ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLVI-XLVII, zeszyt 1 – 1998-1999

BOŻENA CZERNECKA
Lublin

INTUICJONISTYCZNA LOGIKA ZDAŃ A INNE RACHUNKI ZDANIOWE W UJĘCIU NIEKTÓRYCH AUTORÓW

W literaturze logicznej nierzadko można spotkać opinie, iż spośród systemów logicznych różnych od klasycznego rachunku logicznego logika intuicjonistyczna stanowi najbardziej atrakcyjny przedmiot badań. Ponadto mówi się, że przy bliższym poznaniu wydaje się ona systemem dość naturalnym, ale w jakimś trudnym do sprecyzowania sensie.

„Logika intuicjonistyczna nie jest tak swojska, wygodna, prosta i piękna, jak nasza logika – pisze W. V. O. Quine – brak jej przejrzystości [...], jej spójnikom zdaniowym chce się przypisać jakiś intuicyjny sens [...], jednak te wyjaśnienia okazują się mętne"[1]. Amerykański logik zauważa, że z tej przyczyny w badaniach nad logiką intuicjonistyczną dominuje tendencja do pomijania refleksji nad jej naturą i przechodzenia wprost do formalnych badań, dotyczących głównie własności systemu aksjomatycznego intuicjonistycznej logiki zdań sporządzonego przez ucznia twórcy intuicjonizmu Arenda Heytinga. To drugie zadanie wydaje się bowiem łatwiejsze, biorąc pod uwagę wyspecjalizowany aparat formalny współczesnej logiki i matematyki.

Celem niniejszego artykułu będzie próba odpowiedzi na pytanie, czym jest logika intuicjonistyczna, dokładniej mówiąc: jaki jest jej status w stosunku do innych rachunków zdaniowych, w szczególności do klasycznej logiki zdań. Udzielenie odpowiedzi na powyższe pytanie może być dokonane przy wykorzystaniu prac niektórych, bardziej znanych logików współczesnych zajmują-

[1] *Filozofia logiki*, tł. [z jęz. ang.] H. Mortimer, Warszawa 1977, s. 129 n.

cych się wprost bądź przy okazji innych zagadnień interesującą nas tu problematyką. Oczywiście praca ta nie ma aspiracji do systematycznego wyłożenia wszystkich poglądów w tej sprawie.

Logika intuicjonistyczna, zapoczątkowana przez holenderskiego matematyka Luitzena E. J. Brouwera, jest niewątpliwie przykładem logiki nieklasycznej, ale sam termin „logika nieklasyczna" bywa różnie rozumiany[2]. S. Haack[3] wyróżnia systemy formalne, które są alternatywne w sensie mocnym albo w sensie słabym w stosunku do logiki klasycznej. Systemy alternatywne w sensie mocnym jako konkurencyjne względem logiki klasycznej chcą ją zastąpić we wszystkich lub tylko niektórych jej zastosowaniach. Alternatywność w sensie słabym zazwyczaj nie pociąga za sobą rywalizacji z logiką klasyczną, lecz jej dopełnienie (rozszerzenie). Systemy alternatywne w stosunku do klasycznego, to – mówiąc językiem Haack – systemy dewiacyjne. System jest dewiacją innego systemu, jeżeli posługuje się tym samym słownikiem, lecz ma inne prawa (poprawne inferencje). „Logika dewiacyjna" jest dewiacją systemu logiki klasycznej. Dany system może być zarówno rozszerzeniem, jak i dewiacją logiki klasycznej, kiedy dołącza on nowe słownictwo, a więc także nowe prawa i równocześnie różni się od logiki klasycznej pod względem praw dotyczących wyłącznie wspólnego słownika.

Wśród logików dość powszechne jest przekonanie, iż do systemów dewiacyjnych należą logiki wielowartościowe, wliczając do nich m.in. logikę intuicjonistyczną albo stawiając ją obok nich. Systemy te bowiem przy wspólnym słowniku z logiką klasyczną nie mają pewnych jej praw, takich jak np. prawo wyłączonego środka. Wydaje się jednak, iż sprawa powyższa, czyli zagadnienie stosunku logiki intuicjonistycznej do klasycznej, ewentualna ich konkurencyjność, wymaga bardziej szczegółowej analizy. Dlatego najpierw zajmiemy się zagadnieniem relacji logiki intuicjonistycznej do logik wielowartościowych, aby w końcowej partii ustosunkować się do wyżej postawionej kwestii.

W literaturze filozoficzno-logicznej można spotkać stwierdzenia typu: „inną postacią logiki trójwartościowej jest logika intuicjo-

[2] W literaturze polskiej utrzymuje się powszechnie, iż wyznacznikami klasyczności danego systemu są ekstensjonalność wszystkich występujących w nim funktorów oraz zasada dwuwartościowości. W myśl tego określenia do logiki klasycznej zalicza się klasyczny rachunek logiczny, prototetykę, ontologię Leśniewskiego i sylogistykę Arystotelesa. Zob. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991, s. 200.

[3] *Deviant Logic*, Cambridge University Press 1974, s. 1-3.

nistyczna, stworzona przez matematyków holenderskich L. E. J. Brouwera i A. Heytinga"[4] albo „Heyting podjął zasadniczą ideę Brouwera i opracował system n i e d w u w a r t o ś c i o w e g o [podkr. – B. Cz.] rachunku zdań"[5], albo też „wartość poznawcza logik w i e l o w a r t o ś c i o w y c h [podkr. – B. Cz.] [...] jest niewielka, jeśli pominąć logikę intuicjonistyczną"[6].

Nie bez znaczenia wydaje się również fakt, iż jednym z pierwszych, którzy na gruncie polskim zajęli się logiką intuicjonistyczną, był J. Łukasiewicz, twórca pierwszych niedwuwartościowych rachunków zdań. W swojej pracy *O intuicjonistycznym rachunku zdań* polski logik pisze: „Wydaje mi się, że wśród znanych dotąd w i e l o w a r t o ś c i o w y c h [podkr. – B. Cz.] systemów logiki rachunek intuicjonistyczny jest najbardziej intuicyjny i najelegantszy"[7]. Przede wszystkim stworzona przez Łukasiewicza logika trójwartościowa z trzecią, obok prawdy i fałszu, wartością logiczną bywa często punktem odniesienia dla analiz czynionych w związku z logiką Heytinga (Zawirski). Stwierdza się bowiem, iż w logice intuicjonistycznej prawo wyłączonego środka (a także inne odpowiedniki praw logiki klasycznej), podobnie jak w logice Łukasiewicza, nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe, lecz ma właśnie trzecią wartość[8].

Historycznie rzecz ujmując, po sformalizowaniu przez Heytinga intuicjonistycznego rachunku zdań poszukiwano odpowiedzi na pytanie: Czy intuicjonistyczna logika zdaniowa jest logiką trójwartościową (jak chciał Czeżowski), czy może jakąś inną postacią logiki wielowartościowej? Innymi słowy, pytano: Ilowartościowy jest intuicjonistyczny rachunek zdań? Jaka jest jego adekwatna matryca? Do powyższych można jeszcze dołączyć (rzadko stawiane, lecz ważne z naszego punktu widzenia) następujące pytania: Jak należy interpretować wartości logiczne matrycy tej logiki, w szczególności jaki jest status ontyczny semantycznych korelatów tych wartości? Jeśli faktycznie w logice intuicjonistycznej zostaje uchylona zasada dwuwartościowości, to czy klasycz-

[4] Zob. T. C z e ż o w s k i, *Logika*, Warszawa 1968, s. 76.

[5] Zob. T. K o t a r b i ń s k i, *Wykłady z dziejów logiki*, Warszawa 1985, s. 123.

[6] Zob. W. P o g o r z e l s k i, *Elementarny słownik logiki formalnej*, Białystok 1989, s. 383 (hasło: *Logiki wielowartościowe*).

[7] Zob. J. Ł u k a s i e w i c z, *O intuicjonistycznym rachunku zdań*, [w:] t e n ż e, *Z zagadnień logiki i filozofii*, pod red. J. Słupeckiego, Warszawa 1961, s. 267.

[8] Z. Z a w i r s k i, *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, „Kwartalnik Filozoficzny", 16(1939), z. 2-4, s. 199-202.

ny podział zdań na prawdziwe i fałszywe zostaje wzbogacony i ewentualnie o jakie nowe wartości wzbogacony, czy też zmienione zostają klasyczne pojęcia prawdy i fałszu, a tym samym wprowadza się nowy podział zdań?

Zasadne będzie więc w tym miejscu prześledzenie motywów, które skłaniały pewnych autorów do uznawania logiki Brouwera-Heytinga za jedną z postaci logiki wielowartościowej. Intuicjoniści utrzymują, że klasyczna logika jest w pewnym sensie niepoprawna i nie można jej „poprawić" przez odrzucenie niektórych klasycznych praw. Niezgodność sięga znacznie głębiej, a wiąże się ona z radykalnie odmiennym spojrzeniem na naturę i status samej logiki.

U narodzin intuicjonizmu leżała chęć zaradzenia groźbie sprzeczności w matematyce. Przed taką bowiem groźbą stanęła ona u progu XX w. Odkryte przez B. Russella i innych uczonych antynomie podważyły system wiedzy matematycznej zbudowany przez G. Cantora. Brouwer zaproponował w związku z tym środki bardzo radykalne, które doprowadziły w efekcie do gruntownej przebudowy całej matematyki. Przede wszystkim matematyka intuicjonistyczna odrzuca wszelkie niekonstruktywne środki dowodowe, tj. sposoby dowodzenia nie podające konstrukcji postulowanych obiektów. W stosowaniu dowodów nie wprost Brouwer widział źródło błędów matematyki klasycznej. Twierdzenia matematyki intuicjonistycznej to zdania stwierdzające, że została wykonana pewna konstrukcja myślowa[9].

Odrzucenie dowodów niekonstruktywnych musiało prowadzić w konsekwencji do odrzucenia logiki klasycznej, która do takich dowodów uprawniała. Podważyć należało przede wszystkim prawo wyłączonego środka i prawo podwójnego przeczenia jako implikacja CNNpp. Ponadto, według intuicjonistów, logika nie stanowi podstawy ani punktu wyjścia matematyki[10]. Co więcej, Brouwer głosi, że to logika opiera się na matematyce, jest więc wtórna w stosunku do niej – może ona zawierać twierdzenia matematyczne o najwyższym stopniu ogólności[11].

[9] L. E. J. B r o u w e r, *Consciousness, Philosophy and Mathematics*, [w:] *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy 1948*, ed. E. W. Beth, H. J. Pos, J. H. A. Hollak, Amsterdam 1949, s. 1235-1249. Zdaniem Quine'a konstruktywizm w matematyce nie toleruje metod, które nie pozwalają na stwierdzenie istnienia pewnego rodzaju przedmiotów bez okazania, w jaki sposób można taki przedmiot znaleźć. „Znaleźć" znaczy „obliczyć" w przypadku liczby lub „skonstruować" w przypadku figury geometrycznej czy zbioru. Por. Q u i n e, dz. cyt., s. 130.

[10] Por. A. H e y t i n g, *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam 1966, s. 6.

[11] Zob. L. E. J. B r o u w e r, *On the Foundations of Mathematics*, [w:] *Collected Works*, vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. A. Heyting, Amsterdam–Oxford–New York 1975, s. 72-74.

Obiekt dociekań, który odkrył Brouwer, wymaga więc innego typu logiki niż logika klasyczna i dlatego – zdaniem Heytinga – powstała logika intuicjonistyczna. Wedle intuicjonistów zasada wyłączonego środka nie jest w tej ostatniej prawdziwa. W jednym ze swoich artykułów na ten temat Heyting posługuje się taką oto argumentacją. Rozważmy wypowiedź (A): każda liczba większa niż 1 jest bądź liczbą pierwszą, bądź sumą dwóch liczb pierwszych, bądź sumą trzech liczb pierwszych. Nie wiemy, czy to prawda, choć we wszystkich zbadanych przypadkach tak się okazało. Nazwijmy więc liczbą wyjątkową liczbę, która nie spełnia wypowiedzi (A), i zapytajmy, czy taka liczba istnieje. Niech powiedzenie, że istnieje liczba x taka, iż P(x), znaczy, że może się taką liczbę obliczyć, może się ją efektywnie wskazać. Natomiast negacja zdania p niech znaczy, że ze zdania p wyprowadziło się sprzeczność. Przy obecnym stanie wiedzy nie potrafimy ani efektywnie wskazać choć jednej liczby wyjątkowej, ani też wyprowadzić sprzeczności z przypuszczenia, że się taką liczbę wskazało. Wobec tego nie mamy prawa ani twierdzić, że istnieje liczba wyjątkowa, ani temu zaprzeczać, a zatem prawo wyłączonego środka nie obowiązuje. Nie znaczy to jednak, że jest ono fałszywe, w przeciwnym bowiem razie pociągałoby za sobą sprzeczność[12]. Czyli twierdzenie, że zasada wyłączonego środka jest fałszem, jest także fałszem, co wyraża prawo NNApNp, które Brouwer nazywa prawem „absurdalności absurdalności wyłączonego środka". Z. Zawirski, komentując poglądy intuicjonistów, stwierdza, iż w pewnym sensie można mówić, że zasada wyłączonego środka ma jakby trzecią wartość logiczną, a tym samym że mamy do czynienia z logiką trójwartościową.

Uważa się powszechnie, że o wartościowości systemu stanowi adekwatna matryca. Matrycą jest algebra (czyli układ uporządkowany, złożony z danego zbioru elementów oraz funkcji określonych na tym zbiorze, których wartości też do tego zbioru należą) poszerzona o zbiór elementów wyróżnionych. Matrycę nazywa się n-wartościową, gdy zbiór jej elementów jest n-elementowy. „Dokonując charakterystyki matrycowej danego systemu rachunku zdań przyporządkowujemy funktorom w nim występującym określone funkcje matrycy, scharakteryzowane zwykle za pomocą tzw. tabelek matrycowych [...] Jeśli zmiennym zdaniowym danego wyrażenia przyporządkowujemy określone wartości matrycy, to – z uwagi na przyporządkowanie funktorom w nim występującym określonych funkcji matrycy – wyrażeniu temu jest przypo-

[12] Zob. K o t a r b i ń s k i, dz. cyt., s. 123.

rządkowana określona wartość matrycy. Tautologią danej matrycy jest wyrażenie, któremu przy każdym przyporządkowaniu jego zmiennym zdaniowym wartości matrycy jest przyporządkowana wartość wyróżniona. Matryca jest adekwatna dla danego systemu, gdy zbiór tez tego systemu jest identyczny ze zbiorem tautologii tej matrycy. System jest *n*-wartościowy, gdy liczba *n* jest najmniejszą taką liczbą, że istnieje matryca *n*-wartościowa adekwatna dla tego systemu"[13]. Mówiąc o logikach wielowartościowych, ma się na myśli takie *n*-wartościowe logiki, gdzie n > 2.

Faktem jest, iż przy końcu swojej pracy *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*[14] po zaprezentowaniu aksjomatycznego systemu logiki intuicjonistycznej Heyting użył matryc trójwartościowych, aby wykazać, że zasada wyłączonego środka nie da się w jego systemie dowieść. W zbiorze wartości matryc znajdują się: „1", „0" i trzecia wartość, pośrednia, którą umownie będziemy oznaczać przez „2"[15]; wartością wyróżnioną jest „1". Matryce Heytinga zawierają w sobie wypadki ustalone przez matryce logiki dwuwartościowej, czyli dla kombinacji 11, 10, 01 i 00 matryce te są identyczne. Ponadto mamy pięć nowych par: 12, 21, 22, 20, 02. W systemie Heytinga nie można wyznaczyć funktorów pierwotnych, gdyż żaden ze spójników nie jest definiowalny za pomocą pozostałych, dlatego zachodzi potrzeba podania tabelek dla wszystkich spójników zdaniotwórczych od argumentów zdaniowych. Oto matryce dla funktorów negacji, implikacji, koniunkcji i alternatywy:

p	Np
1	0
2	0
0	1

Cpq	1	2	0
1	1	2	0
2	1	1	0
0	1	1	1

[13] L. B o r k o w s k i, *Kilka uwag o zasadzie dwuwartościowości i logikach wielowartościowych*, [w:] t e n ż e, *Studia logiczne*, Lublin 1990, s. 471.

[14] „Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften". Physikalisch-Mathematische Klasse, 1930, s. 42-56.

[15] Do sprawy interpretacji semantycznej wartości logicznych intuicjonistycznej logiki zdań jeszcze wrócimy.

Kpq	1	2	0
1	1	2	0
2	2	2	0
0	0	0	0

Apq	1	2	0
1	1	1	1
2	1	2	2
0	1	2	0

Używając powyższych matryc jako środka do badania, jakie wyrażenia otrzymują wartość wyróżnioną w tym systemie, można łatwo wykazać, iż niektóre odpowiedniki praw logiki klasycznej, w tym zasada wyłączonego środka, przyjmują dla wartości 2 trzecią wartość: ApNp = A2N2 = A20 = 2, podobnie mocna zasada podwójnego przeczenia: CNNpp = CNN22 = CN02 = = C12 = 2.

Interesujące wydaje się porównanie powyższych matryc z matrycami logiki trójwartościowej Łukasiewicza. Dla funktorów koniunkcji i alternatywy matryce wyglądają zupełnie tak samo, różnice ujawniają się dopiero przy negacji i implikacji[16]. Za Łukasiewiczem trzecią wartość będziemy nazywać „możliwością" i oznaczać przez 1/2. Oto tabelki[17]:

p	Np
1	0
1/2	1/2
0	1

Cpq	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

[16] Zdaję sobie sprawę z tego, iż użycie takich samych symboli na oznaczenie analogicznych funktorów w logice Heytinga i w logice Łukasiewicza może być mylące, niemniej pozostaję przy tej tradycyjnej już symbolice, wyraźnie jednak zaznaczając, że ten sam formalny zapis nie musi znaczyć tego samego w obydwu logikach.

[17] Por. J. Łukasiewicz, *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań*, [w:] tenże, *Z zagadnień logiki i filozofii*, s. 144-163.

Negacja możliwości jest u Łukasiewicza też możliwością, a nie fałszem – jak u Heytinga. Wartość implikacji w przypadku, gdy wartość poprzednika jest „mniejsza"[18] lub równa wartości następnika, wynosi „1" w obu matrycach, w przypadku zaś, gdy poprzednik ma wartość wyższą od następnika, matryce się różnią; Łukasiewicz oblicza wartość implikacji wzorem: $Cpq = 1 - p + q$, u Heytinga zaś $Cpq = q$ (gdy $p > q$). Zatem zarówno matryca Łukasiewicza, jak i Hetinga spełniają tzw. postulat normalności matrycy, tzn. warunek, aby implikacja nie miała wartości „1" wtedy, gdy następnik ma wartość mniejszą od poprzednika. Postulat normalności nie wskazuje jednak, jaką wartość trzeba nadać implikacji w przypadkach, gdy poprzednik wynosi „1", a następnik ma trzecią wartość oraz gdy poprzednik ma trzecią wartość, a następnik „0". Łukasiewicz w obu przypadkach przyjmuje wartość 1/2, natomiast Heyting taką, jaką ma następnik implikacji.

Wartość, którą oznaczyliśmy przez „2" i którą intuicjoniści nazywają wartością pośrednią albo trzecią wartością, nie jest tym samym, co „możliwość" Łukasiewicza. Oznacza ona bowiem wartości tych zdań, które nie są fałszywe, lecz których prawdziwości nie można udowodnić. Są to więc zdania nierozstrzygalne na podstawie dekretu intuicjonistów, żądającego, aby z każdym zdaniem wiązać nierozdzielnie refleksję nad sposobem dojścia do uznania tego zdania[19]. Można powiedzieć niezbyt precyzyjnie, że zdania o trzeciej wartości to jakby „zdania prawdziwe gorszego gatunku" lub zdania „zbliżone do prawdy", czyli mające tylko pewien stopień uprawomocnienia[20].

Na powyższe stwierdzenie naprowadzają matryce intuicjonistycznej negacji oraz implikacji. Wartość negacji każdego zdania o wartości innej niż „0" wynosi „0", wartość zaś $N0 = 1$, a zatem można wnosić, że wartość pośrednia jest bliższa prawdy niż fałszu. Ponadto każda implikacja o fałszywym następniku jest fałszywa, co może być wyrazem zasady, iż nie można uznać przejścia od zdania prawdziwego nawet najsłabiej uzasadnionego (o najmniejszym stopniu uprawomocnienia) do zdania fałszywego[21]. Podobnych włas-

[18] Najmniejszą wartością jest 0, następnie 2 (w matrycy Heytinga lub 1/2 u Łukasiewicza), wartością największą jest 1.

[19] Por. A. G r z e g o r c z y k, *Nieklasyczne rachunki zdań a metodologiczne schematy badania naukowego i definicje pojęć asertywnych*, „Studia Logica", 20(1967) 119.

[20] Por. Z a w i r s k i, art. cyt., s. 209.

[21] Czeżowski (dz. cyt., s. 77), analizując kierunki konstruktywistyczne (intuicjonizm i empiryzm), pisze: „Intuicjonizm przyjmuje, że jeśli przedmiot niesprzeczny, to nieprawda, że nie istnieje; jednakże odrzuca zdanie, że jeżeli nieprawda, że coś nie istnieje, to owo coś istnieje. Wykazanie niesprzeczności definicji pozwala nam przeto odrzucić twierdzenie, że

ności nie mają analogiczne matryce Łukasiewicza. Nadto zastępując „2” przez „1” w matrycy trójwartościowej Heytinga otrzymujemy matrycę logiki dwuwartościowej, czego również nie można powiedzieć o matrycy Łukasiewicza.

Cpq	1	1	0
1	1	1	0
1	1	1	0
0	1	1	1

(u Heytinga)

Cpq	1	1	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1

(u Łukasiewicza)

W tym drugim przypadku po utożsamieniu „możliwości” z „1” otrzymujemy wartościowanie niezgodne z logiką klasyczną, mianowicie C10 = 1.

Gdyby wyżej przedstawiona trójwartościowa matryca skonstruowana przez Heytinga dla logiki intuicjonistycznej okazała się adekwatna, nie mielibyśmy powodów, aby traktować tę logikę inaczej niż logikę Łukasiewicza w aspekcie liczby wartości logicznych. Bardzo szybko okazało się jednak, że tak nie jest. Szczegółowe badania wykazały, że matryca Heytinga jest tylko przybliżoną matrycą systemu twierdzeń opartych na założeniach intuicjonizmu. Wprawdzie wszystkie tezy intuicjonistycznej logiki zdań otrzymują wartość wyróżnioną według tej matrycy, lecz istnieją formuły spełniające matrycę, a nie wynikające z aksjomatów tej logiki, a więc nie będące tezami. Przykła-

przedmiot nie istnieje. Jeżeli jednak nie potrafimy przedmiotu skonstruować, pozostaje istnienie jego niejako w stanie zawieszenia. Intuicjonizm rozróżnia przeto dwa przypadki, które empiryzm matematyczny traktuje jednakowo. Dla empiryzmu przedmiot nie istnieje, jeżeli nie został skonstruowany, zarówno w przypadku sprzeczności, jak niesprzeczności definicji. Dla intuicjonizmu nie istnieje przedmiot sprzeczny, natomiast przedmiot niesprzeczny, jeżeli nie może być skonstruowany, jest niezdeterminowany w tym sensie, że nieprawdą jest zarówno, że nie istnieje, jak też, że istnieje. Zarazem zaś owo niezdeterminowanie jest jakby bliższe istnienia niż nieistnienia wobec tego, że może przejść w istnienie (przez skonstruowanie przedmiotu), lecz nie może przejść w nieistnienie, bo nie istnieją tylko przedmioty, których definicje zawierają sprzeczność”.

dem może być formuła CCNNppApNp, która nie da się wyprowadzić z aksjomatów, natomiast spełnia podaną przez Heytinga matrycę: CCNN22A2N2 = CCN02A20 = CC122 = C22 = 1 (podobnie formuła ACpqCqp = AC22C22 = = A11 = 1). Skonstruowano więc matryce 5-wartościowe, będące dokładniejszym przybliżeniem intuicjonizmu (np. ostatnia formuła nie jest już w nich prawdziwa), ale i tak zbiór wyrażeń prawdziwych według matryc był obszerniejszy od inferencji logiki intuicjonistycznej.

W 1932 r. Kurt Gödel udowodnił twierdzenie głoszące, iż żadna matryca o skończonej liczbie wartości logicznych nie może być adekwatna dla systemu Heytinga. Dowód Gödla przebiega następująco (podajemy go za Zawirskim[22]):

Utwórzmy alternatywę złożoną z samych równoważności zachodzących pomiędzy zmiennymi zdaniowymi:

$$(p_1 \equiv p_2) \vee (p_1 \equiv p_3) \vee (p_1 \equiv p_4) \vee \ldots \vee (p_1 \equiv p_n) \vee (p_2 \equiv p_3) \vee (p_2 \equiv p_4) \vee \ldots \vee (p_{n-1} \equiv p_n)$$

Każda matryca zawierająca mniej niż n wartości, w której spełniają się aksjomaty Heytinga, będzie tę formułę spełniać. Spróbujmy bowiem nadać każdej zmiennej inną wartość, a ponieważ wartości tych jest z założenia mniej niż zmiennych, zatem przynajmniej w jednej równoważności zmienne otrzymają tę samą wartość, czyli co najmniej jedna równoważność będzie prawdziwa, a prawdziwość choćby jednego składnika alternatywy sprawia, że cała alternatywa otrzymuje wartość wyróżnioną równą jedynce (odnośne prawo logiki dwuwartościowej jest ważne także w logice Heytinga).

Teraz należy wykazać, że powyższa formuła jest niezależna od aksjomatów, a więc nie da się w tym systemie udowodnić. Dowód niezależności przeprowadza się zwykle metodą interpretacji. Chcąc więc uzyskać niezależność naszej formuły od aksjomatów Heytinga, szukamy takiej interpretacji zmiennych, dla których aksjomaty będą spełnione, a formuła nie. Gödel podaje taką tabelę interpretacyjną: ma ona k wartości: 1, 2, 3, ..., k; wartością wyróżnioną jest 1. $Cpq = 1$ dla $p \geq q$, zaś $Cpq = q$ dla $p < q$; $Np = k$ dla $p \neq k$, zaś $Nk = 1$; alternatywa przybierze wartość składnika mniejszego, a więc min. (p, q), natomiast koniunkcja wartość czynnika większego, a więc max. (p, q). Dla takiego wartościowania aksjomaty spełniają się, natomiast

---

[22] Art. cyt., s. 205.

nasza formuła będzie się spełniać tylko wtedy, gdy liczba zmiennych zdaniowych p_n jest większa niż *k*, w przypadku zaś gdy liczba ta równa się *k* lub jest mniejsza od *k*, nasza formuła spełniać się nie będzie, a więc jest od aksjomatów niezależna.

„Zatem matryca adekwatna logiki Heytinga musi być nieskończenie wielowartościowa, prawa logiki Heytinga spełniają się dla nieskończonego ciągu matryc z ciągle rosnącą ilością wartości”[23]. Zdaniem Zawirskiego Gödel wykazał nie tylko to, że żadna skończona matryca nie może być adekwatna dla systemu Heytinga, ale że między systemem klasycznego rachunku zdań a systemem intuicjonistycznej logiki zdań leży nieskończenie wiele systemów, czyli, innymi słowy, system Heytinga jest zawarty w systemach zawierających się w logice klasycznej[24]. Całkowicie odmiennie tę zależność ujmuje Łukasiewicz (1952), wedle którego to właśnie intuicjonistyczny rachunek zdań zawiera jako swoją część właściwą klasyczny rachunek zdań[25]. Abstrahując od poprawności argumentacji za jednym lub drugim stanowiskiem, warto się zastanowić, czy alternatywa: zawężenie lub rozszerzenie (oczywiście logiki klasycznej) postawiona przed logiką intuicjonistyczną jest zasadna. Relacja rozszerzenia (i podobnie zawężenia) wymaga, aby w obydwu systemach te same zapisy formalne były identycznie rozumiane. Podkreśla się bowiem, iż prawo logiki to nie tyle jego formalny zapis, lecz treść prawa, która jest uzależniona od sensu, jaki przypisuje się stałym logicznym w nim występującym. W rezultacie wydaje się, że kiedy pewna formuła, np. ApNp, jest logicznie prawdziwa w jednym systemie, a w innym nie, to formuły te, choć typograficznie takie same, mają różne znaczenia w różnych systemach. Zatem to, co stwierdza formuła ApNp, jest prawdziwe w logice klasycznej, lecz to, co stwierdza ta sama formuła, nie jest prawdziwe w logice intuicjonistycznej.

Zapytajmy wobec tego, co stwierdza formuła ApNp (oraz inne formuły) w klasycznym rachunku zdań, a co w rachunku intuicjonistycznym. Problem ten można uogólnić i zapytać, jaki sens mają funktory jednej i drugiej logiki

---

[23] Tamże.

[24] Zob. tamże, s. 206. Zawirski nie jest odosobniony w takim ujęciu odnośnego problemu, wręcz przeciwnie: wiele pobieżnych omówień logiki intuicjonistycznej, trzymając się faktu, iż odpadają w niej niektóre klasyczne prawa, np. prawo wyłączonego środka, traktuje logikę intuicjonistyczną jako ograniczenie klasycznej.

[25] Łukasiewicz (*O intuicjonistycznym rachunku zdań*, s. 261-263) nie uwzględnia faktu, iż do wygłoszenia tej tezy niezbędna jest definicja 63: FδNTpNqδCpq. Ten sposób definiowania Łukasiewicz przejmuje z prototetyki Leśniewskiego. Jednakże wydaje się, że wprowadzenie tej definicji jest nieuprawnione, gdyż łamie ona postulat nietwórczości.

zdań. S. Majdański[26] ponadto zwraca uwagę na fakt, iż z rozumieniem (i liczbą) funktorów logiki zdań wiąże się zarówno interpretacja wartości logicznych, jak i ich liczba, a zatem rozważenie tej ważnej kwestii powinno rzucić więcej światła na problem dotyczący rozumienia (i liczby) wartości logicznych intuicjonistycznej logiki zdań.

Znaczenie funktorów – zdaniem S. Haack[27] – można uważać za wywodzące się po części z aksjomatów/reguł systemu, w którym występują (i z jego semantyki formalnej), a także częściowo z nieformalnych odczytań spójników (i nieformalnych wyjaśnień semantyki formalnej). Odnośnie do tego pierwszego warto zauważyć, że funktory w logice intuicjonistycznej nie są wzajemnie definiowalne, natomiast w klasycznej są, a zatem można już wnosić, że funktory w obu logikach będą inaczej rozumiane. Rozważmy więc pozytywnie, jak są rozumiane stałe logiczne w intuicjonistycznym rachunku zdań, a jak w klasycznym.

Oddajmy na chwilę głos twórcom intuicjonizmu. A. Heyting pisze, iż „każde zdanie matematyczne ma postać: «dokonałem konstrukcji o następujących własnościach: ...». Tę postać zachowują cztery spójniki logiczne"[28] oraz: „[...] zdanie matematyczne wyraża pewne oczekiwanie. Na przykład zdanie: «Stała Eulera W jest wymierna» wyraża oczekiwanie, że potrafimy znaleźć dwie liczby całkowite a i b takie, że W = a/b"[29]. Heyting odróżnia zdania i asercje. Asercja jest uznaniem zdania, np. asercja: „W jest wymierne" oznaczałaby, że faktycznie znaleziono wymagane liczby. Natomiast zdanie: „W nie jest wymierne" oznacza oczekiwanie, że z założenia o wymierności W można wyprowadzić sprzeczność. Tak więc, według Heytinga, negacja zdania jest czymś pozytywnym, gdyż odsyła zawsze do procedury dowodowej, prowadzącej do sprzeczności, nawet jeśli zdanie wyjściowe nie sugeruje żadnej procedury dowodowej[30]. Dowodem zdania *p* jest jego konstrukcja. „Zatem Np można uznać wtedy i tylko wtedy, gdy dysponujemy konstrukcją, która z założenia, że dokonano konstrukcji p, wyprowadza sprzeczność"[31]. Podobnie formuła ApNp oznacza oczekiwanie na matematyczną

[26] *Logika: czy- ilo- i jak wartościowa?*, „Summarium", 1975, nr 4 (24), s. 51.

[27] *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press 1978, s. 230.

[28] *Elementy intuicjonizmu*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów*, tł. [z jęz. ang.] B. Baran, red. J. Misiek, Kraków 1986, s. 93.

[29] *Intuicjonistyczne podstawy matematyki*, tamże, s. 33.

[30] Por. tamże.

[31] H e y t i n g, *Elementy intuicjonizmu*, s. 92.

konstrukcję, tj. na podanie metody, za pomocą której można dla dowolnego zdania dowieść samo to zdanie lub jego negację[32]. A. Heyting wprost stwierdza: „Nie jestem zdolny nadać zrozumiałego sensu twierdzeniu, że istnieje jakiś przedmiot matematyczny, jeśliby nie mógł być skonstruowany"[33]. „W rozważaniu myślowych konstrukcji matematycznych «istnieć» musi być synonimem «być skonstruowanym» [...] Twierdzenie matematyczne jest stwierdzeniem, że została wykonana pewna konstrukcja matematyczna. Jasne, że przed wykonaniem konstrukcji nie ma jeszcze twierdzenia"[34]. Z kolei prawa logiki intuicjonistycznej to najogólniejsze prawa matematyki intuicjonistycznej – otrzymuje się je na drodze uogólniania uniwersalnie poprawnych metod konstrukcji arytmetycznych.

E. J. Lemmon, opierając się na uwagach twórców intuicjonizmu odnośnie do rozumienia stałych logicznych intuicjonistycznej logiki zdań, daje taką oto ich charakterystykę:

(1) „... ∧ ..." – „jest tak, że ... i ...";

(2) „... ∨ ..." – „można wykazać, że jest tak, iż ..., lub można wykazać, że jest tak, iż ...";

(3) „... → ..." – „można wykazać, że jeżeli można wykazać, iż jest tak, że ..., to można wykazać, iż jest tak, że ...";

(4) „~..." – „można wykazać, że założenie, iż ..., prowadzi do sprzeczności" (lub „można wykazać, że nie jest tak, iż można wykazać, że ..."), przy czym wyrażenie „można wykazać, że ..." rozumie się jako „istnieje efektywna procedura wykazania, że ..."[35]

---

[32] Por. t e n ż e, *Intuicjonistyczne podstawy matematyki*, s. 34.

[33] *Some Remarks on Intuitionism*, [w:] *Constructivity in Mathematics*, ed. A. Heyting, Amsterdam 1959, s. 69. Por. także: *Intuitionism* [...], s. 2 n.

[34] H e y t i n g, *Intuitionism* [...], s. 2 n. W kwestii przedmiotu matematyki intuicjonizm pozostaje zatem w radykalnej opozycji do platońskiego realizmu, w myśl którego istnieje niezależna od podmiotu poznającego dziedzina przedmiotowa, którą matematyka jedynie odkrywa i opisuje. Por. I. D ą m b s k a, *Idee Kantowskie w neointuicjonizmie Brouwera*, (Acta Universitatis Wratislaviensis, No. 290), Wrocław 1976, s. 9.

[35] Por. E. J. L e m m o n, G. P. H e n d e r s o n, *Is There Only One Correct System of Modal Logic?*, „The Aristotelian Society", 33(1959) 27. Podobną do tej interpretacji jest interpretacja dowodowa Heytinga, którą przytaczają np. W. Marciszewski, W. Pogorzelski (dz. cyt., s. 289), R. Murawski (*Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 1995, s. 109 n.). Według Marciszewskiego „(1) dowodem formuły A ∧ B jest para d_1, d_2 taka, że d_1 jest dowodem formuły A, zaś d_2 – dowodem formuły B; (2) dowodem formuły A ∨ B jest konstrukcja polegająca na tym, że wybiera się jedną z formuł A, B oraz dostarcza dowodu wybranej formuły; (3) dowód *d* formuły A → B jest konstrukcją, która każdemu (wykonanemu) dowodowi *e* formuły A przyporządkowuje procedurę dowodową *d*(*e*) przekształcającą *e* w dowód dla

W świetle powyższych uwag staje się jasne, jakie prawo wyłączonego środka odrzucają intuicjoniści. Z pewnością nie jego wersję klasyczną, która mówi, że każdy sąd *p* jest albo prawdziwy, albo fałszywy, czyli albo *p* jest prawdziwe, albo jego negacja, lecz raczej taką oto jego postać: „Istnieje efektywna procedura wykazania, że *p*, albo istnieje efektywna procedura wykazania, że Np". Oczywiście ta druga formuła może mieć, i faktycznie ma, fałszywe podstawienia.

Ogólny wniosek, jaki można wyprowadzić z powyższego rozumowania, jest następujący: według intuicjonistów zdanie reprezentuje nie sam stan rzeczy, ale stan rzeczy jako poznany (skonstruowany) (teza Brouwera: *esse = construere*).

Dla porównania scharakteryzujemy teraz pokrótce sposób rozumienia funktorów w logice klasycznej. „Przyjmujemy, że świat jest jakiś bez względu na to, czy mamy możliwość się o tym przekonać, czy nie. «Platon był w Indiach lub nie był w Indiach» uznajemy za prawdę, chociaż nie możemy się przekonać o prawdziwości zdań składowych występujących w tym zdaniu złożonym"[36]. K. Ajdukiewicz, odpowiadając na pytanie, czego dotyczy zdanie alternatywne, mówi, iż „dotyczy ono [...] pewnego obiektywnego stanu rzeczy, a nie dotyczy wcale naszej wiedzy o nim. Ten zaś obiektywny stan rzeczy nie zmienił się wcale przez to, że zmieniła się nasza wiedza o nim. Jeżeli zaś stan rzeczy, którego pewne zdanie dotyczy, nie ulega zmianie, to nie może też owo zdanie, które z tego stanu rzeczy zdaje sprawę, z prawdy przemienić się w fałsz. Wobec tego, jeżeli dana alternatywa była prawdą przed stwierdzeniem, który z jej członów jest prawdziwy, to nie przestała być prawdą również po stwierdzeniu tego"[37]. Krótko mówiąc, wypowiadając zdanie alternatywne, stwierdzamy pewien obiektywny stan rzeczy, na który nie ma wpływu nasz stan wiedzy o tym stanie rzeczy.

A. Grzegorczyk wyróżnia klasyczny i relatywistyczny sposób uznawania twierdzeń, który charakteryzuje odpowiednio logikę klasyczną oraz intuicjonistyczną. Uznawanie klasyczne jest niestopniowalne i absolutne, czyli nie zrelatywizowane do warunków uznawania. „W klasycznej koncepcji zdania

B; (4) dowód formuły ~A jest dowodem na to, że z A wynika sprzeczność". Zob. *Mała Encyklopedia Logiki*, pod red. W. Marciszewskiego, Wrocław 1988, s. 108 (hasło: *Logika intuicjonistyczna*).

[36] Zob. G r z e g o r c z y k, art. cyt., s. 118.

[37] *Okres warunkowy a implikacja materialna*, [w:] t e n ż e, *Język i poznanie*, t. II, Warszawa 1985, s. 252 n.

uznanego zdania uznane utożsamia się ze zdaniami prawdziwymi, a stąd odróżnia się tylko zdania uznane (za prawdziwe) i odrzucone (jako fałszywe). Przy tym jeśli uznajemy pewne zdanie za prawdziwe, to czynimy to bez względu na okoliczności towarzyszące uznawaniu. Zdanie uznane dziś za prawdziwe uważamy, że powinno być uznane za prawdziwe przez każdego i w każdym czasie, bez względu na to, czy dotyczy zdarzeń przeszłych, przyszłych czy obecnych, stwierdzalnych czy niestwierdzalnych"[38]. Natomiast podstawą relatywistycznych koncepcji uznawania jest „przyjęcie, że moje uznawanie twierdzeń jest czynnością psychiczną, która zależy od warunków"[39].

Zdaniem M. Dummetta w pierwszym przypadku „asercja jest prawdziwa lub fałszywa niezależnie od moich możliwości jej uzasadnienia. Podczas gdy z przeciwstawnego punktu widzenia rozważamy ją w kategoriach moich możliwości jej uzasadnienia wypowiadanego twierdzenia. To właśnie mam na myśli mówiąc, że idea asercji wytycza niejako drogę do idei prawdy"[40].

Stanowisko klasyczne zakłada adekwacyjną (klasyczną) teorię prawdy, w myśl której prawdziwość jest zgodnością (*adequatio*) między treścią danego poznania a określoną stroną jego przedmiotu, tą właśnie, którą poznanie ujmuje. Zdanie jest prawdziwe lub fałszywe na mocy rzeczywistości, która istnieje niezależnie od podmiotu poznającego, a więc zdanie może być prawdziwe, nawet jeśli nie mamy żadnych środków, by się o tym przekonać. Przy relatywistycznym sposobie uznawania zmienia się rozumienie prawdy: prawdziwość zdania może polegać jedynie na spełnianiu pewnych kryteriów. Intuicjonista zdaje się więc utrzymywać, że zdanie matematyczne może być prawdziwe tylko na mocy rzeczywistego uzasadnienia, tj. na mocy dowodu, który jest nam rzeczywiście znany. Istotę prawdziwości intuicjoniści widzą nie w stosunku zdania do rzeczywistości, lecz w jego stosunku do rezultatu określonych zabiegów poznawczych.

Wróćmy teraz do zagadnienia interpretacji wartości logicznych intuicjonistycznej logiki zdań, w szczególności tych wartości, które występują w matry-

[38] A. Grzegorczyk, *Klasyczne, relatywistyczne i konstruktywistyczne sposoby uznawania twierdzeń*, „Studia Logica", 27(1971) 154.

[39] Tamże, s. 156. Grzegorczyk zaznacza jednak, iż ta zależność nie musi być rozumiana jako ułomność, ale jako konieczna ostrożność dyktowana względami metodologicznymi.

[40] *Antyrealistyczne spojrzenie na język, myśl, logikę i historię filozofii analitycznej. Z Michaelem Dummettem rozmawia Fabrice Pataut*, „Kwartalnik Filozoficzny", 26(1998), z. 1, s. 185.

cy podanej przez Heytinga oraz w matrycach będących jej modyfikacjami. Powiedzmy też wyraźnie, że sami intuicjoniści tą kwestią w ogóle się nie zajmują[41]. Logika intuicjonistyczna została skonstruowana bez nawiązywania do koncepcji zdania o wartości logicznej różnej od prawdy i fałszu.

Przypomnijmy, że Heyting obok wartości „1" i „0" przyjmował trzecią wartość logiczną, którą oznaczyliśmy przez „2". W świetle powyższych ustaleń można powiedzieć, że zdanie w perspektywie intuicjonizmu nie wyraża samego stanu rzeczy, ale zawsze stan rzeczy jako poznany. Wydaje się więc, iż wartość „1" może być interpretowana jako „jest prawdziwe i wiadomo, że jest prawdziwe", albo zamiast o prawdziwości lepiej mówić o byciu uzasadnionym (udowodnionym, skonstruowanym)[42]: „znany jest nam dowód (metoda konstrukcji)". „0" zaś można interpretować jako „jest fałszywe i wiadomo, że jest fałszywe", lub „wiemy, że nie istnieje dowód (metoda konstrukcji)" (założenie o istnieniu dowodu/metody konstrukcji prowadzi do sprzeczności). Wartość „2" matrycy Heytinga, wydaje się, może być odczytywana niezbyt precyzyjnie jako „jest zbliżone do prawdy" lub „jest prawdziwe o jakimś stopniu uzasadnienia", czyli „nie znamy dowodu/metody konstrukcji, ale to, że taki dowód istnieje, nie prowadzi do sprzeczności", przy czym wartość ta jest bliższa „1" niż „0", gdyż „2" może przejść w „1" poprzez podanie metody konstrukcji (nigdy zaś „2" nie może przejść w „0").

Jak już wyżej wspomnieliśmy, dokładniejszymi przybliżeniami systemu twierdzeń dających się wyprowadzić z aksjomatów intuicjonistycznej logiki zdań są matryce cztero-, pięcio- itd. wartościowe. Jak w tych matrycach są rozumiane wartości pośrednie (między „0" a „1")? W następujących po sobie matrycach wartości nie wyróżnione stale przyrastają o jedną, a same matryce są generowane przez funkcję f o następujących własnościach: (1) gdy argument funkcji f ma wartość wyróżnioną, to wartością f jest nowa wartość logiczna, której w poprzedniej matrycy nie było; (2) gdy argumentem f jest wartość nie wyróżniona w poprzedniej matrycy, to wartość funkcji f jest równa tej poprzedniej wartości nie wyróżnionej.

S. Jaśkowski wykazał, że „im dalej posuwamy się w szeregu nowych wartości, tym bardziej zbliżamy się do prawdy"[43]. Gdy bowiem zastąpimy

---

[41] Jedynie pewne sugestie na ten temat można znaleźć w artykule Brouwera *The Effect of Intuitionism on Classical Algebra of Logic*, [w:] *Collected Works* [...], s. 551-554.

[42] W semantyce intuicjonistycznej warunki prawdziwości zastąpione są (aktualną) dowodliwością, uzasadnialnością, usprawiedliwioną stwierdzalnością itp.

[43] Z a w i r s k i, art. cyt., s. 211.

wartość najbliższą „1" przez „1" w matrycy implikacji i negacji intuicjonistycznej, to z odpowiednich matryc k-wartościowych otrzymamy matryce $k - 1$-wartościowe (zastąpienie „2" przez „1" w matrycy trójwartościowej, jak to wcześniej wykazaliśmy, daje w wyniku zwykłą matrycę logiki dwuwartościowej). Natomiast zastąpienie wartości najbliższej „0" przez „0" lub którejś z wartości pośredniej przez wartość sąsiednią burzy wzajemne stosunki poprzedniej matrycy. Tak więc wartości pośrednie przyjmują zdania prawdziwe o jakimś stopniu uzasadnienia, przy czym wartości te są uporządkowane według wzrastającego stopnia uzasadnienia jako „zbliżające się do prawdy"[44].

Zupełnie odmiennie przedstawia się sprawa wartości logicznych w klasycznym rachunku zdań. Na jego gruncie „wartość logiczna zdania zależy wyłącznie od jego zgodności lub też niezgodności z rzeczywistością, a wcale nie od tego, czy ludzie potrafią czy też nie potrafią tej zgodności teraz lub kiedykolwiek ustalić"[45]. Dzieje się tak dlatego, że relacja między zdaniem a stanem rzeczy w nim stwierdzanym jest taka, iż możliwość (czy też niemożliwość) poznania tego stanu rzeczy nie ma wpływu na wartość logiczną owego zdania. Zgodnie z klasyczną koncepcją prawdy albo zachodzi *adequatio* – zgodność poznania z rzeczywistością (wartość prawdy), albo nie zachodzi owa zgodność (wartość fałszu). Prawdziwość w sensie klasycznym, w przeciwieństwie do „prawdziwości" rozumianej intuicjonistycznie, jest niestopniowalna, niezmienna, niezależna od tego, kto i w jakich okolicznościach uznaje dane zdanie[46].

Sumując rezultaty powyższych rozważań nad interpretacją wartości logicznych w intuicjonistycznej logice zdań, można powiedzieć, iż żadnej z nich (wartości) nie należy interpretować jako klasycznie rozumianej prawdziwości.

Natomiast w związku z kwestią liczby wartości logicznych intuicjonistycznej logiki zdań mają miejsce pewne nieporozumienia. L. Borkowski wyjaśnia, że „charakterystyka matrycowa systemu jest taką jego charakterystyką algebraiczną, przy której wartości matrycy nie muszą być interpretowane semantycznie"[47]. Można zatem traktować charakterystykę matrycową systemu czysto formalnie, syntaktycznie. Źródło nieporozumień tkwi często w utożsamieniu pojęcia spełniania w matrycy i pojęcia prawdziwości w modelu

[44] Tamże, s. 206-211.

[45] E. G r o d z i ń s k i, *Filozoficzne podstawy logiki wielowartościowej*, Warszawa 1989, s. 17.

[46] Por. A. B. S t ę p i e ń, *Wstęp do filozofii*, Lublin 1989, s. 126.

[47] Art. cyt., s. 471.

(utożsamienie tych pojęć jest możliwe w klasycznym rachunku zdań, jako że tam te warunki pokrywają się i dlatego wartości matrycy można interpretować semantycznie jako prawdziwość i fałszywość). Tak więc, zdaniem Borkowskiego, budowanie systemu, dla którego nie istnieje adekwatna matryca dwuwartościowa, nie musi być związane z odrzuceniem zasady dwuwartościowości i z przyjęciem, że podział zdań na prawdziwe i fałszywe nie jest zupełny[48].

Odnośnie do liczby wartości logicznych w logice intuicjonistycznej warto jeszcze zauważyć, że ową wielość wartości z ilości należałoby raczej przenieść na warunki uznawania[49]. Wartości pośrednie bowiem występujące w matrycy Heytinga (i jej modyfikacjach) można chyba rozumieć nie jako nowe wartości semantyczne, obok prawdy i fałszu, lecz jako warianty epistemologiczne prawdy (ewentualnie fałszu).

Logikę klasyczną i logikę intuicjonistyczną Dummett sytuuje na osi sporu: realizm – antyrealizm. Jego zdaniem źródłem antyrealizmu jest przede wszystkim intuicjonistyczna (konstruktywistyczna) filozofia matematyki. „Spór między realistami i antyrealistami dotyczy nie klasy bytów, czy też klasy terminów, ale raczej klasy zdań – np. zdań o świecie fizycznym, o zdarzeniach, procesach i stanach psychicznych, zdań matematycznych, zdań w czasie przyszłym, zdań w czasie przeszłym itd. Tego typu klasę zdań będę od tej pory nazywał «klasą sporną». W moim ujęciu realizm to przekonanie, że zdania klasy spornej mają obiektywną wartość logiczną, niezależnie od tego, w jaki sposób moglibyśmy ją poznać; są one prawdziwe lub fałszywe na mocy rzeczywistości, która istnieje od nas niezależnie. Antyrealista przeciwstawia temu stanowisku pogląd, według którego znaczenie zdań klasy spornej może być zrozumiane jedynie w związku z czymś, co uznalibyśmy za uzasadnienie tych zdań. Innymi słowy, według realisty nie istnieje bezpośredni związek między znaczeniem zdań należących do klasy spornej a czymś, co mogłoby stanowić ich uzasadnienie. Znaczenie zdań klasy spornej dane jest poprzez to, w jaki sposób stany rzeczy, istniejące niezależnie od tego, czy potrafimy je stwierdzić, wyznaczają ich wartość logiczną. Antyrealista przeciwnie, uważa właśnie, że jest taki bezpośredni związek; powoduje on, że zdanie klasy spornej może być prawdziwe tylko dzięki czemuś,

---

[48] Por. tamże, s. 472 n. Tę samą myśl wyraża Haack (*Philosophy of Logics*, s. 213).

[49] Por. G r z e g o r c z y k, *Klasyczne, relatywistyczne* [...], s. 157.

co mogłoby nam być wiadome i co uznalibyśmy za uzasadnienie jego prawdziwości"[50].

Postawa realistyczna, zdaniem Dummetta, wiąże się z akceptacją, dla zdań danej klasy, zasady dwuwartościowości, głoszącej, że każde zdanie o określonym znaczeniu jest zdecydowanie albo prawdziwe, albo fałszywe (niezależnie od tego, czy znamy jego wartość logiczną lub nawet jesteśmy w stanie ją poznać)[51]. Intuicjoniści natomiast odrzucają zasadę dwuwartościowości. Wedle nich zdanie jest prawdziwe, jeśli można podać konstrukcję stanowiącą jego dowód. Zdanie jest fałszywe tylko wtedy, gdy wyprowadzono sprzeczność z założenia, że konstrukcja stanowiąca jego dowód została doprowadzona do końca. Zdania prawdziwe to zdania udowodnione, zdania fałszywe zaś to zdania obalone. W matematyce znane są przykłady zdań w intuicjonistycznym rozumieniu ani prawdziwych, ani fałszywych, gdyż ani nie udowodnionych, ani nie obalonych. Jest zatem rzeczą oczywistą, że intuicjoniści zmieniają pojęcie prawdy (i konsekwentnie fałszu) w stosunku do jego klasycznego rozumienia. Wartość prawdy przysługuje tylko tym zdaniom, o których wiadomo, że są prawdziwe (okazał to dowód), analogicznie wartość fałszu można przypisać tylko tym zdaniom, o których wiadomo, że są fałszywe. Tym, co czyni dane zdanie prawdziwym lub fałszywym, jest nasza zdolność rozpoznania tego.

We wcześniejszych rozważaniach doszliśmy do wniosku, że – wedle intuicjonistów – zdanie jest prawdziwe tylko wtedy, gdy istnieje konstrukcja stanowiąca jego dowód. Dummett zauważa, że „istnieje" intuicjoniści także interpretują konstruktywnie i z tej racji nie można powiedzieć o dowolnym zdaniu matematycznym o określonym znaczeniu, iż istnieje albo nie istnieje konstrukcja, która jest jego dowodem, a zatem iż jest ono prawdziwe lub fałszywe. Tego rodzaju semantyka, zdaniem Dummetta, wiąże się w oczywisty sposób z odrzuceniem zasady dwuwartościowości, a zarazem stanowi istotę stanowiska antyrealistycznego.

---

[50] M. D u m m e t t, *Realism*, [w:] t e n ż e, *Truth and Other Enigmas*, London 1978, s. 145-165 – tł. pol. T. Placek, P. Turnau, *Realizm*, „Principia", 6(1992) 6 n.

[51] Początkowo Dummett przyjmował zasadę wyłączonego środka jako decydującą o byciu realistą w odniesieniu do zdań danej klasy, w późniejszym okresie jej miejsce zajęła ogólniejsza i silniejsza zasada dwuwartościowości. Zasada dwuwartościowości nie decyduje jeszcze o tym, czy ktoś jest realistą czy nie; jest ona tylko warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym realizmu. Spór między realizmem a antyrealizmem toczy się ostatecznie na terenie teorii znaczenia. Por. T. S z u b k a, *Michael Dummett i antyrealizm*, [w:] *Filozofować dziś. Z badań nad filozofią najnowszą*, pod red. A. Bronka, Lublin 1995, s. 329-332.

Spór między realizmem a antyrealizmem można opisać za Grzegorczykiem jako wybór pewnego nastawienia badawczego: „Rachunek klasyczny jest uzasadniony w rozważaniach o ontologicznym nastawieniu, czyli w rozważaniach, w których chcemy bezpośrednio odpowiadać na pytanie: «jaki jest świat?» bez względu na to, czy jest przez kogoś poznawany i jak jest poznawany"[52]. W tej perspektywie badawczej naukotwórcze pytanie zdaje się przybierać następującą postać: „dlaczego coś jest takie, jakie jest?" Przyjmuje się tu, że refleksja ogólnoontologiczna (metafizyczna) jest wcześniejsza logicznie od metodologicznej czy teoriopoznawczej i stąd jest od tej drugiej niezależna. Natomiast intuicjoniści, jak to już stwierdziliśmy, wiążą z każdym zdaniem refleksję nad sposobem dojścia do uznania tego zdania, czyli – mówiąc językiem Grzegorczyka – przyjmują metodologiczne nastawienie badawcze. W tym nastawieniu naukotwórczemu pytaniu można nadać taką postać: „Czy wiemy, jak wykazać, że coś jest takie, jakie jest?" W grę wchodzi tu, jak się wydaje, nie tylko stan rzeczy, ale także sposób dojścia do uznania tego stanu rzeczy.

Zbierając poszczególne uwagi na temat statusu logiki intuicjonistycznej, jej relacji do logiki klasycznej oraz logik wielowartościowych, dałoby się je zamknąć najkrócej w następujących tezach:

1) logika intuicjonistyczna wyrosła w innym paradygmacie uprawiania nauki aniżeli logika klasyczna, mianowicie takim, w którym uwzględnia się możliwości poznawcze podmiotu poznającego;

2) z przyjęciem innej postawy badawczej wiążą się różnice w rozumieniu stałych logicznych w obydwu logikach;

3) z kolei różnica znaczeń funktorów klasycznego rachunku zdań i intuicjonistycznego rachunku zdań z konieczności wyklucza rzeczywistą konkurencyjność tych systemów: obydwa systemy nie wydają się w tym sensie rywalizować między sobą, bo każdy z nich dotyczy czego innego[53];

4) żadnej z wartości logicznych rachunku intuicjonistycznego nie można interpretować jako klasycznie rozumianej prawdziwości albo fałszywości;

5) wielość wartości w matrycach logiki intuicjonistycznej należałoby z ilości przenieść na warunki uznawania, a wtedy byłyby to jakieś warianty epistemologiczne prawdziwości lub fałszywości;

---

[52] Zob. *Nieklasyczne rachunki* [...], s. 118. Zob. także: S. K i c z u k, *Zagadnienie obowiązywalności klasycznego rachunku zdań*, „Roczniki Filozoficzne", 36(1988), z. 1, s. 54 n.

[53] Por. L e m m o n, H e n d e r s o n, art. cyt., s. 23-29.

6) wartości matryc logiki intuicjonistycznej nie należy traktować jako wartości semantycznych w tym sensie, że dotyczą one stosunku zdania do rzeczywistości; wartości te mogą, co najwyżej, wyznaczać inny podział zdań, np. ze względu na stopień uprawomocnienia (uzasadnienia).

THE INTUITIONISTIC PROPOSITIONAL LOGIC VERSUS OTHER PROPOSITIONAL CALCULI ACCORDING TO SOME AUTHORS

S u m m a r y

The paper addresses two principal questions of philosophical nature connected with the intuitionistic propositional logic. The first deals with the relationship between that logic and the many-valued systems; now, the second concentrates on the relationship between the intuitionistic propositional calculus and the classical propositional calculus. As regards the first issue, the number as well as the way to understand the logical values of the intuitionistic propositional logic have been subjected to analyses. The proposition-making functors in both logics have been discussed. Finally, some differences in the scientific attitude have been pointed out, the attitude that is connected with classical logic and intuitionistic logic.

Translated by Jan Kłos