ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLV, zeszyt 3 – 1997

JERZY DADACZYŃSKI
Siemianowice Śląskie

HEURYSTYKA TEORII MNOGOŚCI G. CANTORA

Można przypuszczać, że Cantor – podobnie jak wielu naukowców – dysponował pewnym zbiorem zasad heurystycznych, do których odwoływał się w trakcie rozwiązywania konkretnych problemów badawczych. Gdyby udało się ujawnić owe zasady, ukazać ich zależność od przekonań filozoficznych i uzasadnić, iż wspomniane normy Cantor faktycznie stosował w badaniach teoriomnogościowych, to można by twierdzić, że jego przekonania filozoficzne spełniły istotną – choć pośrednią – funkcję heurystyczną w procesie powstawania teorii mnogości. Tak najogólniej można scharakteryzować zadania niniejszego artykułu.

Stwierdzenie przez Cantora w roku 1873, że dwa zbiory nieskończone, zbiór liczb rzeczywistych oraz zbiór liczb naturalnych, nie są równoliczne, miało poważne implikacje w zakresie ontologii nieskończoności. Podważało bowiem klasyczną tezę, wypracowaną przede wszystkim w ramach tradycji scholastycznej, o absolutnym charakterze nieskończoności. Nieskończoność miała być absolutna w tym znaczeniu, że jeżeli coś jest nieskończone, to może to być tylko jedno. Innymi słowy: nie może być dwu bytów nieskończonych[1].

---

[1] Por. M. L u b a ń s k i, *O pojęciu nieskończoności*, „Roczniki Filozoficzne” 10(1962), z. 3, s. 105.

M. Lubański rozróżnia w swojej pracy, nie podając kryterium podziału, nieskończoność pozytywną, negatywną oraz prywatywną. Tę ostatnią rozważa się odnośnie do ilości (nieskończoność ekstensywna) oraz jakości (nieskończoność intensywna) jakiegoś bytu. Nieskończoność ekstensywną ujmuje się w dwu aspektach: wielkości (dla ilości ciągłej) oraz wielości (dla ilości nieciągłej).

Cantor zajmował się zbiorami, zatem w jego wypowiedziach filozoficznych – jak można sądzić – chodziło z reguły o nieskończoność prywatywną, ekstensjonalną, rozpatrywaną w a-

Stwierdzenie, że istnieją co najmniej dwa różne obiekty nieskończone, zmieniało „podłoże” ontologiczne, na którym opartych zostało wiele dyscyplin naukowych. Dotyczyło to nie tylko matematyki, ale również filozofii i teologii. Z perspektywy wymienionych nauk doniosłe było pytanie: czy możliwa jest „eksploracja” tego nowego „obszaru” rzeczywistości?

Odpowiedzi pozytywnej winien był udzielić przede wszystkim filozof lub matematyk o poglądach platońskich, głoszący optymizm poznawczy i przekonany, że jego działalność polega na poznawaniu „gotowej”, już istniejącej rzeczywistości.

Gdyby założyć, że poznanie „nowej”, „bogatszej”, niż się spodziewano, rzeczywistości, jest przynajmniej w jakiejś części możliwe, to rodził się problem, j a k to uczynić, czyli problem metody oraz norm heurystycznych towarzyszących prowadzeniu badań. Słowem: stwierdzenie nierównoliczności zbioru liczb naturalnych i rzeczywistych spowodowało konieczność zrewidowania istotnych przekonań ontologicznych dotyczących nieskończoności, co z kolei implikowało potrzebę nowego określenia zasad heurystyki matematycznej.

Realizując zadania niniejszej pracy, trzeba będzie najpierw pokazać, na ile „odkrycie” dokonane przez Cantora wpłynęło na zrewidowanie zastanej ontologii nieskończoności. Zwrócona zostanie uwaga na potrzebę wprowadzenia przez matematyków drugiej połowy dziewiętnastego wieku nowej definicji nieskończoności, nazywanej tu „techniczną”[2].

Dla Cantora, głoszącego programowo optymizm poznawczy[3], nie mogło stanowić problemu zagadnienie, c z y „nowa”, „odkryta” dziedzina rzeczywistości jest poznawalna. Ważną kwestię stanowiło pytanie: w jaki sposób

---

spekcie wielości. Dlatego w niniejszej pracy, jeśli wyraźnie nie zaznaczono czegoś innego, rozpatrywany jest ten właśnie rodzaj nieskończoności, rozumiany jako cecha zbiorów lub szerzej, wielości Zob. przypis 11 niniejszej pracy.

[2] Jak zaznaczono wcześniej, własność posiadania podzbioru równolicznego została *explicite* wykorzystana w definicji zbiorów nieskończonych przez R. Dedekinda. Cantor nie definiował zbiorów nieskończonych, ale wspomnianą własność stosował jako kryterium, pozwalające w klasie zbiorów wyróżnić zbiory nieskończone. W dalszych rozważaniach definicja Dedekinda będzie nazywana „definicją techniczną zbiorów nieskończonych” albo krócej „techniczną definicją nieskończoności”. Zob. przypis 36 niniejszej pracy.

[3] „Was sich erkennen läßt, ist, was sich nicht erkennen läßt, ist nicht, und in demselben Maße, in dem etwas ist, ist es auch erkennbar” G. C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 5. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883, w: G. C a n t o r, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932; reprint: Berlin–Heidelberg–New York 1980 [= GA], s. 207 (przypis do s. 181).

jest ona poznawalna? Dlatego w następnej kolejności zostanie zaprezentowane to, j a k i e zasady Cantorowskiej heurystyki wynikały z nowej perspektywy ontologii nieskończoności[4].

Istotne dla realizacji podanych wyżej zadań jest ukazanie, na ile formułowane przez Cantora zasady heurystyczne okazały się rzeczywiście inspirujące i przydatne w prowadzeniu badań zbiorów nieskończonych oraz w rozwiązywaniu szczegółowych problemów rodzących się w teorii mnogości.

Ich inspirująca rola będzie zaprezentowana na przykładzie działań Cantora, zmierzających do istotnego celu, jakim było podanie absolutnej skali, służącej do „pomiaru" mocy zbiorów pozaskończonych. Wskazanie takiej skali stanowiło warunek konieczny dla sformułowania *hipotezy continuum*[5].

Inny przykład unaoczni, że podane przez Cantora normy heurystyczne chroniły stworzoną przez niego teorię mnogości przed antynomiami. Na ich podstawie, jak się okaże, udało mu się po raz pierwszy w dziejach matematyki określić ten sposób eliminacji antynomii teoriomnogościowych, który później nazwany został „ograniczaniem rozmiaru" (*limitation of size*)[6].

W podsumowaniu, znając zasady heurystyczne, będzie można postawić pytanie: na ile nowy okazał się program badawczy Cantora? Po to, by lepiej naświetlić oryginalność tego programu, konieczne będzie ponowne odwołanie się do Cantorowskich założeń ontologicznych dotyczących nieskończoności i przeanalizowanie, na ile rzeczywiście zmieniają, a na ile mimo wszystko zachowują one tradycję filozoficzną w tym względzie[7].

---

[4] Chodzi o wskazanie zasad heurystycznych, jakimi kierował się Cantor w swej praktyce matematycznej, oraz przekonań filozoficznych, na których zostały one oparte.

[5] Wydaje się, że cała działalność naukowa Cantora może być – z punktu widzenia problemów badawczych, które starał się on rozwiązać – podzielona na dwa okresy. Pierwszy okres związany był z poszukiwaniem odpowiedzi na pytanie, jak dalece można uogólnić twierdzenie o jednoznacznej reprezentowalności funkcji przez szeregi Fouriera. Drugi może być widziany jako ciągłe doskonalenie aparatury pojęciowej oraz formułowanie i dowodzenie własności teoriomnogościowych w tym celu, by ostatecznie uporać się z problemem *continuum*. Pierwszy okres zaowocował ubocznie powstaniem teorii mnogości i topologii mnogościowej, drugi dojrzałą, bo zawierającą wiele istotnych twierdzeń, choć przedaksjomatyczną formą teorii mnogości.

Z takiej perspektywy obydwa problemy badawcze można traktować jako rodzaj „siły napędowej" rozwoju matematyki, determinującej powstanie nowej dyscypliny matematycznej i zmianę rozumienia tego, czym jest matematyka. Zresztą *hipoteza continuum* pełniła tę funkcję nie tylko w wypadku prac Cantora. D. Hilbert postawił problem *continuum* na czele listy problemów matematycznych, które spodziewał się rozwiązać w ramach programu badawczego formalizmu.

[6] Zob. przypis 104.

[7] Odpowiedzi mogą stanowić istotną przesłankę dla ewentualnych przyszłych badań zmian (paradygmatu?), jakie dzięki pracom Cantora zaszły w matematyce i filozofii matematyki.

1. KONCEPCJA NIESKOŃCZONOŚCI

Zgodnie z określoną we wstępie problematyką należy obecnie przedstawić, jakie konsekwencje w zakresie ontologii nieskończoności miało udowodnienie przez Cantora nierównoliczności dwu zbiorów nieskończonych. Ich uchwycenie domaga się wcześniejszego naszkicowania przedcantorowskiej tradycji w tym względzie.

1. 1. TRADYCJA PRZEDCANTOROWSKA

Wypada zatem podać klasyczne, przedcantorowskie określenie nieskończoności. Nieskończoność zwykło się definiować przez opozycję do tego, co skończone[8]. Za skończone uważano to, co posiadało granicę, kres. Inaczej: nieskończone jest to, co nie posiada granicy[9].

1. 1. 1. OKREŚLENIE NIESKOŃCZONOŚCI

Precyzując określenie nieskończoności, należy pytać, co znaczyło w tradycji przedcantorowskiej, że dana wielość[10] posiadała kres lub granicę[11].

---

[8] „Obwohl es, als Cantor seine Untersuchungen begann, schon längst eine mit reellen und komplexen Zahlen arbeitende Analysis und eine mit Punktmannigfaltigkeiten arbeitende Geometrie gab, war das Unendliche eigentlich nur die Negation des Endlichen" (H. H. S c h a e f e r, *Georg Cantor und das Unendliche in der Mathematik. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, Heidelberg 1982, s. 7).

[9] Por. L u b a ń s k i, dz. cyt., s. 103. Jest interesujące, że Cantor, posługujący się koncepcją nieskończoności określaną tu jako „techniczna" (kryterium Dedekinda), nigdy nie przytaczał (chociażby dla porównania) klasycznej definicji nieskończoności. Ślad klasycznej koncepcji można dostrzec jedynie w Cantorowskich charakterystykach nieskończoności potencjalnej (często nazywanej przez twórcę teorii mnogości „nieskończonością niewłaściwą" – *Uneigentlich-unendliche*): „Was das mathematische Unendliche anbetrifft, soweit es eine berechtigte Verwendung in der Wissenschaft bisher gefunden und zum Nutzen derselben beigetragen hat, so scheint mir dasselbe in erster Linie in der Bedeutung einer veränderlichen, entweder über alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, aber stets *endlich* bleibenden Größe aufzutreten. Ich nenne dieses Unendliche das *Uneigentlich-unendliche*" (C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 165).

[10] Zob. przypis 1 niniejszej pracy.

[11] Należy wspomnieć, że w związku z klasycznymi paradoksami nieskończoności G. W. Leibniz, broniący istnienia nieskończonej liczby przedmiotów, zaproponował następujące

Klasyczne kryterium posiadania przez wielość granicy można sformułować – ze względów praktycznych – inaczej. Łatwiejsze będzie wówczas ukazanie jego nieużyteczności dla Cantorowskiej matematyki i filozofii w definiowaniu nieskończoności po stwierdzeniu nierównoliczności dwu zbiorów nieskończonych[12].

Dana wielość *A* posiada granicę (jest ograniczona) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór *B* taki, że *A* nie jest równoliczna z *B* i równocześnie *A* jest równoliczna z przynajmniej jednym podzbiorem *B'* zbioru *B*. Zbiór *B* nazywa się „granicą wielości *A*". Wielości, które nie posiadają granicy, nazywa się „nieograniczonymi".

Można pokazać, że tak skonstruowana definicja granicy, stosowana jako kryterium skończoności (resp. nieskończoności), dobrze odpowiada przedcantorowskim koncepcjom dotyczącym tego, co skończone i nieskończone. Podział wielości dokonany za pomocą tego narzędzia dokładnie pokrywa się z klasycznym podziałem wielości na skończone i nieskończone[13].

rozwiązanie: wśród wielości trzeba wyróżnić te, które konstytuują *jedność*, *całość* oraz te, które nie stanowią *jedności*. Pierwsze to zbiory. Tylko one mogły być traktowane jako *byty*. Kryterium podziału wielości stanowiło to, czy generują one paradoksy, czy też nie. W tym ujęciu wszystkie wielości równoliczne z wielością liczb naturalnych oraz mocniejsze (w Cantorowskim znaczeniu) nie były zbiorami. Leibniz pisał: „I concede the infinite plurality of terms, but this plurality itself does not constitute a number or a single whole. Just so there is a plurality or a complex of all numbers, but this plurality is not a number or a single whole" (*Philosophical papers and letters*, trans. L.E. Loemker, Dordrecht 1969[2], s. 514 – cyt. za: R. B u n n, *Quantitative relations between infinite sets*, „Annals of Science" 34(1977), vol. 2, s. 186). Zob. też przypis 104 niniejszej pracy.

W pracy przyjęto, że w przedcantorowskiej tradycji filozoficznej – zgodnie z sugestią Leibniza – nie traktowano wymienionych wielości jako zbiorów, ale – jak Leibniz – przyjmowano aktualne istnienie nieskończenie wielu przedmiotów. Jest to pewne uproszczenie, wystarczy tu przypomnieć stanowisko Arystotelesa. Ponieważ jednak nie jest celem niniejszej pracy prezentacja i analiza wszystkich przedcantorowskich koncepcji nieskończoności, dlatego wydaje się, że takie uproszczenie jest dopuszczalne.

Natomiast niektórzy dziewiętnastowieczni matematycy, jeszcze przed Cantorem, wbrew tradycji filozoficznej, dość swobodnie posługiwali się pojęciem zbiorów (aktualnie) nieskończonych. Zob. przypis 32 niniejszej pracy.

[12] Gdyby po stwierdzeniu, że zbiór liczb naturalnych nie jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych (a równocześnie jest jego podzbiorem właściwym), dalej stosować kryterium posiadania granicy jako wyróżnik wielości skończonych, wówczas należałoby konsekwentnie powiedzieć, że zbiór liczb naturalnych jest skończony (jego granicą jest zbiór liczb rzeczywistych. Zob. s. 113 niniejszej pracy).

[13] Przy uwzględnieniu stanu przedcantorowskiej wiedzy matematycznej, to znaczy przede wszystkim nieznajomości tego, że wielość liczb naturalnych nie jest równoliczna z wielością liczb rzeczywistych.

1. Każda wielość posiadająca dokładnie *n* (*n* naturalne) elementów posiadała granicę, bowiem istniał zbiór (na przykład {1, 2, ..., n, n+1}) będący zgodnie z definicją granicą owej wielości. Zatem wielość ta była skończona.

2. Dla innych znanych wielości, typu: „ogół” liczb naturalnych, wymiernych, rzeczywistych nie potrafiono wskazać zbioru, który zgodnie z podaną definicją byłby granicą tych wielości[14]. Co więcej, powszechnie sądzono, że nieumiejętność podania granicy takich wielości nie była przejawem aktualnej niedoskonałości stojących do dyspozycji ówczesnej nauki metod poznawczych. Uważano, iż zbiory będące granicami wymienionych wielości po prostu nie istnieją. Zatem wielości te jako nieograniczone były nieskończone. Warto też zauważyć, że żadna nieskończona wielość nie była zbiorem (w klasycznej koncepcji nieskończoności)[15]. Tym samym nie istniał zbiór nieskończony.

1. 1. 2. DEIZACJA I ABSOLUTYZACJA NIESKOŃCZONOŚCI

W filozofii przedcantorowskiej dostrzegalne są dwa procesy, zależne nawzajem od siebie. Doprowadziły one do ukonstytuowania pewnego wzorca myślenia o tym, co nieskończone. Ponieważ żadna z wielości nieskończonych nie była zbiorem, zatem nie było wśród nich żadnego bytu nieskończonego[16]. Z drugiej strony teologia chrześcijańska i inspirowana przez nią filozofia stwierdzały istnienie bytu nieskończonego, jakim był Bóg. Ponieważ żaden inny znany byt nie był nieskończony, zatem dokonała się:

a) absolutyzacja nieskończoności, to znaczy zaakceptowanie tezy, że istnieje dokładnie jeden byt nieskończony[17].

To zaś automatycznie pociągało za sobą:

b) deizację nieskończoności, to znaczy przyjęcie twierdzenia, że tylko i wyłącznie Bóg jest bytem nieskończonym.

---

[14] Wielość liczb rzeczywistych, zgodnie ze stanem przedcantorowskiej wiedzy, nie była granicą wielości liczb naturalnych, bowiem:
1. nie udowodniono nierównoliczności tych wielości,
2. liczby rzeczywiste nie stanowiły *jedności* – zbioru, traktowane jako *jedność* generowały według tradycji przedcantorowskiej paradoksy.

[15] Zob. przypis 11 niniejszej pracy.

[16] Zob. tamże.

[17] Zob. s. 101 niniejszej pracy.

Zatem Bóg zasługiwał na miano „Absolutu”. W takim ujęciu nieskończone wielości – aczkolwiek nie ujmowane jako byty – były czasem postrzegane jako symbol czy analogat Absolutu. Dlatego wszystkie wielości nieskończone można w tej koncepcji nazwać „wielościami absolutnie nieskończonymi”[18].

O wielościach nieskończonych – w ich tradycyjnym ujęciu – można twierdzić, iż były niepowiększalne[19]. Jeśli już dopuszczano istnienie nieskończenie wielu przedmiotów, jak w wypadku Leibniza, to wielości takie uważano za niepoznawalne za pomocą metod stosowanych w naukach ścisłych, przyrodniczych lub metod filozofii nie odwołującej się do danych teologicznych. O niepoznawalności tego typu wielości miały świadczyć pojawiające się paradoksy[20].

---

[18] Nie jest celem niniejszej pracy dokładne analizowanie, jak w dziejach myśli europejskiej dokonywały się owe procesy, na ile warunkowały się one wzajemnie i jak przeplatały się w nich inspiracje teologiczne, filozoficzne (teodycealne czy kosmologiczne) i matematyczne. Istotne jest, że Cantor zastał w tradycji filozoficznej dobrze zadomowione tezy o absolutnym i Boskim charakterze nieskończoności. Świadczy o tym jego krytyka tez J. Locka, Kartezjusza, Spinozy i G.W. Leibniza: „So verschieden auch die Lehren dieser Schriftsteller sind, in der Beurteilung des Endlichen und Undendlichen stimmen sie an jenen Stellen im wesentlichen darin überein, daß zu dem Begriffe einer Zahl die Endlichkeit derselben gehöre, und daß anderseits das wahre Unendliche oder Absolute, welches in Gott ist, keinerlei Determination gestattet. Was den letzteren Punkt anbetrifft, so stimme ich, wie es nicht anders sein kann, demselben völlig bei, denn der Satz: «omnis determinatio est negatio» steht für mich ganz außer Frage” (dz. cyt., s. 175-176).

Warto jeszcze zauważyć, że szczególnie w teologii zwykło się akcentować nieskończoność jakości (a więc nieskończoność intensywną) Boga. Jednakże w procesie absolutyzacji i deizacji nieskończoności – na płaszczyźnie filozoficznej – zaczęto również rozpatrywać i akceptować nieskończoność Boga w aspekcie ilości (nieskończoność ekstensywna). Tylko dzięki temu można było zasadnie konstruować opozycję: skończone (liczba, zbiór)–nieskończone (Absolut, Bóg).

[19] Warto to kryterium wprowadzić już w tym miejscu, aczkolwiek, jak się okaże, jego przydatność ujawniła się w pełni dopiero w ontologii nieskończoności Cantora. W klasycznej koncepcji nieskończoności odgrywało ono istotną rolę przy odróżnianiu nieskończoności aktualnej i potencjalnej. Dana wielość jest powiększalna wtedy i tylko wtedy, gdy przez dołączenie do niej pewnej liczby elementów można otrzymać zbiór o mocy większej niż „wielość wyjściowa”. Przed „odkryciami” teoriomnogościowymi Cantora nie można było stwierdzić powiększalności wielości liczb wymiernych przez „zapełnienie luk” liczbami niewymiernymi, ponieważ nie potrafiono stwierdzić nierównoliczności obydwu wielości. Dlatego wielość liczb niewymiernych musiała zgodnie z podaną definicją uchodzić za niepowiększalną.

[20] Paradoksy nieskończoności były przyczyną bardzo często reprezentowanego poglądu – wśród zwolenników istnienia wielości nieskończonych – że rozum ludzki jest „zbyt ograniczony”, aby poznać tak „duże” wielości. Przy czym akcentowano mocniej: albo ontyczne (zbyt „duże” wielości), albo poznawcze („ograniczoność” rozumu) uwarunkowania takiego stanu

W związku z absolutyzacją i deizacją nieskończoności uważano, że jedynie za pomocą metod specyficznie teologicznych i przy odwołaniu do jakiegoś rodzaju objawienia można wypowiadać sensowne zdania na temat tego, co absolutnie nieskończone. Zatem to, co nieskończone absolutnie, zostało wyłączone z zakresu poznania wszelkich nauk nieteologicznych.

Natomiast wszystkie wielości skończone były powiększalne[21]. Wszystkie też stanowiły zbiory i były poznawalne za pomocą metod matematycznych.

1. 1. 3. NIESKOŃCZONOŚĆ W MATEMATYCE

Z przedstawionej charakterystyki wielości skończonych i nieskończonych mogłoby wynikać, że przedmiot poznania matematyki do drugiej połowy dziewiętnastego wieku stanowiły jedynie obiekty skończone. Taki pogląd nie jest do końca prawdziwy. Do tego czasu rozwinięto rachunek nieskończonościowy, który swą ontologiczną podstawę znalazł w klasycznym rozróżnieniu nieskończoności aktualnej i potencjalnej. Nieskończoność potencjalna to możliwość posuwania się dowolnie daleko w dołączaniu nowych elementów do już istniejącej wielości skończonej (czyli zbioru). Natomiast w wielości aktualnie nieskończonej wszystkie elementy byłyby dane od razu[22].

rzeczy. Jak bardzo rozpowszechniony był to pogląd, świadczy fakt, że został on podtrzymany przez Cantora w jego apologii istnienia i poznawalności liczb (zbiorów) nieskończonych: „Man führt so oft die Endlichkeit des menschlichen *Verstandes* als Grund an, warum nur endliche Zahlen denkbar sind; ... . Stillschweigend wird nämlich bei der «Endlichkeit des Verstandes» gemeint, daß sein Vermögen rücksichtlich der Zahlenbildung auf endliche Zahlen beschränkt sei. ... . Die Worte «endlicher Verstand», welche man so vielfach zu hören bekommt, treffen, wie ich glaube, in keiner Weise zu: ...” (dz. cyt., s. 176).

[21] Zob. przypis 19 niniejszej pracy.

[22] Istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych nie przyjmowano. Arystoteles w *Fizyce* zaprzeczył istnieniu zbioru aktualnie nieskończonego, a także nieskończonej wielości przedmiotów. Leibniz, jak już podkreślano, dopuszczał nieskończoną *wielość* przedmiotów, choć odrzucał istnienie *zbioru* (aktualnie) nieskończonego.

Tabela 1

	granica	powiększalność	poznawalność matematyczna
skończoność	+	+	+
nieskończoność potencjalna	– –	+	+
nieskończoność aktualna = absolutna	– –	– –	– –

Jest oczywiste, że scharakteryzowana wyżej klasyczna nieskończoność absolutna spełniała kryteria nieskończoności aktualnej. Natomiast określenie nieskończoności potencjalnej odwoływało się jedynie do pewnych niejasnych intuicji[23] i dlatego nie było zbyt precyzyjne. Co więcej, do drugiej połowy dziewiętnastego wieku nie dopracowano się w zasadzie lepszego określenia. Dlatego matematycy współcześni Cantorowi posługiwali się rodzajem definicji ostensywnej, wskazując na jakiś typ konstrukcji matematycznych i stwierdzając: to właśnie jest nieskończoność potencjalna. W ten sposób stawały się one wzorcem nieskończoności potencjalnej. Takim paradygmatem nieskończoności potencjalnej była „skończona, zmienna wielkość, rosnąca i nieograniczona”[24]. Myśl tę można przetransponować na język teoriomnogościowy i pokazać, że wielości odpowiadające takiej wielkości zmiennej były w klasycznym ujęciu – pod pewnym istotnym warunkiem, uwzględniającym ich „wielo-

[23] „Posuwanie się dowolnie daleko”, „dołączanie elementów”.

[24] Warto zauważyć, że Cantor, charakteryzując nieskończoność potencjalną, nie używa wyrażenia definicyjnego „jest to”, ale zwrotów takich jak „o nieskończoności potencjalnej mówi się szczególnie tam, gdzie ...”: „Das potentiale unendliche wird vorzugsweise dort ausgesagt, wo eine unbestimmte, *veränderliche endliche* Größe vorkommt, die ... über alle endlichen Grenzen hinaus wächst (unter diesem Bilde denken wir uns z. B. die sogenannte Zeit, von einem bestimmten Anfangsmomente an gezählt)...” (List do A. Eulenburga z 28. 02. 1886, w: *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, 1887-1888, GA, s. 401).

Tak więc „nieokreślona, skończona, zmienna wielkość” nie jest definicją nieskończoności potencjalnej, ale jedynie wskazaniem pewnej klasy jej matematycznych reprezentantów lub wskazaniem pewnego wzorca. To, iż Cantor odwołuje się do intuicji czasu, również ujawnia trudności ścisłego określenia nieskończoności potencjalnej.

postaciowość", czyli, intuicyjnie, możliwość dołączania nowych elementów – nieograniczone, a przy tym powiększalne[25].

Nieograniczoność – klasyczne kryterium nieskończoności – stanowiła podstawę określania takich wielości (potencjalnie nieskończonych) jako nieskończonych. Ponieważ jednak były one tylko warunkowo nieograniczone[26], dlatego też wyłącznie przez analogię można było mówić o nich jako o wielościach nieskończonych. Stąd wzięły się określenia typu: „nieskończoność niewłaściwa"[27]. Wydaje się, że najlepiej można by scharakteryzować status nieskończoności potencjalnej w tradycji przedcantorowskiej jako rodzaj „dialektycznego pomostu" między tym, co absolutnie (czyli aktualnie) nieskończone, a tym, co skończone. Wielości potencjalnie nieskończone różniły się od absolutnie (aktualnie) nieskończonych tym, że były powiększalne[28] oraz poznawalne za pomocą metod matematycznych. Nie generowały one bowiem paradoksów (zob. tab. 1).

1. 2. MODYFIKACJE CANTORA

Taki stan ontologii nieskończoności zastał Cantor, rozpoczynając swoje prace w zakresie szeregów Fouriera. Badania te miały w efekcie doprowadzić do powstania teorii liczb pozaskończonych. Już jedno z pierwszych istotnych „odkryć", dokonanych w procesie kreowania teorii mnogości, dawało podstawy do zrewidowania tradycyjnej ontologii nieskończoności. Chodzi o relacjonowane po raz pierwszy w liście do R. Dedekinda z roku 1873 twierdzenie o nierównoliczności zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb rzeczywistych[29].

---

[25] Intuicje zawarte w podanym paradygmacie nieskończoności potencjalnej można pretransponować na język teoriomnogościowy, przyporządkowując zmiennej wielkości naturalnej *k* zbiór $A_k = \{1,2,...,k\}$. Dla każdego zbioru skończonego B można podać taką postać zbioru A_k, dla której zbiór B nie był granicą. Zob. definicję na s. 105 niniejszej pracy. Ponieważ zaś w ujęciu tradycyjnym wielości nieskończone (aktualnie) nie były zbiorami, czyli nie mogły stanowić granicy zbioru, zatem zbiór A_k uznawano za nieskończony (potencjalnie).

Natomiast dla każdej postaci zbioru A_k można też skonstruować zbiór mocniejszy: $\{1,2,...,k+1\}$. Zatem zbiór A_k był powiększalny. Zob. przypis 19 niniejszej pracy. Innymi słowy: zbiory nieskończone potencjalnie były powiększalne.

[26] Zob. przypis 25 niniejszej pracy.

[27] „Uneigentlich – unendliche". Zob. przypis 9 niniejszej pracy.

[28] Zob. przypis 25 niniejszej pracy.

[29] Por. G. C a n t o r, Listy do R. Dedekinda z 7. 12. 1873, 9. 12. 1873, w: *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, ed. J. Cavailles, E. Noether, Paris 1937, s. 14-16.

1. 2. 1. NIERÓWNOLICZNOŚĆ ZBIORÓW NIESKOŃCZONYCH

Bardzo istotnym czynnikiem, który pozwolił Cantorowi podważyć – jak się początkowo wydawało[30] – tezę o absolutnym charakterze nieskończoności w jej klasycznym ujęciu[31], było założenie, że obydwie *wielości*, zarówno liczb naturalnych, jak i rzeczywistych stanowią *zbiory* aktualnie nieskończone[32]. Wówczas okazywało się, że *dwa byty*[33], które – gdyby

---

[30] Zob. s. 116 n. niniejszej pracy.

[31] Zob. s. 101 niniejszej pracy.

[32] Czasami formułuje się tezę, że właśnie połączenie przez Cantora dwu pojęć: zbioru i nieskończoności stanowiło doniosły krok w procesie tworzenia przez niego teorii mnogości. Krok ten został jednak zrobiony już wcześniej przez B. Bolzano. Zazwyczaj matematycy w dziewiętnastym wieku, aby nie narazić się na zarzut pogwałcenia „tabu nieskończoności aktualnej", stosowali rozumowania „treściowe". I tak E. Galois nie mówił o ciałach czy zbiorach liczbowych, lecz o własnościach wspólnych wszystkim elementom takiego ciała. Natomiast B. Bolzano w *Paradoxien des Unendlichen* broni istnienia nieskończoności aktualnej i zbiorów aktualnie nieskończonych. Stąd pojęcie to przeszło do szkoły weierstrassowskiej i tym samym do prac Cantora. Por. N. B o u r b a k i, *Elementy historii matematyki*, tłum. z francuskiego S. Dobrzycki, Warszawa 1980, s. 39-40.

Według H. Wanga Cantor, nie mający nigdy wątpliwości co do istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych, przyjmował *implicite* aksjomat nieskończoności. Zdaniem Wanga aksjomat ten został przez Cantora tylko jeden raz wyrażony *explicite* w następującej wypowiedzi: „Die Gesamtheit *aller endlichen Kardinalzahlen v* bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge". H. W a n g, *From philosophy to mathematics*, London 1974, s. 212; G. C a n t o r, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, 1895-1897, GA, s. 293.

Zatem podejście Cantora do kwestii istnienia zbiorów (aktualnie) nieskończonych byłoby zupełnie odmienne od stanowiska R. Dedekinda. Dedekind uważał, że aksjomat nieskończoności da się udowodnić, wprowadzając do rozważań „świat myśli" („Gedankenwelt") jako zbiór. Por. B o u r b a k i, dz. cyt., s. 43.

Nie oceniając w tym miejscu rozwiązania Dedekinda, trzeba stwierdzić, że również w pracach Cantora można odnaleźć próby uzasadnienia istnienia zbiorów nieskończonych. Cantor ujmuje je jako dwa dowody istnienia *infinitum creatum* (czyli nieskończoności w świecie stworzonym):

1. (*a priori*) Pojęcie Boga wskazuje na możliwość i konieczność stworzenia przez niego *transfinitum* („Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der tatsächtlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum". C a n t o r, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, s. 400).

2. (*a posteriori*) Przyjęcie istnienia *transfinitum* w świecie stworzonym pozwoli na doskonalsze tłumaczenie zjawisk przyrodniczych i psychicznych („Ein anderer Beweis zeigt a posteriori, daß die Annahme eines Transfinitum in natura naturata eine besondere, weil vollkommenere Erklärung der Phänomene, im besondern der Organismen und der psychischen Erscheinungen ermöglicht als die entgegengesetzte Hypothese ..." tamże).

przyjmowano, że są *bytami* – określono by w klasycznym ujęciu jako „absolutnie nieskończone", były nierównoliczne, a więc „różne co do istoty"[34]. Tego Cantor się nie spodziewał. Jego komentarz można traktować jako stwierdzenie, że sfalsyfikowana została klasyczna teza o absolutnym charakterze nieskończoności[35].

1. 2. 2. TECHNICZNA DEFINICJA NIESKOŃCZONOŚCI. ZBIORY SKOŃCZONE, POZASKOŃCZONE I NIESKOŃCZONOŚĆ ABSOLUTNA

Stwierdzenie Cantora opierało się na dwóch, przyjętych *implicite* założeniach:

Tego typu argumenty, aczkolwiek nie do przyjęcia, wskazują, że Cantor, uzasadniając istnienie zbiorów nieskończonych, posłużył się w zasadzie tą samą metodą co Dedekind, odwołując się do danych pozamatematycznych. Nadto Cantor podał jeszcze inny argument za istnieniem zbiorów nieskończonych, odwołujący się do praktyki matematycznej. Argument ten można ująć następująco:

3. Dla skonstruowania modelu liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych konieczne jest przyjęcie istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych (ciągów podstawowych). Ponieważ liczby rzeczywiste są już „zadomowione" w matematyce, zatem należy przyjąć istnienie zbiorów aktualnie nieskończonych („...selbst die *endlichen* Irrationalzahlen ohne *entscheidende* Heranziehung aktual-unendlicher Mengen wissenschaftlich streng nicht zu begründen sind, ..." tamże, s. 383).

Na ten sposób uzasadniania przez Cantora istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych zwraca uwagę J.W. Dauben: „Thus the reasons favoring the mathematical acceptance of the irrationals were the same as those urging the mathematical acceptance of the transfinites. The irrationals, as Cantor stressed, were impossible to formulate rigorously without adopting the absolute infinite in some form" (*Georg Cantor's philosophy of mathematics*, „Actes XIIIe Cong. Int. Hist. Sci." 1971, No 5, s. 90).

Poczynione uwagi mają unaocznić to, że Cantor starał się uzasadnić istnienie zbiorów aktualnie nieskończonych. Ocena tych zamierzeń musi być jednak negatywna. W pierwszym argumencie posłużył się metodą podobną jak Dedekind, odwołując się do przesłanek pozamatematycznych. Następne argumenty Cantora mają charakter wnioskowania redukcyjnego i dlatego nie mogą stanowić dowodu. Są to raczej pewne przesłanki, wskazujące na potrzebę przyjęcia aksjomatu nieskończoności.

[33] *Zbiory*, a więc pewne *jedności*, gotowe *całości*, czyli właśnie *byty* – tak intuicyjnie ujmowany był *zbiór* zarówno przez Leibniza, jak i Cantora.

[34] Zob. przypis 35 niniejszej pracy.

[35] „... und ich schliesse daraus, dass es unter den Inbegriffen und Werthmengen Wesenverschiedenheiten gibt, die ich bis vor kurzem nicht ergründen konnte" (C a n t o r, List do R. Dedekinda z 9. 12. 1873, w: *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, s. 16).

1. Dalszym, konsekwentnym podtrzymywaniu tezy, że obie wielości, zarówno liczb naturalnych, jak i rzeczywistych, są *bytami* (*zbiorami*), co zresztą Cantor czynił *explicite* w wielu swoich późniejszych pracach.

2. Przyjęciu – w roku 1873 – konieczności sformułowania nowego kryterium nieskończoności. Bowiem przy zachowaniu klasycznego kryterium zbiór liczb naturalnych, ograniczony przez zbiór liczb rzeczywistych, musiałby zostać uznany za skończony. Posiadanie czy też nieposiadanie granicy przestało być dobrym kryterium nieskończoności. Dlatego Cantor posługiwał się później tzw. kryterium Dedekinda dla odróżniania zbiorów skończonych i nieskończonych[36]. Oparta na tym kryterium definicja zbiorów nieskończonych – jako tych i tylko tych, które posiadają właściwy podzbiór równoliczny ze sobą – będzie nazywana „techniczną definicją nieskończoności". Przyjęcie takiego kryterium „gwarantowało" nieskończoność tych wszystkich *zbiorów*, które jako *wielości* były w tradycyjnym ujęciu uważane za nieskończone.

Techniczna definicja nieskończoności pozwoliła Cantorowi na następujący podział wielości:

1. Zbiory skończone, czyli takie, które nie posiadają podzbioru równolicznego ze sobą. Są one zawsze ograniczone[37] i powiększalne, ponieważ dla każdego takiego zbioru można skonstruować zbiór mocniejszy. Oczywista była ich poznawalność, czego dowodziła chociażby wieloletnia tradycja matematyczna.

2. Wielości aktualnie nieskończone – posiadające przynajmniej jedną „podwielość" właściwą, równoliczną ze sobą – wśród których można wyróżnić dwie postaci:

2.a. Te wielości, które Cantor określał mianem *transfinitum*. Wszystkie one są *zbiorami*. Wbrew zakorzenionej tradycji zbiory te były ograniczone i jednocześnie powiększalne[38], ponieważ – jak Cantor udowodnił – dla każde-

[36] Cantor nie podał definicji zbiorów nieskończonych. Własność, będąca podstawą podziału zbiorów na skończone i nieskończone w definicji Dedekinda, została przez Cantora sformułowana wcześniej – w roku 1878 – ale jedynie w formie twierdzenia. Por. G. C a n t o r, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, 1878, GA, s. 119.

[37] Por. s. 105 niniejszej pracy.

[38] „Sehen wir uns ferner die Definition II an, so folgt zunächst, daß daraus *mit nichten* geschlossen werden kann, daß das A.-U. [Aktual unendliche – J.D.] seiner Größe nach unvermehrbar sein müsse; eine irrige Annahme, die nicht nur in der *alten* und in der sich an sie anschließenden *scholastischen*, sondern auch in der *neueren* und *neuesten* Philosophie, man kann fast sagen, allgemein verbreitet ist. Vielmehr sind wir hier genötigt, eine fundamentale Distinktion zu machen, indem wir unterscheiden:

IIa Vermehrbares A.-U. oder *Transfinitum*.

go takiego zbioru można było wskazać zbiór o większej mocy, mianowicie zbiór wszystkich jego podzbiorów. Twierdził on, że takie zbiory są poznawalne zarówno za pomocą metod matematycznych, jak i za pomocą metod stosowanych w filozofii (metafizyce)[39].

2.b. Nieskończoność absolutna, określona tak przez Cantora dlatego, że – jego zdaniem – była realizowana tylko w jednym bycie, mianowicie w Bogu, i stąd nazywana przez niego „Absolutem"[40].

W analizowanych tekstach można zauważyć, że Cantor posługiwał się językiem i intuicjami teoriomnogościowymi, by przez analogię scharakteryzować nieskończoność absolutną. W tym celu wyszukiwał on nawet pewne teoriomnogościowe odpowiedniki lub też symbole tego rodzaju nieskończoności. Takim symbolem był na przykład „nieskończony ciąg liczb". Cantor miał tu na myśli wielość wszystkich skończonych i pozaskończonych liczb porządkowych[41].

Kryterium podziału nieskończoności aktualnej na *transfinitum* i nieskończoność absolutną stanowiła powiększalność[42]. Nieskończoność absolutna – w odróżnieniu od *transfinitum* – była niepowiększalna, bowiem mogła być traktowana jako „kwantytatywne maximum", „do którego nic nie można dołożyć"[43]. Innymi słowy, rozwijając dalej analogię Cantora: nie istniał *zbiór* o większej mocy niż owo maximum, a zatem było ono nieograniczone. Tak

IIb Unvermehrbares A.-U. oder *Absolutum*" (C a n t o r, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, s. 404-405).

[39] „ [...] so fallen andrerseits die auf das *Transfinite* hingerichteten Fragen hauptsächlich in die Gebiete der *Metaphysik* und der *Mathematik*; sie sind es vorzugsweise, mit denen ich mich seit Jahren beschäftige" (tamże, s. 378).

[40] „Es wurde das A.-U. [aktual unendliche – J.D.] nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, *in Deo* realisiert ist, wo ich es *Absolutunendliches* oder kurzweg Absolutes nenne;..." (tamże).

[41] „Die absolut unendliche Zahlenfolge erscheint mir daher in gewissem Sinne als ein geeignetes Symbol des Absoluten: ..." (G. C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 205 (przypis do s. 174).

[42] Zob. przypis 38 niniejszej pracy.

[43] „Das *Transfinite* mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein *Absolutes* hin, auf das «wahrhaft Unendliche», an dessen Größe keinerlei Hinzufügung oder Abnahme statthaben kann und welches daher quantitativ als *absolutes* Maximum anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination;..." (C a n t o r, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, s. 405).

scharakteryzowana nieskończoność absolutna stanowiła przedmiot poznania teologii spekulatywnej[44].

Tabela 2

	Dedekind kryterium nieskończoności	granica	powiększalność	poznawalność matematyczna
skończoność	– –	+	+	+
nieskończoność potencjalna	– –	+	+	+
nieskończoność aktualna transfinitum	+	+	+	+
nieskończoność aktualna absolutna	+	– –	– –	– –

3. Cantor zachował w swej koncepcji nieskończoności pojęcie nieskończoności potencjalnej. Jednakże było ono, według niego, jedynie „pojęciem relacyjnym" („Beziehungsbegriff"), „przedstawieniem pomocniczym" („Hilfsvorstellung"), którym posługuje się podmiot w procesie poznania. Określenie tego typu nieskończoności jako „synkategorematycznej" wskazywało według Cantora, iż termin „nieskończoność potencjalna" nie mógł samodzielnie pełnić funkcji semantycznej[45]. Podobna myśl została wyrażana w tezie, że temu,

[44] „Legt es besonders der spekulativen Theologie ob, dem Absolutunendlichen nachzuforschen und dasjenige zu bestimmen, was menschlicherseits von ihm gesagt werden kann,..." (tamże, s. 378).

[45] „Daß das sogenannte *potentiale* oder *synkategorematische Unendliche* (Indefinitum) zu keiner derartigen Einteilung Veranlassung gibt, hat darin seinen Grund, daß es ausschließlich als *Beziehungsbegriff*, als *Hilfsvorstellung* unseres Denkens Bedeutung hat, für sich aber keine *Idee* bezeichnet; in jener Rolle hat es allerdings durch die von Leibniz und Newton erfundene Differential- und Integralrechnung seinen großen Wert als Erkenntnismittel und Instrument unseres Geistes bewiesen; eine weitergehende Bedeutung kann dasselbe für sich in Anspruch nehmen" (*Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuale Unendliche*, 1886, GA, s. 373).

co zmienne, a więc nieskończoności potencjalnej, nie przysługuje żaden byt[46]. Jednakże – zdaniem twórcy teorii mnogości – pojęcie to, jako rodzaj użytecznej fikcji, odegrało istotną rolę w powstaniu rachunku różniczkowego i całkowego. Jest oczywiste, że dla Cantora zmienna „przebiegająca" zbiór liczb naturalnych była zawsze skończona, ograniczona, powiększalna. Nie tyle była przedmiotem poznania, ile spełniała funkcję heurystyczną w matematyce.

1. 3. ORYGINALNOŚĆ KONCEPCJI CANTORA?

Zestawienie dwu koncepcji ontologii nieskończoności: klasycznej i Cantorowskiej prowadzi do zaskakujących wniosków. Wydawało się początkowo, że przyjęcie istnienia zbiorów spełniających kryterium Dedekinda oraz zdefiniowanie relacji kwantytatywnych pomiędzy zbiorami w sposób, w jaki uczynił to Cantor, ostatecznie falsyfikują klasyczne przekonanie o istnieniu nieskończoności absolutnej. Mimo to również on wprowadził do swojej koncepcji nieskończoności pojęcie nieskończoności absolutnej. I nie chodziło przy tym jedynie o przypadkową zbieżność terminologiczną. Wystarczy porównać klasyczną i Cantorowską charakterystykę nieskończoności absolutnej. W obydwu wypadkach była ona czymś nieograniczonym, niepowiększalnym i niepoznawalnym za pomocą metod matematycznych. Zarówno według przedstawicieli koncepcji klasycznej, jak i według Cantora istniał dokładnie jeden byt spełniający te warunki[47], był nim Bóg.

W nowej ontologii nieskończoności – poza spełnianiem lub niespełnianiem kryterium Dedekinda – charakterystyki zbiorów skończonych i pozaskończonych (*transfinitum*) były identyczne. Były one ograniczone, powiększalne i determinowalne (poznawalne) za pomocą metod matematycznych.

Wnioski sformułowane powyżej pozwalają na pewne ogólniejsze spostrzeżenie. Gdyby, przy dopuszczeniu istnienia zbiorów spełniających kryterium Dedekinda, przyjąć tradycyjną definicję nieskończoności jako tego, co jest nieograniczone, wówczas Cantorowska koncepcja nieskończoności nie różniłaby się wiele od klasycznej. Jedyną Cantorowską innowacją byłoby wówczas

[46] „Dem Unbestimmten, Veränderlichen, Uneigentlichunendlichen, in welcher Form sie auch erscheinen, kann ich kein Sein zuschreiben, denn sie sind nichts als entweder Beziehungsbegriffe oder rein subjektive Vorstellungen resp. Anschauungen (imaginationes), in keinem Falle adäquate Ideen" (C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 205, przypis do s. 176).

[47] Dlatego właśnie Cantor mógł zasadnie mówić o „absolutnej nieskończoności".

„wzbogacenie” klasy zbiorów skończonych (w znaczeniu klasycznym) o te, które spełniałyby kryterium Dedekinda. Spostrzeżenie takie poczynił w zasadzie sam Cantor, który w dyskusji z neotomistami określił nieskończoność absolutną jako „nieskończoność właściwą”, natomiast *transfinitum* jako „nieskończoność niewłaściwą”[48].

2. *EGALITARYZM TEORIOMNOGOŚCIOWY* – ZASADY HEURYSTYCZNE

Myśl tę można wyrazić jeszcze inaczej. Już w najwcześniejszych pracach Cantora, dotyczących szeregów Fouriera i teorii liczb rzeczywistych, można się dopatrzeć przyjmowanego *implicite* założenia, które określa się jako „*egalitaryzm teoriomnogościowy*”[49]. Zarówno wielości skończone, jak i nieskończone[50] były w przekonaniu Cantora *zbiorami*. Do jednych i do drugich można było stosować pewne podstawowe operacje algebry zbiorów, na przykład: wyróżnianie podzbiorów, sumowanie zbiorów (wówczas jedynie rozłącznych) i ich mnożenie[51]. Znaczy to, że w pojęciu Cantora niektóre

[48] „..., so sind die beiden Begriffe des Absolut- Unendlichen und des Aktual-Unendlichen im Geschaffenen oder Transfinitum wesentlich verschieden, so daß man im Vergleiche beider nur das Eine als *eigentlich Unendliches*, das andere als uneigentlich und aquivoce Unendliches bezeichnen muß” (C a n t o r, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, s. 384-385).

[49] Zarówno sam pomysł, jak i nazwa pochodzą od J. Mayberry. Charakteryzował on następująco Cantorowski *egalitaryzm teoriomnogościowy*, który – jego zdaniem – stał się trwałym i istotnym założeniem nowoczesnej („modern”) matematyki: „In fact, if we look beyond the mere technical terminology into the fundamental presuppositions and attitudes underlying modern mathematics, we shall find that it is based on the idea that *all* sets are finite, in the proper sense [to jest w klasycznym znaczeniu, jako ograniczone – J.D.]. In practical terms this means that all of the basic set- theoretical operations apply indifferently to all sets, whether they are finite in the merely technical sense or not [czyli spełniają albo nie spełniają kryterium Dedekinda – J. D.]. Set theory is thus an **egalitarian** theory. No foundamental theoretical distinction is made betweem sets which are technical infinite and those which are not. This not to say that the technical distinction betweem finite and infinite is unimportent: only that each of the basic operations of the set theory – and in particular, the key operation of power set formation – **is logically prior** to this distinction” (*The consistency problem for set theory: An essay on the Cantorian foundations of mathematics*, „The British Journal for the Philosophy of Science” 28(1977), s. 138).

[50] Według wprowadzonego kilka lat później kryterium Dedekinda.

[51] Do tych podstawowych operacji teoriomnogościowych dodaje się też możliwość tworzenia dla dowolnego zbioru (skończonego lub nieskończonego w znaczeniu Dedekinda) zbioru potęgowego. Tyle, że Cantor zaprezentował koncepcję zbioru potęgowego dopiero w latach

operacje algebry zbiorów były *logicznie pierwotne* w stosunku do podziału zbiorów według kryterium Dedekinda na skończone i nieskończone. W tym znaczeniu zbiory skończone i nieskończone traktowane były tak samo. Inaczej: zbiory nieskończone należało traktować podobnie, jak dobrze zadomowione w tradycji matematycznej zbiory skończone. I w takim, przyjmowanym od początku, aczkolwiek nie formułowanym wprost założeniu Cantora, trzeba się dopatrywać istotnego *principium* jego heurystyki: należy traktować, na ile to tylko możliwe, wielości nieskończone (*transfinitum*) podobnie jak zbiory skończone.

Przedstawiona powyżej koncepcja nieskończoności stanowiła podstawę dla przyjmowanego przez Cantora zbioru zasad heurystycznych[52], którymi kierował się on w badaniach teoriomnogościowych, a przede wszystkim w badaniach wielości nieskończonych (w znaczeniu technicznym). Do wspomnianego zbioru zasad heurystycznych wypada zaliczyć następujące tezy:

1. Każda nieskończoność potencjalna zakłada istnienie związanej z nią nieskończoności aktualnej[53].
2. Należy traktować wielości nieskończone tak dalece, jak to tylko możliwe, jak zbiory skończone.
3. Nieskończoność absolutna nie jest determinowalna za pomocą metod matematycznych[54].

---

osiemdziesiątych. Jednakże, w *Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre* z lat 1895-1897, będących próbą w miarę systematycznego przedstawienia teorii mnogości, tworzenie zbioru potęgowego jest operacją niezależną (*logicznie pierwotną*) w stosunku do podziału zbiorów według kryterium Dedekinda.

[52] Ten zbiór zasad to pewien program badawczy (w znaczeniu I. Lakatosa). Nie jest w tym miejscu istotne, czy prezentowana lista jest zbiorem wszystkich zasad heurystycznych, którymi kierował się w swoich badaniach Cantor. Na podstawie wybranych przykładów zastosowań wymienionych zasad będzie można pokazać, że odgrywały one ważną rolę w próbach rozwiązywania istotnych problemów, które pojawiały się w pracach teoriomnogościowych Cantora. Te same zasady zostały wymienione w pracy M. Halletta *Towards a theory of mathematical research programmes* („The British Journal for the Philosophy of Science" 30(1979), s. 147).

[53] Zasada ta została po raz pierwszy sformułowana przez K. Gutberleta, niemieckiego neotomistę. Por. K. G u t b e r l e t, *Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet*, Mainz 1878. Na tekst Gutberleta powołuje się Cantor: „Um so mehr muß rühmend hervorgehoben werden, daß Herr Prof. Gutberlet mit Nachdruck und Erfolg (1. Abt., 1. Abschn. §§ 3, 5 und 6 seines Werkes) auf die Abhängigkeit des potentialen Unendlichen von einem zugrunde liegenden Aktualunendlichen hinweist". C a n t o r, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, s. 394.

[54] „Daß wir auf diesem Wege immer weiter, niemals an eine unübersteigbare Grenze, aber auch zu keinem auch nur angenäherten Erfassen des Absoluten gelangen werden, unterliegt für

Pierwsze dwie zasady można nazwać „pozytywnymi", natomiast trzecią „negatywną zasadę heurystyczną" Cantorowskiego programu badawczego.

3. ZASTOSOWANIA ZASAD HEURYSTYCZNYCH

Należy obecnie przeanalizować, na ile Cantor rzeczywiście kierował się w rozwiązywaniu problemów badawczych zasadami heurystycznymi, które sformułował w tekstach natury filozoficznej lub ujawnił na początku praktyki matematycznej. W tym celu zostaną zaprezentowane dwa przykłady, obrazujące, jak w istotnych dla Cantorowskiej teorii mnogości sytuacjach problemowych funkcjonowały wymienione zasady.

3. 1. „ROZWIĄZANIE" PROBLEMU ABSOLUTNEJ SKALI MOCY ZBIORÓW

Pierwszy przykład związany jest z problematyką mocy zbiorów. Cantor, od momentu stwierdzenia nierównoliczności dwu zbiorów nieskończonych w roku 1873, dysponował r e l a t y w n ą miarą mocy zbiorów. Miara ta oparta została na wprowadzonych relacjach kwantytatywnych. Cantor przyjmował *implicite* już w roku 1878, że musi istnieć jakiś rodzaj skali, za pomocą której będzie można „mierzyć" bezwzględną moc zbiorów nieskończonych. Znalezienie takiej skali stanowiło istotny problemem badawczy[55].

---

mich keinem Zweifel. Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden" (C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 205 – przypis do s. 174).

„Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt" (tamże, s. 176).

[55] Cantorowski problem skali mocy zbiorów można sformułować następująco: czy zbiory nieskończone tworzą zbiór dobrze uporządkowany ze względu na wprowadzone relacje kwantytatywne?

Rozwiązanie, do którego Cantor dążył – wyrażone we współczesnych kategoriach – było w istocie następujące: w klasie wszystkich zbiorów nieskończonych zbudować klasy abstrakcji ze względu na relację równoliczności (takie właśnie klasy konstruował Cantor, formułując po raz pierwszy *hipotezę continuum*. Zob. przypis 56 niniejszej pracy). Następnie uzasadnić, że zbiór klas abstrakcji jest dobrze uporządkowany ze względu na relację mniejszości. Tak uporządkowany zbiór stanowiłby poszukiwaną skalę. Już na etapie wprowadzenia podziału na klasy abstrakcji moc stałaby się nie relacyjną cechą danego zbioru, opisującą pewną jego własność w stosunku do innego zbioru, ale absolutną cechą każdego zbioru (współcześnie

Rozwiązanie wspomnianego problemu stanowiło warunek konieczny dla rozstrzygnięcia innego, szczegółowego, ale istotnego problemu: które miejsce na tej skali zajmuje moc *continuum*? Potrzeba było stosownej skali, aby postawić hipotezę, że jest to miejsce drugie. Tak właśnie można sformułować słynną *hipotezę continuum*. Zresztą całą tę sytuację problemową należałoby w zasadzie odwrócić. To właśnie *hipoteza continuum*, której uzasadnienie stało się po roku 1879 istotnym czynnikiem determinującym badania teoriomnogościowe Cantora, stymulowała ciągłe stawianie ogólnego problemu mocy i próby jego rozwiązania[56].

---

definiowano by tę cechę posługując się pojęciem klasy wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem).

Warto dodać, że na początku lat osiemdziesiątych Cantor wyraźnie opowiadał się za tym, że moc jest absolutną cechą każdego zbioru: „Auch der *Mächtigkeitsbegriff*, welcher den Begriff der ganzen Zahl, dieses Fundament der Größenlehre als Spezialfall in sich faßt und als allgemeinste genuine Moment bei Mannigfaltigkeiten angesehen werden dürfte, ist so wenig auf die linearen Punktmengen beschränkt, daß er vielmehr als Attribut einer jeglichen *wohldefinierten* Mannigfaltigkeit betrachten werden muß,...” (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Nr 3, 1882, GA, s. 150).

Należy przypomnieć, że Cantor użył pierwotnie terminu „moc” w znaczeniu relacyjnym, określając, kiedy dwa zbiory mają tę samą moc i kiedy jeden zbiór ma większą moc od drugiego zbioru (resp. mniejszą). Następnie zaś stwierdził, że ciąg liczb naturalnych ma **najmniejszą** moc spośród mocy wszystkich zbiorów nieskończonych: „Die Reihe der positiven ganzen Zahlen *v* bietet, wie sich leicht zeigen läßt, die kleinste von allen Mächtigkeiten dar, welche bei unendlichen Mannigfaltigkeiten vorkommen” (*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, s. 119-120). Wypowiedź ta implikuje, że już wówczas, to znaczy w roku 1878, Cantor przyjmował możliwość podania jakiejś skali, za pomocą której można by określić absolutną moc każdego zbioru nieskończonego. Por. tamże.

[56] Problem i *hipoteza continuum* zostały po raz pierwszy sformułowane przez Cantora w trakcie badań własności nieskończonych zbiorów punktowych zawartych w jednowymiarowej przestrzeni euklidesowej: „..., so entsteht die Frage, wie sich die verschiedenen Teile einer stetigen geraden Linie, d.h. die verschiedenen in ihr denkbaren unendlichen Mannigfaltigkeiten von Punkten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verhalten. Entkleiden wir dieses Problem seines geometrischen Gewandes und verstehen, wie dies bereits in § 3 auseinandergesetzt ist, unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeler Zahlen jeden denkbaren Inbegriff unendlich vieler, voneinander verschiedener reeller Zahlen, so fragt es sich, in *wie viel* und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden. Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, daß die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich ergebenen Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, daß sie gleich ***Zwei*** ist” (*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, s. 132).

Tekst ten optrzony jest w GA komentarzem wydawcy E. Zermelo: „Hier äußert Cantor zum ersten Male seine Vermutung, daß dem Linearkontinuum die «zweite Mächtigkeit» zukomme: die Cantorsche *Kontinuum-Hypothese*” (tamże, s. 133).

3. 1. 1. PORZĄDEK DETERMINUJE MOC

W znalezieniu arytmetycznej skali dla bezwzględnego „pomiaru" mocy zbiorów Cantor posłużył się pomysłem, który jest dobrą ilustracją zastosowania drugiej zasady heurystycznej. Bazę dla jego idei stanowił sposób określenia mocy zbiorów skończonych. Moc taką można podać, „numerując" lub „przeliczając" elementy zbioru skończonego za pomocą kolejnych liczb porządkowych, rozpoczynając od 1. W ten sposób moc (czyli liczba kardynalna) zbioru skończonego była określona przez liczbę porządkową. Zatem ciąg liczb porządkowych stanowił bezwzględną skalę, za pomocą której można było określić moc zbioru skończonego[57].

Istota pomysłu Cantora polegała na założeniu, iż liczby porządkowe mogą również stanowić podstawę dla konstrukcji skali służącej do „pomiaru" mocy zbiorów pozaskończonych. Widać tu wyraźnie wpływ normy heurystycznej: traktować wielości nieskończone tak długo, jak to tylko możliwe, jak zbiory skończone.

Do realizacji wspomnianego celu nie nadawał się, rzecz jasna, ciąg skończonych liczb porządkowych *1, 2, ..., n, ...* . Konieczne było skonstruowanie pozaskończonych liczb porządkowych. Cantor zdawał sobie z tego sprawę. Jego zdaniem dalsze prowadzenie badań w zakresie teorii mnogości było całkowicie uzależnione od „rozszerzenia pojęcia liczby", to znaczy od wprowadzenia pozaskończonych liczb porządkowych[58]. Nie było to trudne, bowiem Cantor dysponował, wypracowaną w trakcie badań nad zbiorami punktowymi, koncepcją *symboli nieskończonościowych*.

[57] Inna sprawa, że dla zbioru skończonego liczba porządkowa zawsze równa się liczbie kardynalnej. Przed Cantorem rozróżniano jedynie intuicyjnie te dwie kategorie liczb. Dopiero jego prace pozwoliły na ścisłą definicję obydwu pojęć, a zatem na ich wyraźne rozróżnienie. Istotne było przede wszystkim pokazanie, że w przypadku zbiorów nieskończonych dwa zbiory o różnej liczbie porządkowej mogą posiadać tę samą moc.

[58] „Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre ist an einem Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlensbegriff über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von niemanden gesucht worden ist. Die Ahängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlenbegriffs versetzt sehe, ist eine so große, daß es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen" (C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 165).

3. 1. 2. KLASY LICZB PORZĄDKOWYCH

W roku 1883 Cantor wprowadził intuicyjnie pozaskończony ciąg liczb porządkowych, niezależnie od pojęcia zbiorów punktowych[59]. W tym celu podał trzy zasady tworzenia takiego ciągu, z których dwie pierwsze można by określić jako „zasady generowania”[60], natomiast trzecią jako „zasadę

---

[59] Jeszcze przed wprowadzeniem pozaskończonego ciągu liczb porządkowych Cantor podał – w tej samej pracy z roku 1883 – opisowe określenie zbioru dobrze uporządkowanego (por. C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten*, s. 168). Ścisłą definicję wprowadził dopiero w roku 1895 (por. G. C a n t o r, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, s. 312-313).

Intuicje Cantora dotyczące dobrego uporządkowania zbioru, przedstawione w roku 1883, dobrze odpowiadają współczesnej definicji zbioru dobrze uporządkowanego [M, R] (dla wygody opuszczono kwantyfikatory ogólne, wiążące wszystkie zmienne wolne w warunkach (1), (2), (3)):

(1) $\sim(xRx)$

(2) $(xRy) \wedge (yRz) \rightarrow (xRz)$

(3) $\sim(x=y) \rightarrow (xRy) \wedge (yRx)$

(4) W każdym niepustym podzbiorze zbioru M, uporządkowanym według relacji R istnieje element najmniejszy.

Definicja z roku 1895 jest równoważna przedstawionej definicji współczesnej, tyle że w koncepcji Cantora warunek (4) jest twierdzeniem.

Ponieważ Cantor już przed wprowadzeniem pozaskończonego ciągu liczb porządkowych (który w jego pojęciu – co przyjmował *implicite* – był dobrze uporządkowany czy raczej stanowił wzorzec wielości dobrze uporządkowanej) posiadał ideę zbioru dobrze uporządkowanego, dlatego zasadnie mógł mówić o „pierwszej liczbie” jakiegoś jego podciągu czy o „elemencie następnym”. Dlatego też w niniejszej pracy, w trakcie relacjonowania poczynań Cantora, terminów tych używa się bez dodatkowych wyjaśnień.

Wraz z pojęciem zbioru dobrze uporządkowanego Cantor (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 168) wprowadził w roku 1883 pojęcie „Anzahl”. „Anzahl” została określona relacyjnie jako cecha dwu podobnych (izomorficznych) zbiorów dobrze uporządkowanych. Relacja podobieństwa (jeszcze bez podania nazwy) zbiorów na tym etapie została wprowadzona intuicyjnie. W tekście Cantora zawarte są dwie bardzo istotne, choć nie udowodnione wówczas tezy:

a) „Anzahl” jest absolutną cechą każdego zbioru dobrze uporządkowanego,

b) każda „Anzahl” jest równa jakiejś liczbie *a* należącej do pozaskończonego szeregu liczb porządkowych.

Nastąpiło tu po raz pierwszy powiązanie pojęć zbioru dobrze uporządkowanego, podobieństwa zbiorów i liczby porządkowej. W roku 1883 liczby porządkowe były wprowadzane przez Cantora za pomocą dwu zasad: generowania i ograniczania (zob. s. 122 n. niniejszej pracy). Dopiero później definiował on liczbę porządkową jako typ porządkowy zbiorów dobrze uporządkowanych.

[60] „Erzeugungsprinzip” (por. C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten*, s. 166).

ograniczania (powstrzymywania)”[61]. Cantor nie zdefiniował dokładnie owych zasad, a raczej opisowo podał sposób ich funkcjonowania.

a) Funkcja pierwszej zasady polegała na generowaniu kolejnych skończonych liczb porządkowych przez dodawanie 1. Innymi słowy: istota jej działania sprowadzała się do indukcyjnego tworzenia dla liczby a jej następnika o postaci $a+1$. Utworzony w ten sposób ciąg nazywał Cantor „pierwszą klasą liczbową”[62].

b) Dzięki drugiej zasadzie można było wprowadzić liczbę ω jako pierwszą liczbę porządkową, która następowała po wszystkich skończonych liczbach porządkowych[63].

c) Wprowadzanie kolejnych liczb porządkowych do pozaskończonego ciągu odbywało się przez kombinowane stosowanie obydwu zasad generowania. Natomiast celem wprowadzenia zasady ograniczania był podział pozaskończonego ciągu liczb porządkowych na klasy liczbowe. Cantor definiował drugą klasę liczbową jako zbiór wszystkich liczb porządkowych a – począwszy od w – takich, że ciąg ich wszystkich poprzedników, rozpoczynający się od 1, jest równoliczny z pierwszą klasą liczbową[64]. Zasada ta zezwalała w ogólnym wypadku na wprowadzenie nowej liczby a wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wszystkich poprzednio wprowadzonych liczb miał moc równą poprzednio zdefiniowanej n-1-*ej* klasy liczbowej. W przeciwnym wypadku – jak należy się domyślać – należało wprowadzić liczbę b, która była pierwszą liczbą n+1-*ej* klasy liczbowej i konstruować nadal następne liczby porządkowe, za pomocą obydwu zasad generowania. Zbiór wszystkich liczb a, następujących po poprzednio zdefiniowanej n-1-*ej* klasie liczbowej i poprzedzających liczbę b, nazywany był „n-tą klasą liczbową”[65].

[61] „Hemmungs- oder Beschränkungsprinzip”, tamże.

[62] Por. tamże, s. 195.

[63] Por. tamże.

[64] Zatem ciąg poprzedników danej liczby posiadał moc zbioru liczb naturalnych.

[65] Cantor, podając sposób tworzenia kolejnych klas liczbowych, opierał się – jak widać – na zasadzie indukcji zupełnej (skończonej). Dlatego w konsekwencji mógłby zbudować jedynie takie klasy Kl(n), których indeksy n przebiegały zbiór liczb naturalnych. Inaczej: podane przez niego zasady budowania pozaskończonego ciągu liczb porządkowych nie wystarczały do skonstruowania klasy Kl(ω) ani mocy $\aleph_\omega$ (jest to spostrzeżenie E. Zermelo: „Indessen würden die drei Cantorschen Prinzipe schon bei der Bildung der ω*ten* Zahlenklasse nicht ausreichen”., E. Zermelo, w: C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten*, s. 199.) Dlatego w niniejszej pracy przyjęto zasadę, że indeksy przy klasach liczbowych przebiegają jedynie zbiór liczb naturalnych. Cantor natomiast był przekonany, że za pomocą wprowadzonych zasad mógł konstruować niepoliczalnie wiele klas liczbowych (por. tamże). Aby ten cel osiągnąć, należało jednak wcześniej sformułować zasadę indukcji pozaskończonej.

3. 1. 3. POZASKOŃCZONY CIĄG KLAS LICZB PORZĄDKOWYCH JAKO ABSOLUTNA SKALA MOCY

Dalsze rozumowanie Cantora z roku 1883, mające na celu rozwiązanie ogólnego problemu mocy, zawiera cały szereg twierdzeń, z których tylko nieliczne były wówczas dowodzone, niektóre tylko wypowiedziane, część zaś przyjęta *implicite*.

Po wprowadzeniu pojęcia klas liczbowych Cantor udowodnił, iż:
$M(Kl(1)) <_C M(Kl(2))$[66].
Następnie przeprowadził dowód twierdzenia, że nie istnieje zbiór Z, taki, że:
$M(Kl(1)) <_C M(Z) <_C M(Kl(2))$[67].
Teksty Cantora z roku 1883 nie zawierały natomiast dowodu tych twierdzeń dla przypadku ogólnego n:
$M(Kl(n)) <_C M(Kl(n+1))$
oraz że nie istnieje zbiór Z taki, że:
$M(Kl(n)) <_C M(Z) <_C M(Kl(n+1))$[68].

Tak więc Cantor dysponował już dobrze uporządkowanym zbiorem mocy zbiorów $[M(Kl(1)), M(Kl(2)), ..., M(Kl(n)), ..., <_C]$[69]. Tym samym miał w

---

W latach dziewięćdziesiątych Cantor rozszerzył stosowanie zasady indukcji na pozaskończony ciąg liczb porządkowych (*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, s. 336 wraz z uwagami E. Zermelo na s. 355). Stanowi to dobry przykład kierowania się przez niego drugą zasadą heurystyczną (tyle, że ciąg liczb pozaskończonych okazał się ostatecznie wielością absolutnie nieskończoną). Zasadę indukcji pozaskończonej dla wszystkich zbiorów dobrze uporządkowanych sformułował po raz pierwszy G. Gentzen (*Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, „Mathematische Annalen” 69(1936), Bd. 112, s. 493-565). Wykorzystał ją w dowodzie niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych z aksjomatem indukcji.

[66] *Über unendliche lineare Mannigfaltigkeiten*, s. 197-199.
„M(N)” to moc zbioru N), „Kl(n)” oznacza n-tą klasę liczbową, przy czym n jest liczbą naturalną (zob. przypis 65 niniejszej pracy).

[67] Por. tamże, s. 199-200.

[68] Wszystkie cztery twierdzenia zawarte są w następującym tekście: „Ich zeige aufs bestimmteste, daß die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse (II) nicht nur verschieden ist von der Mächtigkeit der ersten Klasse, sondern daß sie auch tatsächtlich die *nächst höhere* Mächtigkeit ist; wir können sie daher die *zweite* Mächtigkeit oder die Mächtigkeit zweiter Klasse nennen. Ebenso ergibt die dritte Zahlenklasse die Definition der dritten Mächtigkeit oder der Mächtigkeit dritter Klasse usw.” (tamże, s. 167).

[69] Założono tutaj, że Cantor na tym etapie prowadzenia badań teoriomnogościowych przyjmował, iż moc jest absolutną cechą każdego zbioru, którą można zdefiniować jako zbiór wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem Z lub jako „pojęcie ogólne”, pod które te i tylko te zbiory podpadają (zob. przypis 55 niniejszej pracy).

Po podstawieniu (a) $M(Kl(n)) = \aleph_{n-1}$; otrzymuje się dobrze uporządkowany zbiór *alefów*:

zasadzie skonstruowaną skalę, za pomocą której mógł „mierzyć” bezwzględną moc zbiorów.

Powstał jednak problem, czy moc każdego zbioru Z (pozaskończonego) można wskazać na podanej skali. Innymi słowy: czy dla każdego pozaskończonego zbioru istnieje takie n, że $M(Kl(n)) =_C M(Z)$?[70]

W rozwiązaniu tego problemu ponownie pomocny okazał się pozaskończony ciąg liczb porządkowych. Jednocześnie ten właśnie problem, do którego sprowadziło się ogólne zagadnienie mocy, zmusił Cantora do sformułowania tezy o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru.

Rozwiązanie postawionego zagadnienia można rekonstruować na podstawie przedstawionych przez Cantora tez następująco:

1. Dla każdego zbioru Z istnieje dobrze uporządkowany zbiór [X, R], składający się z tych i tylko tych elementów, które należą do zbioru Z. Cantor w roku 1883 uważał, że jest to teza niedowodliwa, „podstawowe, ogólnie ważne, godne uwagi prawo myślenia”[71].

2. Zbiorowi dobrze uporządkowanemu [X, R] przysługuje „Anzahl”, która równa jest pewnej pozaskończonej liczbie porządkowej a[72].

$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_n, ...$

Równanie (a) było w swej istocie definicją *alefów*. W ten sam sposób Cantor definiował bowiem później (w roku 1895 i 1897) dwie najmniejsze pozaskończone liczby kardynalne: „Die Gesamtheit *aller endlichen Kardinalzahlen v* bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Kardinalzahl «Alef-null», in Zeichen $\aleph_0$,...” (*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, s. 293). *„Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenklasse* {a} *ist die zweitkleinste transfinite Kardinalzahl Alef-eins”* (tamże, s. 333).

[70] Wspomniany problem można sformułować jeszcze inaczej: czy moc każdego pozaskończonego zbioru jest *alefem* (zob. przypis 69 niniejszej pracy).

[71] „Der Begriff der wohlgeordneten Menge weist sich als fundamental für die ganze Mannigfaltigkeitslehre aus. Daß es immer möglich ist, jede wohldefinierte Menge in die Form einer wohlgeordneten Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen” (*Über unendliche lineare Mannigfaltigkeiten*, s. 169).

Wypowiedź Cantora sugeruje, że teza o możliwości dobrego uporządkowania zbioru jest niekonstruktywna. Jest to typowe twierdzenie o istnieniu, nie podające sposobu konstrukcji zbioru, który byłby dobrze uporządkowany i składał się z dokładnie tych samych elementów, co zbiór wyjściowy. Cantor, podając najpierw tę tezę jako pewnik, zmienił później zdanie i uważał, że jest to twierdzenie, które można i należy udowodnić (zob. przypis 91 niniejszej pracy). Teza ta została ostatecznie udowodniona przez E. Zermelo, za pomocą aksjomatu wyboru, który również jest tezą niekonstruktywną (por. E. Z e r m e l o, *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*, „Mathematische Annalen” 37(1904), Bd. 59, s. 514-516; t e n ż e, *Neuer Beweis für die Wohlordnung*, tamże 41(1908), Bd. 65, s. 107-128).

[72] Zob. przypis 59 niniejszej pracy, tezy (a) i (b).

3. Łatwo uzasadnić, że M({1,2,...a}) = M(X) = M(Z)
4. Istnieje takie n', że a ∈ Kl(n'+1).
5. Wówczas:

M({1,2,...,a}) = M(Kl(n'))[73].

Zatem istnieje takie n', że M(Z) = M(Kl(n')); według późniejszej notacji M(Z) = $\aleph_{n'}$[74]. Innymi słowy: skala wyznaczona przez moce klas pozaskończonych liczb porządkowych „mierzyła" moc każdego zbioru pozaskończonego.

W ten sposób został zrealizowany pomysł Cantora – oparty na zasadzie heurystycznej „traktować wielości pozaskończone tak, jak zbiory skończone" – by określić, podobnie jak w wypadku zbiorów skończonych, moc zbiorów pozaskończonych za pomocą liczb porządkowych. Przesłanka (5) wraz z końcowym wnioskiem zrekonstruowanego rozumowania Cantora wskazuje, że liczba porządkowa *a*, przyporządkowana dowolnemu zbiorowi pozaskończonemu *Z*, determinuje, określa w sposób jednoznaczny jego moc.

Inna sprawa, że była to procedura niekonstruktywna, bowiem oparta na niekonstruktywnej tezie o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru[75]. W konkretnym wypadku nie wiadomo, j a k uporządkować dany zbiór pozaskończony, a zatem i j a k ą przypisać mu liczbę porządkową. Jednakże, a to jest istotą niniejszych analiz, okazało się, że Cantorowskie normy heurystyczne pozwoliły, jeśli nie rozwiązać ogólny problem mocy, to ustawić go w zupełnie innym świetle.

---

[73] „Nehmen wir zuerst eine Menge, welche die Mächtigkeit der ersten Klasse hat, ..., so ist ihre Anzahl immer eine bestimmte Zahl der *zweiten* Zahlenklasse ... . Wir können diese Sätze auch folgendermaßen ausdrücken: jede Menge von der Mächtigkeit *erster* Klasse ist abzählbar durch Zahlen der zweiten Zahlenklasse und nur durch solche ... . Die analogen Gesetze gelten für die Mengen höherer Mächtigkeiten", C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmanningfaltigkeiten*, s. 169.

[74] Zob. przypis 69 niniejszej pracy.

[75] Należy jeszcze raz podkreślić, że w roku 1883 Cantor przyjmował tę tezę jako pewnik, rodzaj tautologii logicznej (zob. przypis 71 niniejszej pracy). Później zaś zmienił zdanie i starał się ją udowodnić (zob. przypis 91 niniejszej pracy). Jest to powód, dla którego w tytule paragrafu mowa jest o *„rozwiązaniu"* a nie o *rozwiązaniu* problemu absolutnej skali mocy zbiorów.

3. 1. 4. DALSZE IMPLIKACJE ZASTOSOWANIA ZASAD HEURYSTYCZNYCH

Warto zebrać w pewną całość to, co dzięki stosowaniu przez Cantora jego norm heurystycznych, niejako „przy okazji" zostało „odkryte" lub sformułowane w formie nie udowodnionych jeszcze tez czy podane jako rodzaj aksjomatu logiki.

1.a. Moc zbioru liczb rzeczywistych (zbioru typu *continuum*) jest równa mocy którejś ze skonstruowanych przez Cantora klas liczbowych[76].

1.b. Można było po raz pierwszy w formie algebraicznej sformułować *hipotezę continuum*:

$c = M(Kl(2))$,

lub posługując się później wprowadzonymi *alefami*:

$c = \aleph_1$,

zaś po udowodnieniu, że $c = 2^{\aleph_0}$, *hipotezę continuum*, już w jej uogólnionej wersji można było zapisać następująco:

$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$

Wypada zauważyć, że tak formułowana *hipoteza continuum*, jako istotny problem odziedziczony przez formalistów po Cantorze, stała się ważnym stymulatorem rozwoju programu badań metamatematycznych[77].

2. Wprowadzone zostało – jeszcze intuicyjnie – fundamentalne dla teorii mnogości pojęcie zbioru dobrze uporządkowanego[78].

3. W trakcie rozwiązywania problemu mocy Cantor – zobligowany do stworzenia fundamentów teorii liczb porządkowych – był już bliski koncepcji, że liczba porządkowa może być traktowana jako typ porządkowy zbioru dobrze uporządkowanego[79].

4. Sam pomysł definiowania kolejnych liczb kardynalnych za pomocą pozaskończonego ciągu liczb porządkowych znalazł swoje zastosowanie we współczesnej teorii mnogości. Dzisiaj zwykło się jednak definiować kolejne pozaskończone liczby kardynalne jako najmniejsze liczby porządkowe po-

[76] Tak można było twierdzić, dopóki przyjmowało się jako pewnik tezę o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru (zob. przypis 71 niniejszej pracy).

[77] Na liście D. Hilberta, zawierającej 23 problemy, których rozwiązanie uważał on za istotne dla matematyki na początku dwudziestego wieku, problem *continuum* znalazł się na pierwszym miejscu (por. *Die Hilbertschen Probleme. Vortrag „Mathematische Probleme" von D. Hilbert gehalten auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress Paris 1900*, erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Aleksandrov, Leipzig 1971, s. 58).

[78] Zob. przypis 59 niniejszej pracy.

[79] Zob. tamże.

szczególnych klas liczbowych. Zresztą taki sposób definiowania liczb kardynalnych nie był najprawdopodobniej obcy Cantorowi[80].

5. Postawienie tezy o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru. Teza ta miała wówczas dla Cantora charakter nie tyle nawet teoriomnogościowego aksjomatu, ile wręcz „prawa myślenia", a więc była czymś w rodzaju niedowodliwej tezy logiki[81]. Późniejsze spory wokół tego twierdzenia – i aksjomatu wyboru, za pomocą którego można je było udowodnić – toczone pomiędzy formalistami i intuicjonistami okazały się niezwykle płodne dla nowoczesnego ujęcia zagadnień podstaw matematyki.

To zestawienie hipotez, doniosłych, aczkolwiek nie zawsze udowodnionych tez oraz wprowadzonych pojęć, które pojawiły się w pracach Cantora w ścisłym związku z próbą rozwiązania problematyki mocy zbiorów, wystarcza, aby skonstatować doniosłość zasady heurystycznej: należy traktować wielości pozaskończone tak, jak zbiory skończone. Jak bowiem pokazano, sposób rozwiązania zagadnienia – w wersji z roku 1883 – okazał się zdeterminowany Cantorowską heurystyką[82].

3. 2. KONSTRUKCJA POZASKOŃCZONYCH LICZB PORZĄDKOWYCH

Warto też wskazać, jak heurystyka determinowała rozwiązania w szczegółowych sytuacjach problemowych, które wyłaniały się przy okazji rozwiązywania ogólnego problemu mocy zbiorów. Chodzi o pokazanie, na ile pierwsza i druga norma heurystyczna okazały się pomocne przy określeniu drugiej zasady generowania[83] pozaskończonego szeregu liczb porządkowych.

Skończone ciągi kolejnych liczb naturalnych – a więc zbiory – można powiązać z liczbami naturalnymi za pomocą następującej reguły:
$\{0\} \to 1$,
$\{0,1\} \to 2$,

[80] „Übrigens kann man diese Mächtigkeit, wie es auch Cantors Gewohnheit war, durch die niedrigste oder die Anfangszahl jener Zahlenklasse repräsentieren und überhaupt die Alephs mit diesen Anfangszahlen identifizieren" (G. K o w a l e w s k i, *Bestand und Wandel*, München 1950, s. 202).

[81] Zob. przypis 71 niniejszej pracy.

[82] Taki sposób rozwiązania problemu mocy zbiorów zachował w pojęciu Cantora swoją ważność do momentu, gdy uświadomił on sobie, że teza o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru wymaga dowodu.

[83] Zob. s. 123 niniejszej pracy.

.........,
$\{0,1,...,n\} \rightarrow n+1$,
................,
gdzie n jest zmienną, przebiegającą wszystkie wartości liczb naturalnych.

Ostatnie wyrażenie wskazuje na wzorzec nieskończoności potencjalnej. Zatem zgodnie z pierwszą zasadą heurystyczną Cantora, stwierdzającą, że każda nieskończoność potencjalna zakłada nieskończoność aktualną, można orzec, że istnieje *zbiór* liczb naturalnych. Zaś na mocy drugiej zasady – nakazującej traktować wielości nieskończone tak, jak zbiory skończone – zbiór liczb pozaskończonych jest dobrze uporządkowany według relacji mniejszości. Skoro tak, to stosując ponownie drugą zasadę heurystyczną, można przyporządkować ciągowi wszystkich liczb naturalnych pierwszą, najmniejszą pozaskończoną liczbę porządkową ω:
$\{0,1,...n,...\} \rightarrow \omega$[84].

3. 3. ELIMINACJA ANTYNOMII

Dotychczasowa prezentacja istotnego wpływu, jaki na rozwiązywanie konkretnych sytuacji problemowych w ramach budowania teorii mnogości miały Cantorowskie normy heurystyczne, ograniczała się do pokazania zastosowań dwu pierwszych zasad, nazwanych „pozytywnymi”. Celem dalszych rozważań będzie ukazanie funkcji trzeciej zasady – negatywnej[85]. Okaże się, że norma ta, którą można dostrzec w tekstach Cantora pochodzących z początku lat osiemdziesiątych, zabezpieczała jego teorię mnogości przed antynomiami[86].

---

[84] O tym, że Cantor rzeczywiście, przynajmniej *implicite*, kierował się obydwoma zasadami heurystycznymi, opisując funkcje drugiej zasady generowania liczb porządkowych, świadczy jego komentarz: „So widerspruchsvoll es daher wäre, von einer größten Zahl der Klasse (I) zu reden, hat es doch andrerseits nichts Anstößiges, sich eine neue Zahl, wir wollen sie omega nennen, zu denken, welche der Ausdruck dafür sein soll, daß der ganze Inbegriff (I) in seiner natürlichen Sukzession dem Gesetze nach gegeben sei” (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 195).

[85] Zob. s. 118 niniejszej pracy.

[86] W literaturze przedmiotu, w ramach dyskusji nad historią *antynomii Burali-Fortiego*, pojawiły się twierdzenia, iż Cantor:

1. Nigdy nie dostrzegał antynomii, a koncepcja zbioru, którą posiadał, zabezpieczała teorię mnogości przed antynomiami. Ch. M e n z e l, *Cantor and the Burali-Forti paradox*, „Monist” 67(1984), s. 92 („Against this account, I will argue here that in fact Cantor never saw any paradox at all, but that his conception of set at the time, and already as far back as 1883, was one in which the paradoxes cannot arise”).

Inną kwestią pozostaje to, czy Cantor sformułował samą zasadę, mając już świadomość możliwości pojawienia się antynomii, czy też raczej przejmując z klasycznej koncepcji nieskończoności pojęcie nieskończoności absolutnej, nie przejął automatycznie związanej z tym pojęciem negatywnej zasady heurystycznej. W drugim wypadku Cantorowska obrona przed antynomiami posiadałaby pewne cechy rozwiązania *ad hoc*.

---

2. Nie sformułował *antynomii Burali-Fortiego*, ponieważ, posiadając ku temu wszelkie przesłanki, nie traktował jej jako antynomii. G. H. M o o r e, A. G a r c a d i e g o, *Burali-Forti Paradox: A reappraisal of its origins*, „Historia Mathematica" 8(1981), s. 333 („Thus he did not state Burali-Forti's paradox here – although he possessed all the ingredients needed to do so – because he did regard it *as a paradox*. In Cantor eyes, there was simply the fact that some collections were too large to be sets").

Na jakiej podstawie formułuje się takie twierdzenia? Możliwe wydają się następujące rozwiązania:

1. Wymienieni autorzy wyrażenia typu: „nie dostrzegał antynomii", „nie skonstatował antynomii" rozumieją w ten sposób, że w przekonaniu Cantora jego przedaksjomatyczna teoria mnogości – dzięki przyjętym założeniom ontologicznym i opartej na nich heurystyce – była „od swego zarania" wolna od antynomii (i to jest teza, którą stara się udowodnić Ch. Menzel). Jednakże jest faktem, iż Cantor wiedział (przynajmniej już w roku 1895), że *gdyby przyjął*, iż wszystkie liczby porządkowe tworzą *zbiór*, to jego przedaksjomatyczna teoria mnogości zawierałaby sprzeczność (nazwaną później „*antynomią Burali-Fortiego*"). I w tym właśnie znaczeniu można twierdzić, iż Cantor znał tę antynomię.

2. Nie jest też wykluczone, iż zdaniem autorów, którzy piszą, że Cantor „nie dostrzegał antynomii", nie podjął on w s z y s t k i c h działań, jakie ich zdaniem winien był podjąć matematyk stwierdzający antynomię. Jak się wydaje, autorzy wspomnianych artykułów przyjmują *implicite* następującą listę koniecznych czynności na wypadek stwierdzenia antynomii:

a) Działanie „doraźne" winno polegać na usunięciu stwierdzonej sprzeczności, nawet gdyby to miało charakter rozwiązania *ad hoc*. Cantor uniknął antynomii, rozróżniając wielości *inkosystentne* i *konsystentne*. Według Ch. Menzela nie było to działanie *ad hoc*. Innego zdania jest na przykład I. Grattan-Guiness (*Georg Cantor's influence on Bertrand Russell*, „History and Philosophy of Logic" 1(1980), s. 75).

b) Matematyk stwierdzający sprzeczność miał obowiązek poinformowania o tym społeczności naukowców. Zdaniem G. H. Moore'a Cantor nie podjął tej czynności: „It is important to realize that Cantor did not view his argument, which established W [ciąg wszystkich liczb porządkowych – J. D.] to be absolutely infinite, as paradoxical. Upon discovering this argument, Cantor exhibitet no alarm over the health of set theory in decisive contrast to Frege's dismay in 1902 when he learned of Russell's paradox" (G. H. M o o r e, *Beyond first-order logic: The historical interplay betweem mathematical logic and axiomatic set theory*, „History and Philosophy of Logic" 1(1980), s. 104). Nie jest to do końca prawdą, bowiem Cantor poinformował o stwierdzeniu sprzeczności, do jakiej prowadziłoby przyjęcie istnienia największej liczby porządkowej D. Hilberta, R. Dedekinda i Ph. Jourdaina (por. Ph. J o u r d a i n, *On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates*, „Philosophical Magazine" 1904, V, VII, 6 ser., s. 70. Część korespondencji Cantora z Ph. Jourdainem opublikowana zo-

3. 3. 1. *ANTYNOMIA BURALI-FORTIEGO*

Listy do Dedekinda, opublikowane przez E. Zermelo dopiero w roku 1932, wskazują, iż Cantor już w roku 1899 wiedział, że przyjęcie istnienia największej liczby porządkowej prowadzi do sprzeczności[87]. Natomiast niektóre opracowania pozwalają przyjąć, iż już w roku 1895 twórca teorii mnogości znał antynomię nazywaną później „*antynomią Burali-Fortiego*”[88].

W listach do Dedekinda Cantor starał się ponownie uzasadnić, że moc każdego zbioru jest *alefem*[89]. Ponieważ – inaczej niż w roku 1883 – uważał on, iż teza o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru jest do udowodnienia, a dowodu nie przedstawił, nie mógł z niej w swym rozumowaniu korzystać. Sytuacja uległa odwróceniu. Cantor, „udowodniwszy”[90] twierdzenie, że moc każdego zbioru jest *alefem*, wyciągnął wniosek o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru[91].

---

stała w artykule: I. G r a t t a n - G u i n e s s, *The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung” 73(1971), s. 111-130).

c) Należało podjąć działania „systemowe”. Powinny one polegać albo na ponownej, „uważnej” rekonstrukcji zagrożonej teorii, tak aby wyeliminować znane i ewentualne, jeszcze nie ujawnione antynomie, albo na skonstruowaniu jakiegoś algorytmu, który pozwoliłby stwierdzić, czy dana teoria jest wolna od sprzeczności (metamatematyka). Wypada zauważyć w tym miejscu, że Cantor po stwierdzeniu sprzeczności (*Burali-Fortiego* oraz *największej liczby kardynalnej*) zastanawiał się nad tym, czy jego teoria mnogości po wyodrębnieniu wielości *inkonsystentnych* jest niesprzeczna. Postawił przy tej okazji pytanie o możliwość dowodu jej niesprzeczności. Ostatecznie jednak uznał on, że dowód taki jest niemożliwy (por. G. C a n t o r, Listy do R. Dedekinda z 28. 07. 1899; 28. 08. 1899; 31. 08. 1899, GA, s. 443-450).

W świetle powyższych przesłanek zasadne wydaje się mówienie o tym, że Cantor „dostrzegał” lub „znał” *antynomię Burali-Fortiego*. Inną sprawą jest to, na ile, od kiedy i w jaki sposób jego teoria mnogości była przed antynomiami chroniona.

[87] Por. G. C a n t o r, Listy do R. Dedekinda z 28. 07. 1899; 28. 08. 1899; 31. 08. 1899, GA, s. 443-450.

[88] Por. J o u r d a i n, dz. cyt., s. 70.

Pierwsza publikacja na temat sprzeczności, do jakiej prowadzi przyjęcie istnienia największej liczby porządkowej, pochodzi od C. Burali-Forti (*Una questione sui numeri transfiniti*, „Circolo Matematico di Palermo” 11(1897), s. 154-164).

[89] Zob. przypis 69 niniejszej pracy.

[90] E. Zermelo opatrzył to rozumowanie krytycznym komentarzem, w którym ujawniwszy jego wady, stwierdził, że jest ono nie do przyjęcia (por. GA, s. 451).

[91] *„C. Das System π aller Alefs ist nichts anderes als das System aller transfiniten Kardinalzahlen.* Alle Mengen sind daher in einem erweiterten Sinne «*abzählbar*», im besonderen alle «*Kontinua*»” (G. C a n t o r, List do R. Dedekinda z 28. 07. 1899, GA, s. 447).

W dowód tezy, iż moc każdego zbioru jest *alefem*, uwikłane były między innymi twierdzenia wraz z dowodami: iż przyjęcie istnienia największej liczby porządkowej prowadzi do sprzeczności i że w konsekwencji nie istnieje *zbiór* wszystkich liczb porządkowych. Te dane pozwalają zrekonstruować rozumowanie, dzięki któremu Cantor doszedł do stwierdzenia sprzeczności nazwanej potem „*antynomią Burali-Fortiego*" oraz to, jak przyjęta przez niego heurystyka chroniła w jego pojęciu przedaksjomatyczną teorię mnogości przed tą i podobnymi antynomiami:

(1) Każdy zbiór uporządkowany posiada typ porządkowy β[92].

(2) Typ porządkowy β zbioru dobrze uporządkowanego jest (z definicji) liczbą porządkową[93].

(3) Niech A będzie *zbiorem* wszystkich liczb porządkowych łącznie z liczbą 0[94].

(4) Zbiór A jest zbiorem dobrze uporządkowanym według relacji „<" (relacja mniejszości).

Zbiór ten wraz z wprowadzonym porządkiem będzie dalej oznaczany przez „Ω"[95].

Każda liczba porządkowa γ (zgodnie z (3) i (4) γ jest elementem Ω) ma następujące własności:

To, że jakiś zbiór był „przeliczalny w szerszym znaczeniu" („*abzählbar* in einem erweiterten Sinne") było w koncepcji Cantora równoznaczne z tym, że taki zbiór może być dobrze uporządkowany (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 169).

[92] Uporządkowany zbiór, według Cantora (czasem zamiast „geordnete Menge" używa terminu „einfach geordnete Menge"), to taki, którego wszystkie elementy związane są relacją spełniającą warunki 1, 2, 3 podane w przypisie 59. Każdemu takiemu zbiorowi przysługiwał pewien typ porządkowy (por. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, s. 297).

[93] Por. tamże s. 321.

[94] Jeszcze raz należy podkreślić, że w niniejszej pracy chodzi o rekonstrukcję – na podstawie tekstu z 1899 – tego jak wcześniej (czyli najpóźniej w roku 1895) – Cantor doszedł do *antynomii największej liczby porządkowej*. W liście do Dedekinda stara się on udowodnić nie wprost twierdzenie przeciwne do przyjętego w tekście pracy założenia (3), mianowicie, że Ω jest wielością *inkonsystentną*, co równoważne jest temu, iż Ω nie jest zbiorem (nie może nim być, ponieważ prowadzi to do sprzeczności). Dlatego też od początku swojego rozumowania Cantor konsekwentnie mówi nie o *zbiorze* Ω, lecz o *wielości* Ω (por. G. Cantor, List do R. Dedekinda z 28. 07. 1899, GA, s. 444-445).

[95] Eine Vielheit heißt *wohlgeordnet*, wenn sie die Bedingung erfüllt, daß jede *Teilvielheit* ein *erstes* Element hat; eine solche Vielheit nenne ich kurz eine „Folge". ... Aber aus den in § 13 über wohlgeordnete Mengen bewiesenen Sätzen folgt auch leicht, daß jede Vielheit von Zahlen, d. h. jeder Teil von Ω eine kleinste Zahl enthält. *Das System Ω bildet daher in seiner natürlichen Größenordnung eine „Folge"* (tamże).

(5) γ jest większa od każdego ze swych poprzedników w Ω (na podstawie (4)).

(6) γ jest typem porządkowym uporządkowanego według relacji „<” zbioru wszystkich swoich poprzedników z Ω[96].

(7) Ponieważ Ω jest zbiorem uporządkowanym[97], dlatego (przesłanka (1)) istnieje typ porządkowy δ zbioru Ω.

(8) Ponieważ Ω jest zbiorem dobrze uporządkowanym (zgodnie z (4)), zatem (na podstawie (2)) δ jest liczbą porządkową.

(9) Na podstawie przesłanek (3) i (8) można wywnioskować, iż δ jest elementem dobrze uporządkowanego zbioru Ω.

(10) Z zestawienia przesłanek (5), (6), (7), (8) wynika, że δ jest większa od każdego elementu zbioru Ω.

(11) Przesłanki (9) i (10) dają sprzeczność: $\delta < \delta$[98].

W momencie, kiedy Cantor doszedł do sprzeczności największej liczby porządkowej, istotną rolę do odegrania miała negatywna zasada heurystyczna, formułowana przez niego na początku lat osiemdziesiątych:

(12) Nieskończoność absolutna nie jest determinowalna za pomocą metod matematycznych.

Trzeba w tym miejscu przypomnieć, że już w roku 1883 Cantor wysunął twierdzenie, iż będący „symbolem Absolutu”

(13) ciąg liczb porządkowych jest absolutnie nieskończonym ciągiem liczbowym[99].

Skoro tak, to ciąg Ω nie może być determinowany za pomocą metod matematycznych. Oznaczało to między innymi, że ciągowi Ω nie wolno przypisywać żadnego typu porządkowego, a tym bardziej liczby porządkowej. Innymi

---

[96] „... von welcher man sich leicht überzeugt, daß *jede* in ihr vorkommende Zahl γ Typus der Folge aller ihr vorangehenden Elemente (mit Einschluß der 0) ist” (tamże, s. 445).

[97] Ω jest zbiorem uporządkowanym, ponieważ jest zbiorem dobrze uporządkowanym na podstawie założenia (3).

[98] „Es kann Ω’ (und daher auch Ω) *keine konsistente* Vielheit sein; wäre Ω’ konsistent, so würde ihr als einer wohlgeordneten Menge eine Zahl δ zukommen, die größer wäre als alle Zahlen des Systems Ω; im System Ω kommt aber, weil es *alle* Zahlen umfaßt, auch die Zahl δ vor; es wäre also d größer als δ, was ein Widerspruch ist”., C a n t o r, List do Dedekinda z 28. 07. 1899, s. 445.

W Cantorowskim dowodzie *inkonsystentności* ciągu wszystkich liczb porządkowych „Ω” oznacza ciąg tych liczb rozpoczynający się od 1, natomiast „Ω’” ciąg rozpoczynający się od 0.

[99] „Die absolut unendliche Zahlenfolge erscheint mir daher in gewissem Sinne, als geeignetes Symbol des Absoluten;...” (C a n t o r, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 205 (przypis do s. 174).

słowy: skoro przyjęto by, że jakieś d jest porządkiem takiego ciągu, to takie założenie musiało prowadzić – i rzeczywiście prowadziło – do sprzeczności.

3. 3. 2. ROZWIĄZANIE: WIELOŚCI *KONSYSTENTNE* I *INKONSYSTENTNE*

W tym miejscu powstało następujące pytanie: skoro całe rozumowanie (1)-(11) było formalnie poprawne, to skąd wzięła się sprzeczność (11)? Musiała zostać wprowadzona do dowodu przez któreś z założeń (1)-(3). Wszystkie trzy były uwikłane w błędne – według negatywnej zasady heurystycznej Cantora – przypisanie ciągowi Ω typu porządkowego i liczby porządkowej.

Nasuwało się wobec tego następujące rozwiązanie: skoro założenia (1) i (2) były zdaniami teorii mnogości i zanegowanie ich w tym wypadku prowadziłoby do poważnych zakłóceń w całej przedaksjomatycznej teorii mnogości, zatem najlepiej było zanegować założenie (3), a więc stwierdzić, że ciąg wszystkich liczb porządkowych *nie jest zbiorem*[100]. Wówczas, co zgodne było z negatywną zasadą heurystyczną, nie można było przyporządkować ciągowi Ω na podstawie przesłanek (1) i (2) żadnego typu porządkowego, a w konsekwencji żadnej liczby porządkowej. Tym samym z przedaksjomatycznej teorii mnogości Cantora była eliminowana *antynomia największej liczby porządkowej*.

Zastosowanie, w tym konkretnym wypadku, trzeciej zasady heurystycznej prowadziło do następującego stwierdzenia: istnieje przynajmniej jedna taka *wielość* Ω wszystkich liczb porządkowych, która jest „zbyt liczna”, aby być *zbiorem*. Założenie, że *wielość* stanowi *zbiór*, prowadzi do sprzeczności. Zatem – to było istotnym twierdzeniem, do którego doszedł Cantor w wyniku zastosowania negatywnej zasady heurystycznej – n i e k a ż d a *wielość* j e s t *zbiorem*.

Z całą pewnością po stwierdzeniu *antynomii Burali-Fortiego* Cantor musiał postawić pytanie, czy nie istnieją inne *wielości* „zbyt liczne”, aby były *zbiorami*. Łączyła się z tym kwestia wskazania kryterium pozwalającego rozróżnić *wielości* „zbyt liczne”, by były *zbiorami*, od tych, które *zbiorami* były. Kryte-

[100] I takie właśnie rozwiązanie było zgodne z przyjmowaną przez Cantora ontologią nieskończoności. Gdyby ciąg Ω był *zbiorem*, wówczas stanowiłby według niego *jedność*, *rzecz*. Zatem konstytuowałby *byt*. Czyli istniałyby co najmniej *dwa* byty absolutnie nieskończone: zbiór Ω oraz *Absolut*, co byłoby sprzeczne z Cantorowską (i nie tylko, bo również klasyczną) koncepcją Absolutu.

rium wydawało się oczywiste: te i tylko te *wielości* nie są *zbiorami*, w wypadku których założenie, że *zbiorami* są, prowadzi do sprzeczności. Wymienione kryterium daje kolejną odpowiedź na pytanie: czym był zbiór w koncepcji Cantora?[101]

Realizując swój pomysł, Cantor przyjął jako pierwotne pojęcie *wielości*, a następnie zdefiniował:

1. Wielość absolutnie nieskończoną (= *inkonsystentną*).

„Jedna wielość może być mianowicie tego rodzaju, że przyjęcie, iż *wszystkie* jej elementy «tworzą pewną całość», prowadzi do sprzeczności, tak że nie jest możliwe ujmowanie tej wielości jako jedności, jako «pewnej gotowej rzeczy». Takie wielości nazywam *absolutnie nieskończonymi* albo *inkonsystentnymi*”[102].

2. Wielość *konsystentną* (= zbiór).

„Jeżeli przeciwnie, ogół elementów pewnej wielości może być pomyślany bez sprzeczności jako «będący razem», tak że możliwe jest ujęcie go jako «*jednej* rzeczy», to nazywam tę wielość *wielością konsystentną* albo «zbiorem»”[103].

---

[101] Pytanie: na ile „nowe” było to określenie zbioru? Próba odpowiedzi podjęta została w toku dalszych analiz (zob. przypis 103 niniejszej pracy).

[102] „Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, daß die Annahme eines «Zusammenseins» *aller* ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so daß es unmöglich ist, die Vielheit als eine Einheit, als «ein fertiges Ding» aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich *absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheiten*” (G. Cantor, List do R. Dedekinda z 28. 07. 1899, GA, s. 443; tłum. z niemieckiego R. Murawski, w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i oprac. R. Murawski, Poznań 1986, s. 172).

[103] „Wenn hingegen die Gesamtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als «zusammenseiend» gedacht werden kann, so daß ihr Zusammengefaßtwerden zu «*einem* Ding» möglich ist, nenne ich sie eine *konsistente Vielheit* oder eine «Menge»” (tamże).

Trzeba postawić pytanie: na ile ta „definicja” *zbioru* różni się od „definicji” z roku 1883? Wówczas Cantor, wśród innych określeń *zbioru*, podał i takie, według którego *zbiór* to każda *wielość*, o której można myśleć jako o *jedności* (por. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, s. 204 – przypis do s. 165). Istotna modyfikacja, wprowadzona w roku 1899, to dodanie, że ujęcie *wielości* jako *jedności* nie może prowadzić do sprzeczności. Jednakże można zakładać, że warunek ten *implicite* był zawarty również w „definicji” z roku 1883. Cantor z pewnością już wówczas nie tolerowałby w teorii mnogości antynomii. Można zatem stawiać hipotezę, że Cantor już w roku 1883 posiadał taką koncepcję *zbioru*, która chroniła teorię mnogości przed antynomiami. Tezę tę stara się udowodnić Menzel (dz. cyt., s. 92 n.).

Koncepcja zbioru z roku 1899 posiadała charakter „ontologiczny”. Dlatego uzasadniona wydaje się teza, że ostatecznie przyjęta ontologia chroniła przedaksjomatyczną teorię mnogości przed antynomiami.

Wypada w tym miejscu podsumować wyniki przeprowadzonej analizy. Zastosowanie negatywnej zasady heurystycznej, prowadzące do zanegowania tego, że *wielość* Ω jest *zbiorem*, pozwoliło ustrzec teorię mnogości Cantora przed *antynomią Burali-Fortiego*. Cała ta procedura stanowiła pewien wzorzec dla ogólniejszej koncepcji przezwyciężania antynomii. Sposób ten oparty był na przekonaniu, że niektóre *wielości* są „zbyt duże", aby konstytuować *zbiory*[104].

Inną kwestię stanowi to, że metoda eliminacji antynomii, podana przez Cantora i zastosowana do jego teorii mnogości, okazywała się w pewnym sensie nieefektywna. Owszem, w przypadku stwierdzenia antynomii procedura postępowania była jasna. W żaden jednak sposób nie można było rozstrzyg-

[104] Sposób ten został w późniejszej literaturze nazwany „*ograniczaniem rozmiaru*" – „limitation of size" (por. B. Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and other types*, „Proceedings of the London Mathematical Society" 42(1906), vol. 4, s. 29-53).

Podobna metoda została po raz pierwszy zastosowana przez Leibniza jako sposób eliminowania przedcantorowskich paradoksów nieskończoności. Aby ich uniknąć, wprowadził on podział *wielości* na takie, które są *zbiorami*, oraz takie, o których założenie, że są *zbiorami*, generowało paradoksy. Leibniz przyjmował istnienie nieskończenie wielu przedmiotów, ale już *wielości*, które miały policzalnie nieskończenie wiele elementów uważał za „zbyt liczne", aby były *zbiorami*.

Zdaniem J. Perzanowskiego i R. Murawskiego Cantor, wprowadzając *ograniczanie rozmiaru* jako metodę unikania antynomii, wzorował się na G. W. Leibnizu: „Warto tu przy okazji zwrócić uwagę na to (spostrzeżenie to zawdzięczam J. Perzanowskiemu), iż Cantorowskie odróżnienie zbiorów i klas [wielości *inkonsystentnych* – J. D.] jest wyraźnym odwołaniem się do kluczowego w metafizyce G. W. Leibniza pojęcia «współmożliwości» lub «współistnienia» (*coexistence*) czy konsystentności. Występuje ono przy omawianiu tzw. całkowitych pojęć indywidualnych oraz «możliwych światów». Leibniz miał duże trudności z ustaleniem, kiedy zespoły własności są współmożliwe i uważał, że pojąć to może tylko Bóg. Z faktu, że Cantor interesował się filozofią Leibniza można wnosić, że odwołanie to było świadome" (R. Murawski, *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne" 28(1984), nr 11-12, s. 80).

Z kolei Cantorowski sposób *ograniczania rozmiaru*, w celu uniknięcia antynomii, został przejęty w aksjomatycznej teorii mnogości J. von Neumanna. Dopuścił on w swej teorii podobnie jak Cantor – obok *zbiorów* – *wielości* „zbyt duże", aby były *zbiorami* („Unmenge" nazywane w późniejszej tradycji neumannowskiej „klasami właściwymi"). Nie stosowały się do nich niektóre podstawowe operacje teoriomnogościowe, przede wszystkim nie mogły być one elementami zbiorów ani klas właściwych. Tę własność posiadały w Neumannowskiej teorii mnogości jedynie zbiory (por. J. v. Neumann, List do E. Zermelo z 15. 08. 1923, w: H. Meschkowski, *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors*, Braunschweig 1967, s. 271-273; J. v. Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 100(1925), Bd. 154, s. 219-240).

nąć, czy wszystkie *wielości*, traktowane dotychczas w Cantorowskiej teorii mnogości jako *zbiory*, były *konsystentne*[105].

Zatem metoda eliminowania antynomii przez *ograniczanie rozmiaru*[106] wcale nie gwarantowała niesprzeczności teorii mnogości Cantora, w jej wersji z roku 1899. Niemiecki matematyk zdawał sobie z tego sprawę, stawiając pytanie o możliwość uzasadnienia niesprzeczności teorii mnogości. Jego odpowiedź była negatywna, a tezę o niesprzeczności teorii mnogości uznał on za „aksjomat poszerzonej pozaskończonej arytmetyki”[107].

4. ORYGINALNOŚĆ HEURYSTYKI CANTORA?

Jak zauważono już wcześniej, koncepcja nieskończoności Cantora była oparta na fundamentalnym podziale pomiędzy wielościami absolutnie nieskończonymi (nieskończonością absolutną) a pozostałymi wielościami. Podział ten został przejęty z koncepcji klasycznych. Determinował on Cantorowską heurystykę, podobnie jak determinował heurystykę opartą na klasycznej koncepcji nieskończoności. W obydwu heurystykach można bowiem zauważyć negatyw-

---

[105] *Wielością inkonsystentną* był na przykład zbiór wszystkich zbiorów równolicznych ze zbiorem liczb naturalnych, który Cantor wykorzystywał do definiowania pierwszej pozaskończonej liczby kardynalnej.

[106] Zob. przypis 104 niniejszej pracy.

[107] „...Man muß die Frage aufwerfen, woher ich denn wisse, daß die wohlgeordneten Vielheiten oder Folgen, denen ich die Kardinalzahlen $\aleph_0$, $\aleph_1$, ..., $\aleph_\omega$, ..., $\aleph_\omega$ zuschreibe, auch wirklich «Mengen» in dem erklärten Sinne des Wortes, d.h. «konsistente Vielheiten» seien. Wäre es nicht denkbar, daß schon *diese* Vielheiten «inkonsistent» seien, und daß der Widerspruch der Annahme eines «Zusammenseins aller ihrer Elemente» sich *nur noch nicht bemerkbar* gemacht hätte? Meine Antwort hierauf ist, daß diese Frage *endliche Vielheiten ebenfalls auszudehnen* ist und daß eine genaue Erwägung zu dem Resultate führt: sogar für endliche Vielheiten ist ein «Beweis» für ihre «Konsistenz» *nicht* zu führen. Mit anderen Worten: Die Tatsache der «Konsistenz» endlicher Vielheiten ist eine einfache, unbeweisbare Wahrheit, es ist «*Das Axiom* der Arithmetik» (im alten Sinne des Wortes). Und ebenso ist die «Konsistenz» der Vielheiten, denen ich die Alefs als Kardinalzahlen zuspreche «das Axiom der erweiterten transfiniten Arithmetik»” (G. C a n t o r, List do R. Dedekinda z 28. 08. 1899, GA, s. 447-448).

Cantor pyta w tym liście o *konsystencję* każdej z wielości, którą zwykł dotychczas traktować jako *zbiór* (każdej, bowiem był przekonany, że każdy zbiór da się dobrze uporządkować, a zatem można mu przyporządkować jakiś *alef* jako liczbę kardynalną). Ponieważ zaś uważał – jak można przypuszczać – że wyłącznie założenie, iż pewna wielość *inkonsystentna* jest zbiorem, prowadzi do antynomii, dlatego jego pytanie jest równoważne pytaniu o niesprzeczność przedaksjomatycznej teorii mnogości.

ną zasadę, która przestrzegała przed próbami matematycznego określenia tego, co absolutnie nieskończone. W tym względzie różnica pomiędzy ujęciami klasycznymi a podejściem Cantora miała wyłącznie charakter „ilościowy”, a nie „jakościowy”. Cantor, akceptując klasyczne pojęcie nieskończoności absolutnej (wraz z definicją), dokonał korekty, która sprowadzała się w zasadzie do przyjęcia, że nieskończoność absolutna ma moc większą, niż przypuszczali jego poprzednicy.

Co więcej, klasyczna, negatywna zasada heurystyczna orzekała w istocie, że wyłącznie nieskończoność absolutna nie jest determinowalna za pomocą środków dostępnych matematyce. Negatywna zasada Cantora wyrażała tę samą myśl. Skoro zaś zanegował on twierdzenie, iż wszystkie wielości nieskończone w znaczeniu technicznym (kryterium Dedekinda) są absolutnie nieskończone, to na podstawie obydwu tez konsekwentnie uznał, że wielości pozaskończone są poznawalne za pomocą metod matematycznych. Ponieważ dostępne metody były dotychczas „stosowane” w matematyce operującej jedynie zbiorami skończonymi, dlatego było naturalne, że rozwiązując za ich pomocą problemy z zakresu *transfinitum*[108], traktowało się, tak dalece jak to możliwe, wielości pozaskończone podobnie jak zbiory skończone. Jak zatem widać, zasady heurystyczne przyjmowane przez Cantora stanowiły nie tyle negację zasad heurystyki klasycznej, ile raczej pewną ich modyfikację[109].

Podejście Cantora do problemu nieskończoności w matematyce zwykło się czasem nazywać „Cantorowskim *finityzmem*”[110]. Sprowadza się ono do eliminacji z zakresu matematyki wyłącznie zagadnień nieskończoności absolutnej[111] i akceptacji pozaskończoności jako przedmiotu badań matematyki, przy jednoczesnym traktowaniu *transfinitum* jak tego, co skończone.

Można postawić tezę, że poczynania wielu matematyków starających się na początku dwudziestego wieku zaksjomatyzować teorię mnogości i tych, którzy rozwijali tradycję aksjomatyki Zermelo, były niczym innym, jak reali-

---

[108] Problem absolutnej skali mocy zbiorów, problem *continuum*.

[109] Przedstawione zasady heurystyczne Cantora, będące istotnym narzędziem w rozwiązywaniu problemów badawczych, stanowią – jak kilkakrotnie to już sugerowano – pewien program badawczy. Znajomość tego programu i świadomość, że nie był on całkowitą negacją programu klasycznego, może stanowić przesłankę w poszukiwaniu adekwatnego modelu rozwoju matematyki.

[110] Por. M a y b e r r y, dz. cyt., s. 140.

[111] Jest to jedyna „właściwa nieskończoność” w znaczeniu leksykalnym, ponieważ jest czymś nieograniczonym.

zacją Cantorowskiego programu finistycznego. Cel bowiem, którym kierowali się autorzy owych aksjomatyk, stanowiła za każdym razem eliminacja „zbyt dużych" zbiorów (nieskończoności absolutnej), przy równoczesnym zachowaniu w ramach teorii mnogości jak najobszerniejszej części Cantorowskiego *transfinitum*[112]. Wspomniane przedsięwzięcia oparte były na zasadzie traktowania *transfinitum* tak długo, jak to możliwe, jak tego, co skończone. Program tak rozumianego *finityzmu* jest programem realizowanym we współczesnej matematyce.

Wypada jeszcze raz zwrócić uwagę na negatywną zasadę heurystyki Cantora. Jak stwierdzono, jej geneza wydaje się jasna. Cantor przejął ją od swych poprzedników, którzy w ten sposób starali się chronić matematykę (i filozofię) przed paradoksami nieskończoności. Zachowane pisma nie pozwalają rozstrzygnąć w sposób jednoznaczny, czy Cantor wprowadzając tę zasadę na początku lat osiemdziesiątych, znał już *antynomię Burali-Fortiego*, czy raczej uczynił to tylko „profilaktycznie", przewidując, że operowanie „zbyt licznymi" zbiorami może do jakiejś antynomii doprowadzić. Niewykluczona – i być może najbardziej prawdopodobna – jest trzecia możliwość, że przejął on po prostu tę zasadę, wraz z pojęciem nieskończoności absolutnej, z klasycznej koncepcji nieskończoności, nie spodziewając się antynomii w swej teorii mnogości[113]. Wówczas Cantorowskie rozwiązanie miałoby cechy działania *ad hoc*, co jednak nie umniejsza wartości samego rozwiązania, często wykorzystywanego w konstrukcji późniejszych aksjomatyk teorii mnogości.

Trzecia z przedstawionych możliwości znajduje uzasadnienie w religijności Cantora oraz w jego zainteresowaniu teologią i filozofią neotomistyczną. W korespondencji z reprezentantami tego kierunku myśli chrześcijańskiej wielokrotnie podkreślał, że jedynym b y t e m absolutnie nieskończonym jest Bóg, Absolut[114]. Oczywiste było dla niego, że Absolut nie może być przedmiotem poznania matematyki, nauk przyrodniczych oraz filozofii. Wyjątek stanowiła oparta na objawieniu teologia. Jest zatem prawdopodobne, iż trzecia, negatywna zasada heurystyki Cantora była wypadkową dwu czynników: filozoficznej tradycji i jego przekonań religijnych. Byłoby paradoksem, gdyby rzeczywiście, w dobie poddanej wyraźnym wpływom pozytywizmu, egzotyczne dla tego kierunku zestawienie tez o istnieniu i niepoznawalności

---

[112] Por. E. Z e r m e l o, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, „Mathematische Annalen" 41(1908), Bd. 65, s. 261.

[113] Zob. przypis 86 niniejszej pracy.

[114] Por. G. C a n t o r, Listy do kard. Franzelina z 22. 01. 1886 i 29. 01. 1886, w: *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, s. 399-400. Cantor, podkreślając różnicę między *transfinitum* i Absolutem, broni się przed zarzutem panteizmu.

Absolutu stanowiło istotny czynnik, kreujący aktualny po dzień dzisiejszy program badawczy tak bardzo „pozytywistycznej" dyscypliny, jak teoria mnogości.

Generalnym wnioskiem z przeprowadzonych badań jest stwierdzenie, iż doniosłą przesłankę, wpływającą na proces powstawania Cantorowskiej teorii mnogości stanowiła – przynajmniej od wczesnych lat osiemdziesiątych – przyjęta ontologia nieskończoności. Na bazie tej ontologii powstał zespół norm heurystycznych, do których Cantor niejednokrotnie się odwoływał, rozwiązując konkretne problemy badawcze. Innymi słowy: proces powstawania teorii mnogości został zdeterminowany zbiorem akceptowanych przez niego założeń filozoficznych.

HEURISTIK DER MENGENLEHRE G. CANTORS

Zusammenfassung

Als Resultat der neuen Bezeichnung der quantitativen Beziehungen zwischen den Mengen und der Feststellung der Ungleichmächtigkeit der Menge von rationalen und realen Zahlen, waren Cantors Verbesserungen in der Ontologie der Unendlichkeit. In klassischer (leksikalischer) Auffassung als Unendliches wurde das angenommen, was unbeschränkt war. Die Unendlichkeit sollte in dieser Bedeutung absolut sein, daß wenn etwas unendlich ist, so kann es nur ein Einziges sein. Die Annahme des Bestehens eines anderen, als das Absolute, aktual unendlichen Seins (einer anderen Menge) führte zu Paradoxen. Das Absolute hielt man, bei der Forschung mit Hilfe der mathematischen Methoden, für unerkennbar. Es ergab sich davon ein heuristischer Hinweis in der Mathematik die Unendlichkeit zu meiden und die Forschungen auf das Gebiet dessen zu beschränken was endlich ist Als beschränkt, also *de facto* als endlich, hielt man die potentialunendlichen Vielheiten.

Cantor wurde zu einer neuen Formulierung der Ontologie der Unendlichkeit gezwungen. Er hat die klassische (leksikalische) Gliederung zwischen der absoluten Unendlichkeit und den beschränkten Vielheiten behalten. Die letzten hat er mit Hilfe des Kriteriums von Dedekind in endliche und transfinite Vielheiten geteilt. "Zwischen" das, was endlich und das, was absolut unendlich ist, hat er das Transfinitum "eingebaut". Die "erweiterte" Ontologie der Unendlichkeit bildete eine Grundlage für die Annahme der heuristischen Regeln.

Es wurden drei Grundsätze rekonstruiert:

1. Jede potentiale Unendlichkeit setzt das Bestehen der mit ihr verbundenen aktuellen Unendlichkeit voraus.

2. Man soll die unendlichen Vielheiten, so weit wie es nur möglich ist, als endliche Mengen behalten.

3. Die absolute Unendlichkeit kann nicht mit Hilfe der mathematischen Methoden bestimmt sein.

In der Analyse der konkreten Beispiele ist die Nutzbarkeit der heuristischen Regeln hervorgetreten. Der zweite Grundsatz "vergrößerte" das Gebiet der Erforschung (der Explora-

tion), welche mit den mathematischen Methoden geführt wird. Sie gestattete in Cantors Überzeugung eine absolute Skala der Valenzen der Mengen zu bilden. Die dritte Regel schützte Cantors Mengenlehre vor Antinomien unde führte zur Aufteilung der unendlichen Vielheiten auf konsistente und unkonsistente Mengen. Durch Anwendung dieses Grundsatzes, welcher die klassische Regel wiederholt und vor Paradoxen schützt, antizipierte Cantor die Elemente der Auflösungen, welche die Antinomien ausschalten.

Man muß im allgemeinen feststellen, daß die Heuristik der Cantors Mengenlehre durch die angenommenen ontologischen Voraussetzungen determiniert wurde.