ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLV, zeszyt 3 – 1997

MICHAŁ HELLER
Kraków

KILKA UWAG O GEOMETRIACH NIEPRZEMIENNYCH

§ 1. WPROWADZENIE: DLACZEGO GEOMETRIA NIEPRZEMIENNA?

W ostatnich latach obserwuje się systematyczny wzrost popularności zarówno wśród matematyków, jak i fizyków-teoretyków tzw. geometrii nieprzemiennych. Jest to spowodowane przynajmniej dwiema racjami. Po pierwsze, geometrie nieprzemienne są potężnym uogólnieniem dotychczas znanych geometrii, a tendencja do uogólnień, jak wiadomo, stanowi ważny motyw dla rozwoju badań matematycznych. Przestrzenie, które dotychczas uważano za patologiczne, tzn. takie, z którymi nic już nie da się zrobić, zgrabnie poddają się traktowaniu za pomocą metod niekomutatywnych. Wynajdywanie coraz to nowych i bardziej skutecznych metod w tej nie wyeksploatowanej jeszcze dziedzinie stanowi pokusę, ale i wyzwanie dla wielu matematyków. Wyzwanie jest tym większe, że metody geometrii nieprzemiennej wymagają znajomości wielu, i to odległych od siebie, dziedzin matematyki. Po drugie, bardzo obiecujące są zastosowania geometrii nieprzemiennej do fizyki. W tej dziedzinie już osiągnięto wiele interesujących wyników, polegających głównie na zgeometryzowaniu kilku teorii lub modeli z dziedziny cząstek elementarnych i pól kwantowych, ale rysują się także coraz wyraźniejsze perspektywy zbudowania kwantowej teorii grawitacji za pomocą metod geometrii nieprzemiennej. Jest to tak ważny problem współczesnej fizyki teoretycznej, że należy wnosić, iż w najbliższej przyszłości pojawi się wiele prac z dziedziny nieprzemiennych prób kwantowania grawitacji.

Do tych dwu racji, uzasadniających wzrost popularności geometrii nieprzemiennej, dodałbym jeszcze trzecią: geometria nieprzemienna jest niezwykle interesująca z filozoficznego punktu widzenia. Geometria ta bowiem zajmuje się przestrzeniami, w których pojęcia lokalne (takie jak pojęcie punktu i otoczenia punktu) są w zasadzie pozbawione sensu. A jednak istnieją poważne racje, by obiekty, jakimi zajmuje się geometria nieprzemienna, nazywać przestrzeniami: wiele metod znanych z teorii „zwykłych" przestrzeni geometrycznych po odpowiednim uogólnieniu znajduje zastosowanie w nowym „nieprzemiennym środowisku". Zastosowanie geometrii nieprzemiennych do fizyki (np. do kwantowej grawitacji) może budzić jeszcze większe filozoficzne emocje. Mielibyśmy bowiem przestrzeń lub czasoprzestrzeń bez pojęć punktu lub punktu i chwili. Co wówczas dzieje się z lokalizacją, a nawet z tożsamością fizycznych obiektów?

Własność przemienności jest częstą własnością wielu działań występujących w matematyce elementarnej. Na przykład mnożenie liczb rzeczywistych jest przemienne, tzn. wynik mnożenia nie zależy od kolejności czynników; zachodzi zatem $a \cdot b = b \cdot a$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b. Jest rzeczą zaskakującą, że naruszenie tej własności ma aż tak daleko idące konsekwencje (oczywiście mnożenie liczb pozostaje przemienne; idzie o działania na innych obiektach, por. niżej). Z nieprzemiennością matematycy zetknęli się już bardzo wcześnie; np. jest od dawna znanym faktem, że mnożenie macierzy jest nieprzemienne (algebra macierzy jest często rozważanym przykładem w geometrii nieprzemiennej). Jednakże spostrzeżenie, że rodziny obiektów z nieprzemiennym działaniem mnożenia (np. właśnie algebry macierzy) mogą stanowić podstawę do uogólnień geometrycznych, jest stosunkowo niedawne. Dziś jesteśmy świadkami niezwykle płodnej twórczości, mającej początek w tym spostrzeżeniu.

W paragrafie 2 przedstawię krótką genezę geometrii nieprzemiennej i wprowadzę (w sposób intuicyjny) pojęcie przestrzeni nieprzemiennej. W paragrafie 3 omówię krótko kilka metod stosowanych w geometrii nieprzemiennej. Paragraf 4 będzie poświęcony zagadnieniu „znikania" pojęcia punktu (i innych pojęć lokalnych) w geometrii nieprzemiennej, a w paragrafie 5 znajdzie się kilka uwag poświęconych filozoficznym aspektom tego zagadnienia.

§ 2. GENEZA GEOMETRII NIEPRZEMIENNYCH

Pierwszy zwiastun daleko idących konsekwencji naruszenia przemienności pojawił się w fizyce lat trzydziestych. P. A. M. Dirac pierwszy zauważył analogię pomiędzy nawiasami Poissona w mechanice klasycznej a komutatorami w mechanice kwantowej. Jak wiadomo, zerowanie się komutatora dwu wielkości jest równoważne ich przemienności (komutatywności). Zerowanie się lub niezerowanie się komutatorów pewnych wielkości jest związane z głębokimi własnościami strukturalnymi mechaniki kwantowej. Na przykład relacje nieoznaczoności Heisenberga są następstwem niezerowania się odpowiednich komutatorów. Komutator położenia x i pędu p jest różny od zera (i proporcjonalny do stałej Plancka $\hbar$), co pociąga za sobą relację nieoznaczoności $\Delta x \Delta p \geq \hbar$.

Jak wiadomo, podstawową strukturą matematyczną eksploatowaną w mechanice kwantowej jest algebra (ograniczonych) operatorów na przestrzeni Hilberta. Algebra ta jest nieprzemienna. Stanowi dziś ona ważne narzędzie w nieprzemiennej geometrii.

Nawet jeśli jakieś idee pochodzą z fizyki, to muszą one zostać poddane precyzyjnej matematycznej obróbce, aby stać się pełnoprawną częścią matematyki. Jest to proces znany w historii nauki. Miał on również miejsce w dziejach powstania geometrii nieprzemiennej. Od dawna było wiadomo, że pewne przestrzenie geometryczne można zdefiniować za pomocą pewnych rodzin funkcji określonych na tych przestrzeniach (zapominając, w jakimś sensie, u nośnikach tych funkcji). Na przykład rozmaitość różniczkową (kluczowe pojęcie dla współczesnej geometrii różniczkowej) można zdefiniować za pomocą algebry funkcji gładkich na danej rozmaitości i definicja ta jest równoważna standardowej definicji za pomocą atlasu i map. Istotną własnością jest to, że rodzina funkcji gładkich na rozmaitości jest algebrą, tzn. są w niej określone działania dodawania i mnożenia funkcji oraz mnożenia funkcji przez skalary, przy czym działania te spełniają odpowiednie aksjomaty. Algebra gładkich funkcji na rozmaitości jest przemienna, ponieważ mnożenie funkcji (zdefiniowane w zwykły sposób) jest działaniem przemiennym.

Chociaż definicja rozmaitości za pomocą algebry funkcji gładkich jest równoważna definicji standardowej, nadaje się ona lepiej niż ta ostatnia do uogólnień. Rezygnując z pewnych aksjomatów (przy zachowaniu innych aksjomatów, które zapewniają rodzinie funkcji własności algebry), zdefiniowano przestrzenie ogólniejsze od rozmaitości, zwane przestrzeniami różniczkowymi. Teoria przestrzeni różniczkowych była rozwijana przez wielu autorów i doczekała się licznych zastosowań[1]. Innym znanym przykładem zastosowania analogicznej metody jest geometria algebraiczna, która powstała

[1] Zestaw literatury dotyczącej przestrzeni różniczkowych do roku 1992 w „Acta Cosmologica” 19(1993), s. 111-129.

dzięki badaniom algebry wielomianów. Ale zarówno algebry funkcyjne, jak i algebry wielomianów są przemienne. I tu właśnie spotkały się inspiracje płynące z fizyki kwantowej z nurtem badań matematycznych. Narodziła się myśl zbudowania geometrii na podstawie kolejnego uogólnienia – przejścia od algebr przemiennych do algebr nieprzemiennych.

Fizycy już nieco wcześniej rozważali bardzo abstrakcyjne przestrzenie nieprzemienne, a mianowicie superrozmaitości (w związku z teorią supergrawitacji) i tzw. grupy kwantowe (w związku z kwantowymi teoriami pola). Badanie tych przestrzeni wkrótce rozwinęło się w nowe działy matematyki. Ale dopiero prace Alaina Connesa (i jego współpracowników)[2] stworzyły to, co obecnie najczęściej rozumie się pod nazwą geometrii nieprzemiennej. To właśnie Connes wprost sformułował program zbudowania teorii przestrzeni, opierając się na algebrach nieprzemiennych w sposób ściśle analogiczny do procedur budowania teorii „zwykłych" przestrzeni opartych na algebrach przemiennych. W dalszym ciągu moje uwagi będą dotyczyć geometrii nieprzemiennej głównie w tym rozumieniu[3].

§ 3. MATEMATYKA NIEPRZEMIENNA

Przestrzenie geometryczne (przemienne, np. rozmaitości) mają wiele struktur, które decydują o ich użyteczności w matematyce. Do najczęściej wykorzystywanych należą struktury: topologiczna, miary i różniczkowa. Są one powiązane ze sobą różnymi zależnościami i sieć tych zależności decyduje o bogactwie i użyteczności pojęcia przestrzeni. Uogólnienie, polegające na przejściu od algebry funkcji określonych na danej przestrzeni do algebr nieprzemiennych, jest tak daleko idące, że dla właściwych przestrzeni nieprzemiennych[4] pojęcia topologii i miary w ich zwykłym znaczeniu stają się bezużyteczne (np. trywializują się), a pojęcie struktury różniczkowej w ogóle traci sens. Potęga metod nieprzemiennych polega na tym, że struktury te dają się tak uogólnić (nie zawsze jednoznacznie), że w nowym sensie funkcjonują

[2] Por. fundamentalną monografię Connesa *Noncommutative Geometry* (San Diego–New York 1994, Academic Press).

[3] Interesujące uwagi na temat genezy geometrii nieprzemiennych por. w książce: Y. I. M a n i n, *Topics in Noncommutative Geometry*, Princeton 1991, s. 3-8, Princeton University Press.

[4] Tzn. takich, które nie są „izomorficzne" z przestrzeniami przemiennymi (przy właściwym dla przestrzeni nieprzemiennych rozumieniu izomorfizmu; idzie o tzw. równoważność Mority).

one całkiem sprawnie (choć zwykle wymagają wyrafinowanych metod rachunkowych), a w zastosowaniu do przestrzeni przemiennych przechodzą w struktury znane z elementarnego kursu matematyki.

W paragrafie 2 wspomnieliśmy o algebrze ograniczonych operatorów na przestrzeni Hilberta. Algebra ta ma tak ważne właściwości, że stała się prototypem dla klasy algebr zwanych C^*-algebrami (czytaj: algebry C z gwiazdką) – prototypem w tym sensie, że każda C^*-algebra może być reprezentowana jako podalgebra algebry ograniczonych operatorów na przestrzeni Hilberta. Zgodnie z twierdzeniem Gel'fanda-Neimarka-Segala (GNS) każda algebra funkcji ciągłych na przestrzeni lokalnie zwartej (jest to algebra przemienna) jest izomorficzna z pewną C^*-algebrą. Wynik ten pozwala traktować teorię C^*-algebr (niekoniecznie przemiennych) jako uogólnienie zwykłych topologii przestrzeni lokalnie zwartych[5]. Co więcej, okazuje się, że pewna podklasa C^*-algebr, zwana podklasą algebr von Neumanna odpowiada uogólnionej teorii miary (także na przestrzeniach nieprzemiennych)[6]. Znane są przykłady przestrzeni (np. podziały płaszczyzny Penrose'a, foliacje, czasoprzestrzenie z osobliwościami), które nie poddają się opisowi za pomocą standardowych (przemiennych) metod, ale które potraktowane jako przestrzenie nieprzemienne stają się wdzięcznymi (choć niełatwymi) obiektami analizy; można badać ich uogólnione własności topologiczne lub uogólnione własności miary. Wprowadzenie struktury różniczkowej na przestrzeni nieprzemiennej wymaga pewnych nowych inwestycji, które mogą być zrobione na różne sposoby. Najczęściej wykorzystywane są dwa sposoby wprowadzania struktury różniczkowej na przestrzeniach nieprzemiennych. Pierwszy sposób sprowadza się do określenia rachunku różniczkowego na podstawie derywacji algebry, za pomocą której definiuje się daną przestrzeń nieprzemienną (derywacja algebry A jest to liniowe odwzorowanie algebry A w siebie, spełniające regułę Leibniza). Drugi sposób polega na przejściu od danej algebry nieprzemiennej do jej reprezentacji jako algebry ograniczonych operatorów w przestrzeni Hilberta i na zdefiniowaniu rachunku różniczkowego za pomocą pewnego wybranego operatora na przestrzeni Hilberta, na przykład operatora Diraca. Wybór jednego lub drugiego sposobu należy dopasować do rodzaju rozważanych zagadnień.

---

[5] Inne „uogólnione własności topologiczne" przestrzeni nieprzemiennych można badać za pomocą tzw. K-teorii.

[6] Algebrą von Neumanna nazywa się algebrę wszystkich operatorów na przestrzeni Hilberta, które komutują z operatorami unitarnymi na tej przestrzeni.

Topologia, teoria miary i rachunek różniczkowy nie są jedynymi działami matematyki, które da się „przenieść” (uogólnić) na przestrzenie nieprzemienne. Matematyka nieprzemienna jest dziś areną bardzo szybkiego rozwoju.

§ 4. PRZESTRZENIE BEZPUNKTOWE

Geometria nieprzemienna znajduje coraz więcej zastosowań do fizyki, m.in. do geometryzacji tzw. standardowego modelu oddziaływań elementarnych, pól cechowania, do stworzenia uogólnionej teorii Kaluzy-Kleina, do modelowania czasoprzestrzeni z osobliwościami; istnieją także próby stworzenia nieprzemiennej teorii kwantowej grawitacji[7]. W niniejszym szkicu pominę jednak zagadnienie zastosowań geometrii nieprzemiennych do fizyki, skoncentruję się natomiast na problemie, który ma wyraźny wydźwięk filozoficzny.

W poprzednim paragrafie spotkaliśmy się z twierdzeniem GNS. Działa ono również w przeciwną stronę: Każdą przemienną C^*-algebrę można potraktować jako algebrę C funkcji ciągłych na pewnej przestrzeni (ściślej: każda przemienna C^*-algebra ma reprezentację, tzw. reprezentację Gel'fanda, jako algebra funkcji ciągłych na pewnej przestrzeni). Okazuje się, że każdy punkt x takiej przestrzeni można utożsamić z podalgebrą C_x algebry C, takiej że podalgebra C_x, składa się z funkcji zerujących się w punkcie x. W terminologii algebraicznej mówimy, że podalgebra C_x jest maksymalnym ideałem algebry C. Każdy taki maksymalny ideał jednoznacznie wyznacza punkt w przestrzeni. Informacja o punktach przestrzeni jest więc zakodowana w maksymalnych ideałach algebry (przemiennej) określającej daną przestrzeń.

Algebry nieprzemienne w zasadzie nie posiadają ideałów maksymalnych. Następstwem tego faktu jest to, że w przestrzeniach nieprzemiennych pojęcie punktu traci sens. Wraz z pojęciem punktu znikają także inne pojęcia lokalne, np. otoczenia punktu, wektora stycznego w punkcie... Mimo to przestrzenie nieprzemienne można uważać za autentyczne (choć uogólnione) przestrzenie geometryczne. Jak widzieliśmy, można na nich uprawiać uogólnioną topologię, uogólnioną teorię miary, uogólniony rachunek różniczkowy. Co więcej, istnieje nieprzemienny odpowiednik geometrii różniczkowej z

[7] Na temat niektórych zastosowań geometrii nieprzemiennych do fizyki por.: J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and Its Physical Applications*, Cambridge 1995, Cambridge University Press.

większością jej charakterystycznych pojęć, choć zawsze rozumianych nielokalnie. Na przykład, w geometrii nieprzemiennej nie istnieją wektory, ale istnieją odpowiedniki pól wektorowych. Ma to doniosłe konsekwencje, zwłaszcza dla zastosowań w fizyce. Pojęcia punktu i chwili są pojęciami lokalnymi, a więc nie istnieją w geometrii nieprzemiennej. Czy znaczy to, że w „fizyce nieprzemiennej" nie można mówić o zmianie i dynamice? Pojęcie ruchu lokalnego (ruch „z miejsca na miejsce") staje się oczywiście pojęciem bezsensownym, ale – jak wiadomo – zmianę i dynamikę można modelować za pomocą pól wektorowych. Uogólnione pola wektorowe (derywacje) w przestrzeniach nieprzemiennych z powodzeniem spełniają tę funkcję. A zatem dynamika może istnieć bez pojęcia przestrzeni jako zbioru punktów i czasu jako zbioru chwil[8].

§ 5. PRZESŁANIE FILOZOFICZNE

Dlaczego geometria nieprzemienna może być interesująca z filozoficznego punktu widzenia?

Przede wszystkim przestrzenie nieprzemienne stanowią wyzwanie dla naszej wyobraźni. Jak to możliwe, by istniała przestrzeń bezpunktowa? „Naoczność" nie musi być dobrym przewodnikiem po krainie abstrakcji. Filozofowie mówią niekiedy, że warunkiem indywidualizacji jest istnienie w czasie i przestrzeni, tzn. coś może istnieć jako indywiduum tylko, jeżeli zajmuje pewne miejsce w przestrzeni i w czasie. Ale w przestrzeniach nieprzemiennych pojęcie „miejsca" traci sens (bo jest przecież synonimem lokalności), a mimo to różne „obiekty" istnieją, np. derywacje, formy liniowe, koneksje... Niewątpliwie sytuacja ta wymaga gruntownej analizy.

Co więcej, wszystko wskazuje na to, że geometria nieprzemienna prędzej czy później znajdzie swoją trwałą pozycję w fizyce i problem indywidualizacji w przestrzeniach nieprzemiennych nabierze bardziej realistycznego zabarwienia, nie będzie dotyczył tylko matematycznych możliwości, lecz również fizycznego świata.

Niekiedy myśliciele wyrażają przekonanie, że „uczasowienie" lub „przemijalność" są istotną cechą świata, bez której nie można go sobie pomyśleć. Na

---

[8] Obszerniej na temat problemu bezpunktowości przestrzeni nieprzemiennych pisałem w artykule: J. D e m a r e t, M. H e l l e r, D. L a m b e r t, *Local and Global Properties of the World in Physics*, „Foundations of Science" 2(1997), s. 137-176.

przykład G. J. Whitrow w zakończeniu swojej monografii o czasie[9] pisze: „... utrzymujemy, że *samą istotą czasu jest jego przemijalność* i że jest to fundamentalne pojęcie, które nie może być wyjaśnione przez odwołanie się do czegoś jeszcze bardziej fundamentalnego. *Czas jest sposobem aktywności i bez aktywności nie może być czasu.* A co za tym idzie czas nie istnieje niezależnie od zdarzeń, lecz jest aspektem natury świata i wszystkiego, co on zawiera".

W świetle powstania geometrii nieprzemiennych i ich zastosowań do fizyki (obecnych i jeszcze spodziewanych) takie poglądy są nie do utrzymania. Już dziś wiadomo, w jaki sposób można przejść od geometrii nieprzemiennej do geometrii przemiennej (na przykład przez zawężenie odpowiedniej algebry nieprzemiennej do jej centrum, które jest już – z definicji – algebrą przemienną), czyli w jaki sposób geometrię z punktami można wyprowadzić z geometrii bez punktów. Jeżeli ponadto jedną ze współrzędnych punktu potraktować jako zmienną reprezentującą czas, to w ten sposób geometria ze zdarzeniami (punkto-chwilami) zostałaby wyprowadzona z geometrii bez zdarzeń i bez przemijalności.

Nie jest również prawdą, że „czas jest sposobem aktywności", w każdym razie, jeżeli stwierdzenie to rozumieć w tym sensie, że bez czasu nie może być aktywności. Jak widzieliśmy, w geometrii nieprzemiennej może istnieć dynamika, a więc aktywność, chociaż w geometrii tej nie ma żadnej struktury, którą można by utożsamić z czasem w jego zwykłym rozumieniu.

Owszem, „czas nie istnieje niezależnie od zdarzeń", ale tylko w tym sensie, że zarówno czas, jak i zdarzenia można wyprowadzić z czegoś bardziej pierwotnego, a mianowicie z geometrii nieprzemiennej, w której nie istnieją ani odpowiedniki zdarzeń, ani odpowiednik czasu.

I wreszcie, jeżeli kiedyś uda się zbudować kwantową teorie grawitacji, wykorzystując geometrię nieprzemienną, to również zdanie „czas jest aspektem wszystkiego, co świat zawiera", okaże się fałszywe. W takiej teorii „poniżej" ery Plancka mielibyśmy bezczasową „fizykę nieprzemienną", a niewątpliwie należałaby ona do świata. Jest prawdą, że argumenty odwołujące się do jeszcze nie stworzonych teorii nie są mocnymi argumentami, ale w tym przypadku sam fakt realnej możliwości takiej teorii ma swoją wymowę. W każdym razie mocno nadwyręża on pewność, z jaką wypowiada się przekonania o nieuniknioności czasu.

[9] *The Natural Philosophy of Time*, Oxford 1980, s. 372, Clarendon Press (podkr. autora książki).

SOME REMARKS ON NONCOMMUTATIVE GEOMETRIES

S u m m a r y

Noncommutative geometries and their application to physics have recently undergone rapid development. In the present paper the genesis of these geometries, some uf their principal methods and their philosophical significance are brietly discussed. Nuncommutative spaces are interesting from the philosophical point of view as an example of geometric spaces with no concepts of point and locality. It turns out that the authentic dynamics can be mathematically modelled even if there is no „local change” and no time.