjonistycznej dla matematycznej negacji nie będzie poprawne pytanie, czy w swoim umyśle wykonałem, czy nie wykonałem konstrukcji A. W związku ze zdaniami przeczącymi poprawna wersja pytania będzie następująca: czy wykonałem w swoim umyśle konstrukcję B, która wyprowadza sprzeczność z założenia, że inna konstrukcja (A) została doprowadzona do końca?

W intuicjonistycznym rachunku zdań funkcjonuje więc mocna matematyczna negacja, oznaczana symbolem „$\neg$". Heyting mówi, że osobliwością intuicjonistycznej negacji jest to, iż dotyczy ona tylko fałszu *de iure*, podczas gdy zazwyczaj negacja dotyczy fałszu *de facto* (negacja faktualna). „W matematyce intuicjonistycznej jedynie fałsz *de iure* odgrywa rolę; wprowadzenie zwykłego fałszu *de facto* weszłoby w konflikt z zasadą konstruowalności"[25].

W toku dotychczasowych wywodów ustalono, że zdanie matematyczne p zawsze wymaga konstrukcji matematycznej (o samej konstrukcji będzie mowa później) o pewnych danych własnościach; można zdanie to uznać dopiero po dokonaniu takiej konstrukcji. Ponadto – według intuicjonistów – konstrukcja d o w o d z i zdania p (nazywa się ją d o w o d e m p)[26].

Dowód zdania jest więc konstrukcją matematyczną, która z kolei sama może być traktowana matematycznie. Intencja takiego dowodu rodzi zatem nowe zdanie: „Zdanie p jest dowodliwe". Jeśli oznaczymy je przez „+p", to

---

[24] Por. C o o p e r, art. cyt., s. 167.

[25] H e y t i n g, *Intuitionism* [...], s. 18.

[26] Por. tamże, s. 98.

„+" będzie funkcją logiczną, mianowicie funkcją „dowodliwości". Asercje $\vdash p$ i $\vdash +p$ mają dokładnie to samo znaczenie. Jeśli bowiem p zostaje dowiedzione, dowodliwość p jest także dowiedziona, a jeśli $+p$ zostaje dowiedzione, to wypełnia się intencja dowodu p, tzn. p zostaje dowiedzione. Niemniej zdania p i $+p$ nie są identyczne. Heyting wyjaśnia to na następującym przykładzie. W obliczeniu stałej Eulera C może się zdarzyć, iż jakaś wartość wymierna, powiedzmy A, jest zawarta przez niezmiernie długi czas w przedziałach, którymi coraz ciaśniej otaczamy C, tak że ostatecznie podejrzewamy, iż C = A, tzn. oczekujemy, że kontynuując obliczanie C, stale będziemy znajdować A w takich przedziałach. Ale podejrzenie to w żadnym wypadku nie jest dowodem na to, że tak będzie zawsze. Zdanie +(C = A) zawiera zatem więcej treści niż zdanie C = A.

Jeśli natomiast zastosujemy negację do obu tych zdań, to nie tylko otrzymamy dwa różne zdania $\neg p$ i $\neg +p$; także asercje $\vdash \neg p$ i $\vdash \neg +p$ będą różne. $\vdash \neg +p$ oznacza, że przypuszczenie takiej konstrukcji, jakiej wymaga +p, jest sprzeczne. Proste oczekiwanie p nie musi jednak prowadzić do sprzeczności. Odnosząc to do przytoczonego wyżej przykładu: załóżmy, że udowodniliśmy sprzeczność założenia, iż istnieje konstrukcja dowodząca, że A leży wewnątrz każdego przedziału zawierającego C ($\vdash \neg +p$). Jednakże przypuszczenie, iż w faktycznym obliczaniu C zawsze znajdziemy A wewnątrz naszego przedziału, nie musi prowadzić do sprzeczności. Można sobie wyobrazić, że możemy dowieść o tym ostatnim założeniu, iż jego sprzeczność jest niedowodliwa, a zatem możemy uznawać jednocześnie $\vdash \neg +p$ oraz $\vdash \neg\neg p$. W takim wypadku problem, czy C = A, byłby z istoty nierozwiązalny.

Rozróżnienie między p i $+p$ znika, gdy konstrukcja jest zamierzona w samym p, możliwość bowiem konstrukcji da się dowieść tylko przez faktyczne jej dokonanie. Jeśli ograniczymy się do tych zdań, które wymagają konstrukcji, funkcja logiczna dowodliwości, ogólnie rzecz biorąc, nie pojawia się. Można nałożyć tę restrykcję, rozważając jedynie zdania postaci: „p jest dowodliwe" lub, mówiąc inaczej, traktując wszelką intencję jako wyposażoną w dodaną do niej intencję konstrukcji dla jej wypełnienia. W takim sensie – stwierdza Heyting – należy rozumieć logikę intuicjonistyczną rozwijaną bez użycia funkcji +. Jego zdaniem wprowadzenie funkcji dowodliwości do rachunku logicznego rodzi poważne komplikacje, a jej wartość praktyczna jest minimalna[27].

[27] Por. t e n ż e, *Sur la logique intuitioniste*, „Bulletin de la Classe de Science", 14(1930) 961 n.

W prawie wyłączonego środka obok negacji występuje jeszcze druga stała logiczna – alternatywa (lub). „p ∨ q” oznacza intencję wypełnianą wtedy i tylko wtedy, gdy wypełniana jest przynajmniej jedna z intencji *p* i *q*. Innymi słowy, można uznać p ∨ q wtedy i tylko wtedy, gdy można uznać przynajmniej jedno ze zdań *p* i *q*. Przypomnijmy, że – według intuicjonistów – zdanie można uznać tylko na podstawie (faktycznego) dowodu. W związku z tym można przyjąć TND dla pewnego *p* wtedy i tylko wtedy, gdy *p* zostało dowiedzione lub zredukowane do sprzeczności. Zatem dowód, że TND jest ogólnie ważnym prawem, musi polegać na podaniu metody, za pomocą której można dla dowolnego zdania dowieść samo to zdanie lub jego negację. W ten sposób formuła TND oznacza oczekiwanie na matematyczną konstrukcję (metodę dowodu) spełniającą powyższy warunek. Formuła ta jest więc zdaniem matematycznym – kwestia jego słuszności jest problemem matematycznym. Mając powyższe na uwadze, można powiedzieć, że zwolennik logiki intuicjonistycznej jest uprawniony do postawienia pytania: czy istnieje metoda, za pomocą której można dla dowolnego zdania dowieść samo to zdanie lub jego negację?

Oto przykłady, jakimi posługują się intuicjoniści, aby rozwiązać powyższy problem: Niech E oznacza zdanie „Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele”. Wtedy +E znaczyłoby „Konstrukcja będąca dowodem zdania «Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele» została wykonana”. Tak więc alternatywa

(a) +E ∨ ¬E

jest – dzięki Euklidesowi, który udowodnił (wykonał konstrukcję dowodzącą) zdanie „Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele” – prawdziwa, choć prawdziwa w sposób przygodny. Natomiast jeśli G znaczy „Każda liczba parzysta większa niż 2 ma własność Goldbacha[28]”, to

(b) +G ∨ ¬G

jest fałszywe. Jak dotychczas bowiem, ani nie udowodniono, że każda liczba parzysta większa niż 2 ma własność Goldbacha, ani nie udowodniono, że istnieje liczba parzysta większa niż 2, która nie ma własności Goldbacha. Nie jest jednak wykluczone, że któryś z tych dowodów zostanie w przyszłości wykonany.

[28] Liczba parzysta większa niż 2 ma własność Goldbacha wtedy i tylko wtedy, gdy może być przynajmniej w jeden sposób przedstawiona jako suma dwu liczb pierwszych.

Wróćmy jeszcze do definicji liczby naturalnej, podanej przez Heytinga. Dlaczego definicja druga jest, według niego, argumentem przeciwko ogólnej ważności TND? Otóż gdyby była ona poprawna, to albo istniałoby nieskończenie wiele liczb pierwszych bliźniaczych, albo ich liczba byłaby skończona. Tymczasem żaden z członów tej alternatywy nie zachodzi. Dzieje się tak dlatego, że „istnieć" w terminologii intuicjonistycznej znaczy „być skonstruowanym" (*esse* = *construere*)[29]. Konstrukcja zaś – jak to już było powiedziane – jest dowodem danego twierdzenia. Jak dotąd, nie udowodniono ani twierdzenia głoszącego, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych bliźniaczych, ani twierdzenia mówiącego, że ich liczba jest skończona. Ten fakt jest dla Heytinga oraz innych intuicjonistów powodem do odrzucenia TND. Tylko wtedy bowiem mamy prawo uznać pewien wzór za ogólnie obowiązujący, jeśli każde zdanie powstałe z tego wzoru w wyniku prawidłowego podstawienia jest prawdziwe.

Jak się wydaje, formalnym zapisem odrzuconego prawa byłoby raczej

(c) $+p \lor \neg p$

niżeli (d) $p \lor {\sim}p$.

(c) – zgodnie z interpretacją intuicjonistyczną – wyraża, że dla danego zdania mamy racje przyjąć to zdanie lub mamy racje przyjąć jego negację. Tak zinterpretowana formuła jest oczywiście fałszywa, czego dowodem jest (b) oraz wyżej przytoczony nie rozstrzygnięty problem ilości liczb pierwszych bliźniaczych. Można więc podać przykłady zdań matematycznych, dla których nie mamy żadnego dowodu ani tych zdań, ani ich negacji, co oznacza, że nie mamy racji ani do ich przyjęcia, ani odrzucenia. Używając nieco odmiennej terminologii, intuicjonistyczne „prawo wyłączonego środka" można sformułować następująco: „istnieje efektywna procedura wykazania, że *p*, lub istnieje efektywna procedura wykazania, że nie-*p*"[30].

Tymczasem klasyczne prawo wyłączonego środka (KTND), którego zapisem formalnym jest (d), nie wydaje się związane z żadną efektywną procedurą dowodową. Głosi ono tylko, że każde zdanie *p* jest prawdziwe lub prawdziwe jest jego zaprzeczenie. Nie możemy natomiast wywnioskować z KTND, że każde zdanie jest dowodliwe lub dowodliwa jest jego negacja. Alternatywa dowolnego zdania i jego negacji jest zawsze prawdziwa, mimo że nie zawsze

[29] Por. H e y t i n g, *Intuitionism* [...], s. 2; M. D u m m e t t, *The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic*, [w:] t e n ż e, *Truth and Other Enigmas*, Duckworth 1978, s. 228.

[30] E. J. L e m m o n, G. P. H e n d e r s o n, *Is There Only One Correct System of Modal Logic?*, „Aristotelian Society Supplement", 33(1959) 27.

potrafimy wskazać, który jej składnik jest prawdziwy, a tym bardziej podać jego dowód.

Ogólny wniosek, jaki można wyprowadzić z powyższych analiz, jest następujący: intuicjonista kiedy odrzuca „prawo wyłączonego środka", nie odrzuca KTND /(d)/, ale alternatywę wyrażoną w intuicjonistycznym języku, tylko zewnętrznie analogiczną do KTND. Odrzucane prawo $+p \vee \neg p$ N. Cooper[31] nazywa „udawanym prawem wyłączonego środka". Natomiast KTND wychodzi nietknięte z całej tej krytyki, a co ciekawsze – intuicjoniści zdają się nie być nim w ogóle zainteresowani. Tak np. intuicjoniści nie zaprzeczają ogólnej ważności podstawienia $p \vee {\sim}p$

(e) $+p \vee {\sim}{+p}$,

które możemy odczytać jako „konstrukcja dowodząca *p* została wykonana lub nie została wykonana". Nie jest ono jednak zdaniem matematycznym, lecz wypowiedzią na temat stanu rzeczy i w tym sensie nie interesuje intuicjonisty.

W swojej krytyce logiki klasycznej Brouwer i jego następcy interpretują prawo wyłączonego środka – jak starano się to wykazać – jako stwierdzające konstruktywistyczną dowodliwość *p* lub jego negacji. Tak zinterpretowane jest ono twierdzeniem, którego równie trudno dowieść, jak je obalić. Heyting mówi, że kwestia jego słuszności jest problemem nierozwiązalnym środkami matematycznymi[32]. W tej sytuacji wykluczenie prawa wyłączonego środka z logiki, jako uprzedniego wobec matematyki, wydaje się stanowiskiem naturalnym[33]. Innymi słowy, prawdą jest, że intuicjoniści słusznie odrzucają prawo wyłączonego środka, lecz jest to ich własne prawo – „intuicjonistyczne TND" (ITND), natomiast z pewnością nie odrzucają oni klasycznego prawa wyłączonego środka (KTND).

Ponadto krytykę logiki klasycznej w jej powiązaniu z konstruktywistyczną matematyką można też traktować jako specjalnego rodzaju dyskusję ogólną dotyczącą tego, co prawdziwe i poznawalne. Prawo wyłączonego środka w logice klasycznej mówi tylko tyle, że każde zdanie *p* jest prawdziwe lub jest fałszywe. Nie można z niego wywnioskować, że każde zdanie lub jego negacja są poznawalne, chyba że założylibyśmy poznawalność wszystkiego, co

---

[31] Art. cyt., s. 170.

[32] Por. H e y t i n g, *Intuicjonistyczne podstawy matematyki*, s. 34.

[33] Niektóre inne prawa pozostają przy intuicjonistycznej interpretacji nieproblematyczne. Na przykład prawo niesprzeczności jest ogólnie ważne, gdyż zawsze można dowieść, że dane zdanie nie jest równocześnie dowodliwe i obalalne.

prawdziwe. „Prawo wyłączonego środka" w logice intuicjonistycznej (ITND), w odróżnieniu od KTND, głosi, że albo wiadomo, iż *p*, albo wiadomo, że negacja *p* (skoro można dowieść *p* lub jego negacji). Innymi słowy, intuicjoniści utrzymują, że dowód i prawda są bardzo ściśle powiązane, a nawet utożsamiają się: zdanie jest prawdziwe tylko wtedy, gdy jest udowodnione. Mówiąc językiem K. Ajdukiewicza, intuicjoniści posługują się pojęciem prawdy w taki sposób, iż przez zdanie prawdziwe rozumieją zdanie czyniące zadość kryterium prawdy[34], którym to kryterium byłaby (intuicjonistyczna) dowodliwość.

Z uwagi na fakt, że w logice intuicjonistycznej za zmienne zdaniowe można podstawiać tylko zdania matematyczne, ITND wydaje się równoznaczne z „zasadą rozwiązalności każdego matematycznego problemu"[35]. Heyting wyjaśnia, że problem w matematyce jest stawiany przez intencję, której wypełnienia się poszukuje. Będzie rozwiązany, gdy intencja zostanie wypełniona przez konstrukcję albo gdy udowodni się, że owa intencja prowadzi do sprzeczności. Kwestię rozwiązalności można więc zredukowć do kwestii dowodliwości[36]. Jak wyżej wykazano, ITND głosi, że każde zdanie matematyczne jest dowodliwe albo dowodliwa jest jego negacja. Wobec faktu istnienia nierozwiązalnych problemów we współczesnej matematyce jasne jest, że ITND nie może być zaakceptowane.

Dotychczasowe analizy doprowadziły do wniosku, że stałe logiczne w logice klasycznej i odpowiednie stałe w logice intuicjonistycznej mają różne znaczenie. Biorąc pod uwagę ten wynik, dla uniknięcia nieporozumień należałoby na oznaczenie funktorów negacji i alternatywy w obu systemach używać różnych symboli. Odnośnie do negacji ten postulat został spełniony, mianowicie dwa symbole: „~" i „¬" funkcjonowały na oznaczenie odpowiednio negacji klasycznej oraz intuicjonistycznej. Czy odrzucenie prawa wyłączonego środka przez intuicjonistów jest zatem odrzuceniem klasycznej negacji, natomiast alternatywa pozostaje poza krytyką? Analizy powyższe wydają się

[34] K. A j d u k i e w i c z, *Epistemologia i semiotyka*, [w:] t e n ż e, *Język i poznanie*, t. II, Warszawa 1985, s. 114.

[35] Cooper (art. cyt., s. 171) uważa, że nurt intuicjonistyczny w matematyce mógłby być kontynuowany tylko wówczas, gdyby każde zdanie wyrażalne w języku logiki i matematyki było konieczne albo niemożliwe. Ze względu na trudności związane z użyciem przez niego niejednoznacznych pojęć modalnych i braku wyjaśnień co do sposobu ich rozumienia nie podejmuję tutaj tego zagadnienia.

[36] Por. H e y t i n g, *Intuicjonistyczne podstawy matematyki*, s. 34.

przemawiać za tezą W. V. O. Quine'a[37], że takie rozróżnienie jest nietrafne: „[...] kiedy się raz zakłóci wzajemne związki operatorów logicznych, można powiedzieć, że zmieniło się wszystko [...] nazwy i symbole negacji i alternatywy przenoszą się na logikę nieklasyczną, taką jak intuicjonizm, tylko przez luźną i arbitralną analogię".

Ponieważ, według intuicjonistów, zdanie można uznać tylko wtedy, gdy ma się jego dowód, interpretacja stałych logicznych intuicjonistycznego rachunku zdań jest podawana w terminach dowodu. Można uznać alternatywę $p \vee q$ wtedy i tylko wtedy, gdy można uznać (tzn. udowodnić) przynajmniej jedno ze zdań *p*, *q*. Można uznać koniunkcję $p \wedge q$ wtedy i tylko wtedy, gdy można uznać (udowodnić) zarówno *p*, jak i *q*. Implikację $p \rightarrow q$ można uznać wtedy i tylko wtedy, gdy dysponujemy konstrukcją A, która dołączona do konstrukcji dowodzącej *p* (założywszy, że ta ostatnia daje się zrealizować) da automatycznie konstrukcję dowodzącą *q*. (Innymi słowy – dowód zdania *p* oraz A tworzą dowód dla *q*)[38]. Przy takiej interpretacji żaden z powyższych funktorów nie jest funktorem klasycznego rachunku zdań, lecz są one do pewnego stopnia analogiczne.

Kierując się sugestią Heytinga, aby utożsamić „jest intuicjonistycznie prawdziwy" z „jest (intuicjonistycznie) dowodliwy", Gödel[39] proponuje taką interpretację intuicjonistycznego rachunku zdań, przy której *implicite* przyjmowałoby się w nim jeszcze jeden funktor zdaniotwórczy od jednego argumentu zdaniowego – oznaczmy go przez D. W logice intuicjonistycznej, jeśli w którymkolwiek miejscu występuje dowolna zmienna *p* lub jej negacja $\neg p$, to faktycznie występowałoby tam odpowiednio wyrażenie Dp, ~Dp (D~Dp). Wyrażenie Dp należałoby odczytywać, zgodnie z sugestią Lemmona, jako „istnieje efektywna procedura wykazania, że *p*" lub krócej: „istnieje dowód dla *p*". Funktor D jest oczywiście funktorem nieekstensjonalnym (przy prawdziwości *p*, Dp może być prawdziwe bądź fałszywe w zależności od tego, czy mamy jego dowód czy nie).

Jak wynika z dotychczasowych rozważań, kluczowym elementem intuicjonistycznej filozofii jest jej konstruktywizm. Ogólnie rzecz biorąc – zdaniem Quine'a[40] – konstruktywizm w matematyce nie toleruje metod, które pozwa-

[37] *Filozofia logiki*, tł. [z jęz. ang.] H. Mortimer, Warszawa 1977, s. 129.

[38] Por. H e y t i n g, *Intuitionism* [...], s. 98 n.

[39] *An Interpretation of the Intuitionistic Sentential Logic*, [w:] *The Philosophy of Mathematics*, ed. J. Hintikka, Oxford 1969, s. 128 n.

[40] Dz. cyt., s. 130.

lają na stwierdzenie istnienia pewnego rodzaju przedmiotów bez okazania, w jaki sposób można taki przedmiot znaleźć. „Znaleźć" znaczy „obliczyć" w przypadku liczby i „skonstruować" w przypadku figury geometrycznej czy zbioru. Nie można więc tylko postulować istnienia obiektów, jak to się na przykład czyni w nie akceptowanej przez niektórych intuicjonistów metodzie aksjomatycznej, lecz należy je uprzednio skonstruować. Podobnie ma się rzecz z własnościami przedmiotów. Obiekty matematyczne oraz ich własności to konstrukcje myślowe (idealnego) matematyka.

W matematyce (logice) istnieje tylko to, co konstruowalne przez myśl. Jednakże w poglądach samych intuicjonistów dotyczących rozumienia pojęcia konstruowalności (konstrukcji), przede wszystkim jego zakresu, występują znaczne rozbieżności. Nie mogą oni uzgodnić między sobą stanowisk, jeśli chodzi o określenie tego, co jest konstruktywne, a tym samym ustalenie, jakie metody konstrukcji powinny być jeszcze dopuszczalne w matematyce, a jakie należy z niej wyeliminować. Niektórzy, jak np. Heyting, postulują niedefiniowalność pojęcia konstrukcji, akcentując jego czysto intuicyjny charakter. Faktycznie w pismach Brouwera i Heytinga pojęcie to jest notorycznie wieloznaczne. Wielu intuicjonistów ogranicza się do podania przykładów obiektów uważanych za konstruktywne oraz takich, których nie można zaliczyć do konstruktywnych. Przyjrzyjmy się różnym propozycjom rozwiązań w tej sprawie.

Według najbardziej skrajnych ujęć liczba istnieje tylko wtedy, gdy jest aktualnie skonstruowana przez twórczy podmiot. Funkcjonuje też nieco zmodyfikowana wersja tego stanowiska poprzez wprowadzenie odniesienia temporalnego: liczba istnieje, o ile została skonstruowana przez jakiegoś członka matematycznej wspólnoty. Stanowisko Heytinga w tej kwestii jest niejasne. Raz zdaje się on dopuszczać tylko aktualnie dokonane konstrukcje, kiedy udziela negatywnej odpowiedzi na pytanie Mengera czy „$(\exists x)Fx$" było prawdziwe, zanim liczba mająca własność F została skonstruowana. Innym razem proponuje on, aby intuicjonista nie ograniczał się do aktualnie wykonanych konstrukcji, gdyż wtedy musiałby zredukować akceptowalną część matematyki do twierdzeń dotyczących względnie małych liczb naturalnych. Faktem jest jednak, iż większość intuicjonistów nie akceptuje tak znacznego ograniczenia matematyki. Zatem obok (1) aktualnie dokonanych konstrukcji Heyting proponuje przyjąć także (2) ogólne metody konstrukcji oraz (3) hipotetyczne konstrukcje. Te ostatnie są wymagane dla dowodu ogólnych lub negatywnych twierdzeń. Heyting[41] podaje przykład dowodu twierdzenia

$$\vdash \neg(2 + 2) = 5,$$

który przebiegałby następująco:
1. konstrukcja liczby 2,
2. konstrukcja liczby 2 + 2,
3. konstrukcja liczby 5,
4. hipotetyczna konstrukcja 1 – 1 (jedno-jednoznacznej) korespondencji między rezultatami 2. i 3.
5. ogólna metoda dedukowania sprzeczności z 4.

Podobnie (2) i (3) byłyby wymagane do dowodu ogólnego twierdzenia, takiego jak np. $\vdash$ a + b = b + a. W związku z tym w kręgu intuicjonistów zrodziło się pytanie, jaki jest właściwy sens „możliwej do wykonania, lecz aktualnie nie wykonanej konstrukcji".

Żadna z prób sprecyzowania pojęcia konstruowalności, jak dotąd, nie zakończyła się sukcesem[42]. Dlatego Heyting proponuje, aby traktować je jako pojęcie pierwotne *implicite* zdefiniowane przez prawa intuicjonistycznej logiki. Ale to rozwiązanie wydaje się co najmniej niesatysfakcjonujące, jeśli nie błędne, gdyż intuicjoniści akceptują w swoim rachunku tylko takie prawa, które stosują się do wymagań konstruktywistycznych. A więc zasada konstruowalności zdaje się uprzednia wobec logicznych praw. Tak np. zasada wyłączonego środka (intuicjonistyczne rozumienie) odpadła, gdyż w niektórych wypadkach nie można podać ani konstruktywistycznego dowodu dla $(\exists x)Fx$, ani dla $\neg(\exists x)Fx$. Na tę trudność może już naprowadzić sam komentarz Heytinga dotyczący podanych przez niego aksjomatów intuicjonistycznej logiki zdań. Holenderski logik podaje tu usprawiedliwienie aksjomatu X. $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$, który – według niego – może nie być intuicyjnie jasny. Chociaż Heyting przedstawia ten aksjomat jako doprecyzowanie sensu implikacji, faktycznie propozycja ta oznacza rozszerzenie sensu konstruowalności. „Załóżmy, że $\vdash \neg p$, tzn. iż z założenia o udowodnieniu *p* wyprowadziliśmy sprzeczność. Można to uważać za swego rodzaju konstrukcję, która, dołączona do dowodu *p* (który nie może istnieć), daje dowód *q*"[43]. Tak rozsze-

[41] *Remarques sur le constructivisme*, „Logique et Analyse", 3(1960) 179. Zob. także jego artykuł *Blick von der intuitionistischen Warte* („Dialectica", 12(1958) 332-345).

[42] W literaturze najbardziej znane są próby S. C. Kleene'a oraz A. Churcha.

[43] H e y t i n g, *Intuitionism* [...], s. 102.

rzony sens konstruowalności okazał się nie do przyjęcia przez niektórych intuicjonistów. Pomijając w aksjomatyce Heytinga kontrowersyjny aksjomat X, otrzymuje się tzw. minimalny rachunek zdań, będący formalizacją intuicjonistycznie ogólnie ważnych formuł, w którym inaczej jest rozumiane pojęcie konstruowalności (węziej niż u Heytinga). Ta propozycja pochodzi od Johanssona (1936), natomiast wcześniej rosyjski uczony A. N. Kołmogorow (1925) skonstruował system równoważny z minimalnym rachunkiem. Według Kołmogorowa system ten przedstawia właściwą formalizację postulatów intuicjonizmu zawartych w pismach Brouwera[44].

Podsumowując ostatni wywód, można powiedzieć, że pojęcie konstruowalności jest podatne na szerokie bogactwo interpretacji. Jeśli jest interpretowane wąsko jako „aktualnie wykonana konstrukcja", wówczas znacznie ogranicza się zakres klasycznej matematyki, który byłby faktycznie do przyjęcia. To ograniczenie jest jednak zbyt duże, aby mogło być powszechnie zaakceptowane przez intuicjonistów. Jeśli natomiast jest interpretowane szeroko, to intuicjonista staje się podatny na krytykę ze strony ścisłego finitysty analogiczną do jego własnej krytyki matematyki klasycznej. Pozostaje zatem nadal problem, jak sprecyzować szerszą interpretację „konstruowalności", czyli jakiego sensu nadać „możliwej do wykonania konstrukcji".

Warto zaznaczyć, że zasadniczym powodem odrzucenia logiki klasycznej przez intuicjonistów jest stosowanie w niej niekonstruktywnych dowodów twierdzeń egzystencjalnych. W klasycznym rachunku logicznym istnieją tezy pozwalające na takie dowody; należą do nich np. analizowane tu prawo wyłączonego środka oraz prawo podwójnej negacji $\sim\sim p \rightarrow p$. Z TND otrzymujemy tezę: $(\exists x)Fx \vee \sim (\exists x)Fx$, a stąd oraz z $\sim\sim (\exists x)Fx$ za pomocą reguły opuszczania alternatywy otrzymujemy wyrażenie $(\exists x)Fx$. Udowodniwszy zatem wyrażenie $\sim\sim (\exists x)Fx$, np. przez wykazanie, że wyrażenie $\sim (\exists x)Fx$ prowadzi do sprzeczności, dowodzimy tym samym na podstawie TND wyrażenie $(\exists x)Fx$, choć nie potrafimy podać przykładu takiego *a*, że Fa.

---

[44] Zdaniem Kołmogorowa Heyting niewłaściwie interpretuje możliwość wykonania konstrukcji, kiedy przyjmuje, że konstrukcję B stanowi wyprowadzenie sprzeczności z założenia, iż konstrukcja A została doprowadzona do końca. Aksjomat X, odpowiedzialny za tę interpretację, „nie ma i nie może mieć żadnych intuicyjnych podstaw, odkąd twierdzi on coś o konsekwencji czegoś niemożliwego: musimy przyjąć B, jeśli prawdziwy sąd A jest traktowany jako fałszywy". Zob. A. N. Kolmogorov, *On the Principle of Excluded Middle*, [w:] *From Frege to Gödel*, ed. J. v. Heijenoort, Harvard University Press 1967, s. 414-437 (cytat – s. 421).

Podobnie z prawa podwójnego przeczenia $\sim\sim p \rightarrow p$ otrzymujemy wyrażenie: $\sim\sim (\exists x)Fx \rightarrow (\exists x)Fx$, pozwalające na udowodnienie wyrażenia $(\exists x)Fx$ na podstawie wyrażenia $\sim\sim(\exists x)Fx$. Słynny przykład Heytinga z rozwinięciem dziesiętnym liczby π pokazuje, że niemożność niemożności pewnej własności nie jest jeszcze dowodem tej własności. Rozważmy rozwinięcie dziesiętne liczby π i podpisujmy pod nim ułamek dziesiętny $\varsigma = 0{,}333$ ... tak długo, aż w rozwinięciu π pojawi się po raz pierwszy układ cyfr 0123456789. Jeżeli 9 z pierwszego takiego ciągu wystąpi na k-tym miejscu po przecinku, to

$$\varsigma = \frac{10^k - 1}{3 \times 10^k}.$$

Matematyka klasyczna twierdzi, że liczba ς jest wymierna. Załóżmy, że ς nie jest wymierne. Wtedy równość $\varsigma = \frac{10^k - 1}{3 \times 10^k}$ jest niemożliwa, a zatem żaden ciąg cyfr 0123456789 nie występuje w rozwinięciu dziesiętnym liczby π. Wtedy jednak $\varsigma = 1/3$, czyli ς jest liczbą wymierną. To jest jednak niemożliwe, bo sprzeczne z założeniem. A więc ostatecznie liczba ς jest wymierna.

Rozumowanie powyższe jest nie do zaakceptowania dla Heytinga (intuicjonistów). Na podstawie faktu, iż założenie, że liczba ς nie jest wymierna, doprowadziło do sprzeczności, nie mamy prawa twierdzić, że liczba ς jest wymierna. Oznaczałoby to bowiem, że potrafimy wyliczyć liczby całkowite p i q takie, że $\varsigma = p/q$, a to wymaga wskazania ciągu 0123456789 w rozwinięciu dziesiętnym π lub udowodnienia, iż taki ciąg nie występuje. Nie potrafimy jednak ani jednego, ani drugiego; a zatem nie możemy twierdzić, że liczba ς jest wymierna[45].

Powyższy przykład przemawia za tym, że intuicjoniści przyjmują inną koncepcję praw logiki. O ile w logice klasycznej prawa logiczne o postaci implikacyjnej są podstawą reguł prowadzących od zdań prawdziwych do zdania prawdziwego, o tyle w intuicjonizmie reguły inferencji mają prowadzić od zdań udowodnionych do zdania udowodnionego. Konsekwentnie więc prawa logiczne, na podstawie których takie reguły inferencji są tworzone, muszą być mocniejsze w logice intuicjonistycznej aniżeli w logice klasycznej.

Z. Zawirski zauważa także, że intuicjoniści, chcąc być konsekwentni, muszą odrzucić jednostronną zasadę podwójnego przeczenia, gdyż w przeciwnym wypadku musieliby uznać również prawo wyłączonego środka. Jest tak dla-

[45] Por. H e y t i n g, *Elementy intuicjonizmu*, s. 73.

tego, że to ostatnie prawo można wyprowadzić z prawa podwójnej negacji (o postaci implikacyjnej). Podstawiając w prawie $\sim\sim p \rightarrow p$ za zmienną *p* wyrażenie $p \vee \sim p$, otrzymujemy $\sim\sim (p \vee \sim p) \rightarrow p \vee \sim p$; intuicjoniści przyjmują zasadę absurdalności absurdalności wyłączonego środka /$\sim\sim (p \vee \sim p)$/, dzięki której za pomocą reguły odrywania można otrzymać prawo wyłączonego środka[46].

Sumując rezultaty powyższych dociekań, można powiedzieć, że w intuicjonistycznym rachunku zdań nie obowiązuje prawo wyłączonego środka, lecz w jego intuicjonistycznym rozumieniu. Natomiast intuicjoniści nie są w ogóle zainteresowani klasycznym prawem. Intuicjonistyczna interpretacja prawa wyłączonego środka może przybrać postać następującą: „można wykazać (udowodnić), że *p*, lub można wykazać (udowodnić), że nie-*p*" czy też „istnieje efektywna procedura wykazania, że *p*, lub istnieje efektywna procedura wykazania, że nie-*p*". Dlaczego intuicjoniści przechodzą obojętnie obok interpretacji klasycznej? Nigdzie wprost nie poruszają oni zagadnienia obowiązywalności lub nieobowiązywalności klasycznego prawa wyłączonego środka. Wydaje się, że odpowiedzi na powyższe pytanie należy szukać na drodze analizy sposobu rozumienia samej logiki i jej przedmiotu. Logika w ujęciu intuicjonistycznym wyrosła w innym nastawieniu badawczym aniżeli logika klasyczna. Logicy klasyczni, formułując swoje prawa, w zasadzie odpowiadają na podstawowe pytanie ukazane w tym artykule, stawiane przez przedstawicieli wszystkich typów wiedzy teoretycznej, którzy mają ontologiczne nastawienie w stosunku do badanej przez nich zastanej rzeczywistości. Logicy intuicjonistyczni nie stawiają ogólnego ontologicznego pytania. Ewentualne pytania naukotwórcze intuicjonistów, których wyraźnego sformułowania m.in. poszukiwano w tym artykule, są związane z osobliwie pojętą matematyką i logiką – która w ich ujęciu – jest tylko najogólniejszą częścią matematyki. Twierdzenia matematyki i logiki intuicjonistów nie przekazują prawd o świecie zewnętrznym. Można o tych twierdzeniach powiedzieć, że komunikują, iż została wykonana pewna myślowa konstrukcja matematyczna. Dotyczą więc zdolnej do konstruowania myśli matematycznej.

[46] Por. Z. Z a w i r s k i, *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, „Kwartalnik Filozoficzny", 16(1939/46), z. 2-4, s. 188 n.

THE QUESTION OF THE NON-VALIDITY OF THE LAW OF EXCLUDED MIDDLE IN THE INTUITIONISTIC PROPOSITIONAL CALCULUS

S u m m a r y

The paper discusses the problem of whether the law of excluded middle is valid or not, a question that has been posed in the intuitionistic propositional calculus. Accordingly, the author investigates how the intuitionists understood the law of excluded middle and the reasons for its refutation. The relationship between the intuitionistic law of excluded middle and its classical equivalent has been established. Moreover, the author sought to answer the main questions which the representatives of intuitionistic logic pose (and answer). The final part of the paper addresses the issue of constructivism as the key element of intuitionistic philosophy.

Translated by Jan Kłos