

MAREK SZYDŁOWSKI
Kraków

CZY WSZECHŚWIAT JEST PROSTYM UKŁADEM DYNAMICZNYM O ZŁOŻONYM ZACHOWANIU?

Na użytek tej pracy wszechświatem będziemy nazywać pewien matematyczny model rzeczywistego Wszechświata, skonstruowany w ramach Ogólnej Teorii Względności. Skoncentrujemy się na turbulentnej ewolucji Wszechświata w otoczeniu osobliwości początkowej, gdzie wpływ materii jest zaniedbywalny w porównaniu z efektami krzywizny.

Równania pola Einsteina są cząstkowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. Jeżeli przestrzeń jest jednorodna, równania pola sprowadzają się do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Typowym przykładem są tzw. jednorodne modele Bianchi [1] mające postać $M = \mathbb{R}^3$ (3-wymiarowa przestrzeń jednorodna). O takich modelach będziemy mówić, że są *prostymi dynamicznymi modelami wszechświata*, reprezentowanymi przez niskowymiarowy układ równań różniczkowych zwyczajnych, opisujących dynamikę czasoprzestrzeni.

Jednorodność przestrzeni oznacza, że w każdym punkcie przestrzeni metryka jest taka sama. W przestrzeni euklidesowej jednorodność wyraża się niezmiennością metryki względem grupy translacji kartezjańskiego układu współrzędnych. Każda translacja $(t, x^i) \rightarrow (t, x^i + h^i)$ jest zdeterminowana przez 3 parametry będące składowymi wektora przesunięcia układu współrzędnych. Translacje zachowują różniczki (dx, dy, dz) , z których zbudowany jest element długości przestrzennej $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, ($i, j = 1, 2, 3$). W ogólnym przypadku nieeuklidesowej przestrzeni jednorodnej przekształcenia jej grupy izometrii pozostawiają niezmiennymi trzy formy różniczkowe $(e_i^\alpha dx^i)$, gdzie α jest indeksem numerującym ich liczbę.

W każdym modelu czasoprzestrzeni fundamentalną własnością jest jej metryka. Będziemy zakładać jej następującą postać:

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{\alpha\beta}(t)(e_i^\alpha dx^i)(e_j^\beta dx^j), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

gdzie $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ jest zależną jedynie od czasu funkcją skalującą oraz $e_i^\alpha(x) dx^i$ są, zależnymi od współrzędnych przestrzennych x^i , bazowymi formami różniczkowymi, nie będącymi jednak różniczkami zupełnymi żadnych funkcji. Formy te realizują symetrie przestrzenne grupy jednorodności działającej na przekrojach stałego czasu $\{t = \text{const}\}$, np. grupy SO(3), dla której stałe struktury $C_{jk}^i = \varepsilon_{ijk}$.

Konsekwencją założenia jednorodności jest również możliwość wyboru metryki $\gamma_{\alpha\beta}$ w postaci diagonalnej bez ograniczenia stopnia ogólności, tj.

$$\gamma_{\alpha\beta} = \text{diag}(\alpha^2(t), b^2(t), c^2(t)). \quad (2)$$

O funkcjach a , b , c możemy myśleć jak o trzech czynnikach skali w trzech różnych kierunkach głównych. Gdy $a = b = c$ metryka (1) jest metryką zamkniętego, płaskiego lub otwartego wszechświata Robertsona-Walkera.

Jeśli założymy, że materia wypełniająca Wszechświat jest cieczą doskonałą o równaniu stanu $p = \gamma\rho$, ($0 \leq \gamma \leq 1$), gdzie p jest ciśnieniem, a ρ gęstością energii, to jej wpływ na dynamikę czasoprzestrzeni jest zaniedbywalny w miarę zbliżania do osobliwości i dynamika jest opisywana przez próżniowe równania Einsteina. Założenie prostoty, tj. jednorodności przestrzennej, klasycznej próżniowej teorii grawitacji oraz naturalnego uogólnienia modeli Robertsona-Walkera w ramach hamiltonowskiego sformułowania dynamiki prowadzi nas do tzw. podklasy A modeli Bianchi, której hamiltonian posiada postać:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + V(q) \\ &= 2 \sum_{i=1, i < j}^3 p_i p_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 p_i^2 q_i^2 + \frac{1}{4} \left(2 \sum_{i=1, i < j}^3 n_i n_j q_i q_j - \sum_{i=1}^3 n_i^2 q_i^2 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie q_i są kwadratami czynników skali w trzech różnych kierunkach głównych. Pełnią one rolę współrzędnych uogólnionych, podczas gdy p_i odgrywają rolę sprzężonych z nimi pędów. Równania dynamiczne przyjmują postać równań Hamiltona

$$p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

spełnionych na powierzchni więzów $H(p, q) \equiv 0$.

Wartości n_i są brane spośród $\{0, +1, -1\}$. Trzy wielkości n_i determinują określony typ Bianchi w klasie A lub B. Dwa modele w klasie A – B(VIII) i B(IX) – są najogólniejsze. W literaturze zwykło się je nazywać modelami Mixmaster (wielkiego mieszania) od czasu, kiedy Charles Misner użył tych modeli dla wyjaśnienia problemu obserwowalnej jednorodności i izotropii Wszechświata w dużej skali [2].

Założenie jednorodności i anizotropii przestrzennej nie posiada głębszego uzasadnienia fizycznego, ponieważ obserwowany rozkład gromad galaktyk potwierdza, że Wszechświat w dużej skali (większej niż 100 megaparseków) jest jednorodny i izotropowy. Jednakże rozważanie jednorodnego i anizotropowego modelu wszechświata ma sens teoretyczny i – co więcej – badanie dynamiki tego modelu jest względnie proste, a uzyskane wyniki okazują się uniwersalne także w klasie modeli niejednorodnych i anizotropowych w otoczeniu osobliwości początkowej.

Wypełniające Wszechświat promieniowanie reliktowe jest jednorodne i izotropowe. Gdy temperatura przewyższała 4000 K cała materia Wszechświata miała postać zjonizowanej plazmy nieprzeźroczystej dla promieniowania. Wszechświat, w epoce rekombinacji, stał się przeźroczysty dla promieniowania, kiedy naładowane elektrony i protony zaczęły łączyć się, tworząc neutralne atomy wodoru, z którymi długofalowe fotony oddziałują bardzo słabo. Dlatego obserwując dzisiaj promieniowanie reliktowe, jak gdyby zagłędamy w przeszłość, w odległą epokę rekombinacji. Czas, który upłynął od tej epoki, jest wystarczający na dotarcie promieniowania relikтового do horyzontu (przyczynowo związana część Wszechświata, której rozmiar wynosi około 13 miliardów lat). Oznacza to tym samym, że dzięki promieniowaniu reliktowemu przeglądamy praktycznie cały dopuszczalny przez obserwację obszar Wszechświata. Epoka rekombinacji – odpowiadająca przesunięciu ku czerwieni $z = 1000$ – miała miejsce w chwili $t_r = 10^{12} - 10^{13}$ s po Wielkim Wybuchu w chwili t_0 . Rozmiar horyzontu w tym czasie co do rzędu wielkości jest równy ct_r . Dlatego punkty na sferze niebieskiej, których odległość kątowa wynosi $\Theta = (1 + z_r)t_r/t_0 = 10^{-2}$ niczego nie powinny o sobie wiedzieć (Rys. 1). Tymczasem dochodzące do nas promieniowanie reliktowe jest zadziwiająco jednakowe z dokładnością do setnej części procenta. Własności promieniowania dochodzącego do nas z odległego punktu w przestrzeni i jego

antypodalnego punktu są jakby samouzdognione jakkolwiek między nimi nie mogła być wymieniona żadna informacja. Problem ten nazywa się problemem horyzontu. Zadaniem teorii jest podać wyjaśnienie tej zagadki: jak ewoluował Wszechświat, że obecnie obserwujemy go jednorodnym i izotropowym w dużej skali?

W roku 1969 Charles Misner zwrócił uwagę na następującą możliwość rozwiązania problemu horyzontu opierając się na o modelu Mixmaster. Początkowy rozkład materii we Wszechświecie był anizotropowy i niejednorodny, a procesy dysypatywne powodowały wyrównanie tych asymetrii w trakcie ewolucji. Gdyby we wczesnych etapach ewolucji światło mogło obiecać cały wszechświat we wszystkich kierunkach, to wówczas miałoby miejsce wygładzenie początkowych niejednorodności i anizotropii. Niestety, bliższa analiza pokazuje, że hipoteza Misnera nie daje się zrealizować w kosmologii i problem jednorodności i izotropii Wszechświata pozostaje do wyjaśnienia. Następną propozycją rozwiązania tego problemu była teoria inflacji.

W spadku po tych rozważaniach pozostał opis dynamiki modeli Mixmaster. Zamiast czynników skali q_i Misner wprowadził nowe zmienne takie, że:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\Omega} (e^{2\beta})_{\mu\nu} e_i^\mu dx^i e_j^\nu dx^j, \quad i, j, \mu, \nu = 1, 2, 3 \quad (4)$$

gdzie

$$\beta_{\mu\nu} = \text{diag} \left| \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+ \right|$$

i $\beta_{\mu\nu}$ jest macierzą bezśladową, która została sparametryzowana poprzez parametry anizotropii β_+ i β_- oraz Ω jest jedynie funkcją czasu tak, że objętość 3-przestrzeni stałego czasu jest równa $e^{3\Omega}$. W nowych zmiennych (Ω , β_+ , β_-) hamiltonian (3) przyjmuje postać [3]:

$$H = -p_\Omega^2 + p_{\beta_+}^2 + p_{\beta_-}^2 + V(\Omega, \beta_+, \beta_-) = 0 \quad (5)$$

gdzie $V(\Omega, \beta_+, \beta_-)$ jest potencjałem układu. Kwadratowa w pędach część hamiltonianu opisuje ruch cząstki swobodnej w 2 + 1 wymiarowej płaskiej czasoprzestrzeni; β_+ i β_- są traktowane jako współrzędne uogólnione, a Ω jako czas. Osobliwość początkowa ma miejsce dla $\Omega \rightarrow \infty$. W tym obrazie dynamika modeli Bianchi klasy A rozumiana jest jako problem ruchu cząstki bezmasowej poruszającej się wewnątrz czasowo zależnego potencjału $V(\Omega, \beta_+, \beta_-) = e^{4\Omega} V(\Omega, \beta_+, \beta_-)$ (Rys. 2) — bilard z ruchomymi ścianami.

Przyjrzyjmy się bliżej dynamice modeli B(IX), dla której $\forall i n_i = 1$. (Analiza modelu B(VIII) w otoczeniu osobliwości początkowej jest w pewnym sensie analogiczna). Najpierw jednak przedstawimy charakter dynamiki w modelach Bianchi I i Bianchi II, którymi można przybliżyć złożone zachowanie modelu Bianchi IX.

M o d e l B i a n c h i I. Dla modeli kosmologicznych Bianchi I potencjał $V(\Omega, \beta_+, \beta_-)$ znika ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$). Wobec tego mamy tu do czynienia z dynamiką cząstki swobodnej w płaskiej dwuwymiarowej przestrzeni. Trajektorie są liniami prostymi w płaszczyźnie (β_+, β_-) . Jedynym parametrem swobodnym jest kąt, jaki tworzą te linie z osią β_+ . Rozwiązanie równań Einsteina dla modeli Bianchi I jest znane jako rozwiązanie Kasnera i posiada postać

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 t^{2p_i} (dx^i)^2 \quad (6)$$

gdzie p_i zwane wykładnikami kasnerowskimi spełniają dwa więzy:

$$\sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1. \quad (7)$$

Widzimy więc, że rozwiązania (6) są w istocie jednoparametrową rodziną rozwiązań. Trzy parametry p_i można sparametryzować przez jeden parametr u w następujący sposób (Rys. 3):

$$\begin{aligned} p_1(u) &= -u/(1+u+u^2) \\ p_2(u) &= (1+u)/(1+u+u^2) \\ p_3(u) &= u(1+u)/(1+u+u^2) \end{aligned} \quad (8)$$

Relacja pomiędzy kątem α , jaki tworzą trajektorie z osią β_+ , a parametrem u jest

$$u = -\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha + 1/2 \quad (9)$$

M o d e l B i a n c h i II. Dla modeli Bianchi II mamy $n_1 = 1$ i $n_2 = n_3 = 0$, tak że potencjał $V(\Omega, \beta_+, \beta_-)$ przyjmuje postać:

$$V(\Omega, \beta_+, \beta_-) = e^{4\Omega} e^{4\beta_+ + 4\sqrt{3}\beta_-}. \quad (10)$$

Ponieważ funkcja ta jest typu eksponenty, można ją aproksymować poprzez funkcję ściany o nieskończonej wysokości (funkcja Heavyside'a $\Theta_\infty(x)$). Gdy wykładnik eksponenty $4\beta_+ + 4\sqrt{3}\beta_-$ jest dodatni, wtedy funkcja $V(\Omega, \beta_+, \beta_-)$ zmierza do nieskończoności i gdy jest ujemny funkcja dąży do zera. W ten sposób wartości zero i nieskończoność funkcji potencjału V wyznaczają dwa obszary na płaszczyźnie (β_+, β_-) , które są odseparowane prostą nachyloną pod kątem 150° do osi β_+ . Dodatkowa zależność potencjału (10) od czasu manifestuje się ruchem ściany potencjalnej z prędkością $1/2$, jak pokazano na Rys. 4. W obszarze, gdzie potencjał jest prawie równy zero, trajektoria jest dobrze aproksymowana zachowaniem Bianchi I. W pobliżu ściany potencjału trajektoria odbija się od niej i dalej może być znowu aproksymowana poprzez zachowanie typu Bianchi I. Wobec tego dynamiczne zachowanie modeli Bianchi II można sobie wyobrazić jako ewolucję B(I) sklejoną w punkcie zderzenia ze ścianą potencjału. Ponieważ ściany potencjału ekspandują, kąty przed oraz po zderzeniu są różne i zachodzi następująca relacja

$$\sin(\Theta_{out}) = \frac{3\sin(\Theta_{in})}{5\cos(\Theta_{in}) - 4}$$

która w języku parametru u wyraża się:

$$u_{out}^{-1} = u_{in}^{-1} - [u_{in}^{-1}] \quad (11)$$

gdzie $[u]$ oznacza część całkowitą u .

M o d e l B i a n c h i IX. Poziomica funkcji potencjału dla $\Omega = \text{const}$ została pokazana na Rys. 5. Składa się ona z trzech ścian, każda jak w modelu B(II). Ponieważ ściany tworzą rodzaj trójkąta, którego ściany łączą się w nieskończoności, wobec tego cząstka wszechświat jest uwięziona wewnątrz trójkątnego obszaru i będzie się zderzać ścianami. W trakcie ewolucji wszechświata do osobliwości, ekspandujące ściany oddalają się coraz bardziej od siebie tak, że częstość zderzeń cząstki wszechświata ze ścianami jest funkcją malejącą w czasie Ω .

W konsekwencji dynamikę modelu B(IX) możemy traktować jako nieskończoną serią zachowań typu B(I), które zostały sklezione w otoczeniu ściany potencjału rozwiązaniem typu B(II). Ponieważ, jak już wspominaliśmy, trajektorie B(I) są charakteryzowane przez jeden parametr swobodny u , dynamika B(IX) może być kodowana poprzez nieskończony zbiór liczb określających parametr kasnerowski u albo, równoważnie, kąt odbicia trajektorii od ścian.

Taki opis dynamiki jako aproksymacji serią epok kasnerowskich został zaproponowany przez Bielińskiego, Khałatnikowa i Lifszitza (BKL - w skrócie) w latach siedemdziesiątych [4]. Ciekawe jest, że dynamika w tej aproksymacji jest sprowadzona do 1-wymiarowych odwzorowań dyskretnych (map), które były już znane Gaussowi w r. 1812. O mapach tych dzisiaj wiemy, że są chaotyczne, ergodyczne i posiadają tzw. własność mieszania (Rys. 6). Układy te mają również dodatnią entropię Kołmogorowa równą $\pi^2/6(\ln 2)^2$, która – najogólniej rzecz ujmując – charakteryzuje stopień chaotyczności układu. Historycznie było to więc w fizyce jedno z pierwszych odkryć odwzorowań dyskretnych, które reprezentują pewien realny niskowymiarowy (a więc prosty) układ fizyczny z chaosem.

W naszym wypadku prostota w wyborze dynamiki oznacza, że jest ona opisywana przez skończenie wymiarowy układ dynamiczny (jak wiadomo, równania różniczkowe cząstkowe, jakimi są równania Einsteina, można uczynić równoważne nieskończenie wymiarowemu układowi dynamicznemu). Wymiar przestrzeni fazowej dla modeli Mixmaster jest równy 6, ale dynamika dzieje się na powierzchni więzu hamiltonowskiego, stąd trajektorie leżą na powierzchni 5-wymiarowej. Jest to przypadek układu niskowymiarowego, i co więcej – dynamika daje się sformułować w sposób hamiltonowski, tzn. ruch takiego układu w przestrzeni fazowej możemy sobie wyobrażać jak ruch nieściśliwej cieczy.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej aproksymacji BKL dynamiki modelu B(IX) (dla modelu B(VIII) w zasadzie opis jest taki sam). Kluczem do zrozumienia ewolucji metryki czasoprzestrzeni modelu B(IX) są prawa wymiany wykładników kasnerowskich w otoczeniu osobliwości początkowej.

Trzy wykładniki kasnerowskie p_i nigdy nie są jednocześnie równe. Parami są one równe w dwóch przypadkach $(-1/3, 2/3, 2/3)$ i $(0, 0, 1)$. Wprowadzamy oznaczenie p_l, p_m, p_n dla nieuporządkowanych trójek liczb przypisanych kierunkom głównym l, m, n odpowiadającym czynnikom skali a, b, c . Uporządkowane trójki liczb oznaczamy p_1, p_2, p_3 , jeśli $p_1 < p_2 < p_3$, i ich wartości będą leżeć w przedziałach:

$$-1/3 \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq 2/3, \quad 2/3 \leq p_3 \leq 1.$$

Jeśli parametr u będzie przyjmował wartości z przedziału $u \geq 1$, to wszystkie wartości p_i są różne z zachowaniem porządku. Gdy $0 < u < 1$ otrzymamy te same wartości wykładników kasnerowskich co w obszarze $u > 1$, ale o zmienionym porządku, ponieważ:

$$p_l(1/u) = p_1(u), \quad p_m(1/u) = p_2(u), \quad p_n(1/u) = p_3(u). \quad (12)$$

W miarę jak t maleje ($t \rightarrow 0$), jeden z czynników skali a , b , c rośnie, a dwa pozostałe maleją. Niech

$$a \sim t^{p_l}, \quad b \sim t^{p_m}, \quad c \sim t^{p_n}. \quad (13)$$

Składowe tensora Ricciego w próżni (R_{ν}^{μ}) dla modelu B(IX) przyjmują postać:

$$-R_1^1 = (\dot{a}bc)/(abc) + 1/2a^2b^2c^2[a^4 - (b^2 - c^2)^2] \quad (14)$$

$$-R_2^2 = (a\dot{b}c)/(abc) + 1/2a^2b^2c^2[b^4 - (a^2 - c^2)^2] \quad (15)$$

$$-R_3^3 = (ab\dot{c})/(abc) + 1/2a^2b^2c^2[c^4 - (a^2 - b^2)^2] \quad (16)$$

$$-R_0^0 = \ddot{a}/a + \ddot{b}/b + \ddot{c}/c = 0 \quad (17)$$

gdzie kropka $\dot{} \equiv d/dt$.

Wygodnie jest w powyższych równaniach wprowadzić oznaczenie

$$a = e^{\alpha}, \quad b = e^{\beta}, \quad c = e^{\gamma}, \quad (18)$$

oraz nową zmienną czasową τ

$$dt = abcd\tau \quad (19)$$

Równania Einsteina dla próżni ($R_{\nu}^{\mu} = 0$) w tych zmiennych przyjmują postać:

$$2\alpha_{\tau\tau} = (b^2 - c^2)^2 - \alpha^4 \quad (20)$$

$$2\beta_{\tau\tau} = (a^2 - c^2)^2 - \beta^4 \quad (21)$$

$$2\gamma_{\tau\tau} = (a^2 - b^2)^2 - \gamma^4 \quad (22)$$

$$(1/2)(\alpha + \beta + \gamma)_{\tau\tau} = \alpha_{\tau}\beta_{\tau} + \alpha_{\tau}\gamma_{\tau} + \beta_{\tau}\gamma_{\tau} \quad (23)$$

Kasnerowskie rozwiązania równań (20)-(23) mają miejsce, gdy prawe strony tych równań są zaniedbywane. Załóżmy, że w pewnej chwili czasu t_0 rozwiązania równań (20)-(23) są opisywane przez rozwiązanie Kasnera (13). Ponieważ wtedy ujemny wykładnik Kasnera odnosi się do funkcji $a(t)$ ($p_l = p_1$), to zaburzenie reżimu kasnerowskiego wynika z członu a^4 , podczas gdy po-

zostałe człony po prawej stronie (20)-(22) maleją do zera gdy $t \rightarrow 0$. Równanie (20)-(22) przyjmują postać:

$$\alpha_{\tau\tau} = -(1/2)e^{4\alpha}, \quad \beta_{\tau\tau} = \gamma_{\tau\tau} = (1/2)e^{4\alpha} \quad (24)$$

Równania (24) powinny opisywać ewolucję od początkowego stanu kasnerowskiego dla $\tau \rightarrow +\infty$ opisywanego przez (13), w którym:

$$abc = \Lambda t, \quad \tau = \Lambda^{-1} \ln t + \text{const}, \quad \tau \rightarrow +\infty \quad (25)$$

Równania (24) posiadają rozwiązania

$$a^2 = \frac{2 |p_1| \Lambda}{\cosh(2 |p_1| \Lambda \tau)} \quad (26)$$

$$b^2 = b_0^2 e^{2\Lambda(p_2 - |p_1|)\tau} \cosh(2 |p_1| \Lambda \tau) \quad (27)$$

$$c^2 = c_0^2 e^{2\Lambda(p_3 - |p_1|)\tau} \cosh(2 |p_1| \Lambda \tau) \quad (28)$$

Warunek początkowy dla rozwiązań (26) - (28) ustaliliśmy w $\tau \rightarrow +\infty$, ponieważ badamy ewolucje w kierunku, jak t maleje (albo $\tau \rightarrow -\infty$), i warunek początkowy zadajemy w późniejszym, a nie wcześniejszym czasie, licząc od osobliwości.

Łatwo znaleźć asymptotykę rozwiązań (26) - (28) dla $\tau \rightarrow -\infty$, gdzie:

$$a \sim e^{-\Lambda p_1 \tau}, \quad b \sim e^{-\Lambda(p_2 + 2p_1)\tau}, \quad c \sim e^{\Lambda(p_3 + 2p_1)\tau}, \quad t \sim e^{\Lambda(1 + 2p_1)\tau},$$

która jest rozwiązaniem Kasnera:

$$a \sim t^{p'_l}, \quad b \sim t^{p'_m}, \quad c \sim t^{p'_n},$$

gdzie

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_m = \frac{2|p_1| - p_2}{1 - 2|p_1|}, \quad p'_n = \frac{p_3 - 2|p_1|}{1 - 2|p_1|}. \quad (29)$$

$$abc = \Lambda' t, \quad \Lambda' = (1 - 2|p_1|)\Lambda$$

W ten sposób zaburzenie, w następstwie którego $a \gg b, c$ prowadzi do wymiany jednej epoki kasnerowskiej na inną. Ujemny wykładnik kasnerowski zostaje przerzucony z czynnika skali a na, powiedzmy, czynnik skali b . Jeśli

mieliśmy $p_l < 0$ to teraz $p'_m < 0$. W procesie wymiany wykładników Kasnera funkcja $a(t)$ przechodzi przez maksimum, a funkcja $b(t)$ przez minimum; malejąca wcześniej funkcja $b(t)$ zaczyna rosnać, a rosnąca $a(t)$ zaczyna maleć. Funkcja $c(t)$ cały czas maleje. Człon $e^{4\alpha}$ dominujący w prawych stronach (20)-(22) zaczyna maleć i staje się zanedbywalny, podczas gdy w dalszej ewolucji rosną człony $e^{4\beta}$ i $e^{4\gamma}$, co znowu prowadzi do wymiany wykładników kasnerowskich. Prawa wymiany wykładników kasnerowskich wygodnie jest przedstawić za pomocą parametryzacji (9): jeśli

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u)$$

to

$$p'_l = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1). \quad (30)$$

Ciąg transformacji wykładników kasnerowskich (30) z przerzucaniem wskaźnika p_l między kierunkami głównymi l, m (z odpowiadającymi im czynnikami skali $a(t)$ i $b(t)$) jest kontynuowany, dopóki nie zostanie wyczerpana część całkowita u tak, że $u < 1$. Wtedy $u < 1$ przejdzie w $u > 1$ zgodnie z regułą transformacji (12). Wówczas ujemnym wykładnikiem będzie p_l albo p_m , podczas gdy p_n jest mniejszym z dwóch dodatnich wykładników ($p_n = p_2$). W następnej serii zostanie przerzucony ujemny wykładnik między kierunkami odpowiadającym czynnikom skali $b(t)$ i $a(t)$ albo między $c(t)$ i $b(t)$. Przy dowolnym niewymiernym warunku początkowym dla wartości u proces wymiany wykładników kasnerowskich jest kontynuowany w nieskończoność.

Profesor Zalewski mawia, że dobrego fizyka można poznać po tym, jak przybliża. Firma BKL wykazała się mistrzostwem w sposobie przybliżenia bardzo złożonego reżimu dynamicznego. Badania numeryczne pokazują idealną zgodność aproksymacji BKL z rzeczywistą dynamiką, w miarę jak zbliżamy się ku osobliwości początkowej. Proces ewolucji wówczas składa się z kolejnych okresów (nazywanych erami), w czasie których dwa czynniki skali przestrzennych odległości oscylują, podczas gdy trzeci czynnik skali monotonicznie maleje. W czasie trwania ery objętość 3-przestrzeni stałego czasu maleje zgodnie z prawem $(\text{Vol}M^3)(t) \sim t$. Po przejściu od jednej ery do następnej kierunek, wzdłuż którego maleje odległość, zostaje zmieniony na inny. Porządek tej zmiany przyjmuje asymptotycznie postać procesu losowego. Taki sam charakter posiadają długości kolejnych er, jeśli je wyrazimy liczbą zmieniających się w niej epok kasnerowskich.

Prawa wymiany wykładników kasnerowskich odbywają się zgodnie z regułą:

$$u_{n+1} = u_n - 1 \text{ gdy } u_n \geq 2$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1} \text{ gdy } 1 < u_n < 2$$

Dla dowolnej niewymiernej wartości początkowej u_0 mamy

$$1 \text{ era: } u_{1,pocz.} = u_0 \rightarrow u_0 - 1 \rightarrow \dots \rightarrow u_0 - [u_0] = u_{1,końc.}$$

$$2 \text{ era: } u_{2,pocz.} = \frac{1}{u_0 - [u_0]} = u_1 \rightarrow u_1 - 1 \rightarrow \dots \rightarrow u_1 - [u_1] = u_{2,końc.}$$

$$3 \text{ era: } u_{3,pocz.} = \frac{1}{u_1 - [u_1]} = u_2 \rightarrow u_2 - 1 \rightarrow \dots \rightarrow u_2 - [u_2] = u_{3,końc.}$$

Zapiszmy jeszcze prawa transformacji epok kasnerowskich, kodowanych poprzez oznaczającą stan układu parę (u, σ) , w formie

$$(u_0, \sigma_0) \rightarrow (u_1, \sigma_1) \rightarrow (u_2, \sigma_2) \rightarrow \dots$$

gdzie

$$(u, \sigma) \rightarrow (u - 1, \sigma\sigma_{12}) \text{ dla } 2 \leq u < \infty$$

$$(u, \sigma) \rightarrow \left(\frac{1}{u - 1}, \sigma\sigma_{12}\sigma_{23}\right) \text{ dla } 1 \leq u \leq 2$$

a σ oznacza permutacje trzech osi kasnerowskich

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zapiszemy również początkową wartość u_0 w postaci

$$u_0 \equiv [u_0] + x_0, \quad 0 < x_0 < 1.$$

Zgodnie z regułami BKL pierwsza seria będzie determinowała wartość początkową u_1 dla następnej serii oscylacji, a jej długość będzie określona przez $[u_0]$ i generalnie $\{[u_i]\}_{i=1,2,\dots}$ jest długością kolejnych er, które są kolejnymi cyframi rozwinięcia u_0 w nieskończony ułamek łańcuchowy

$$u_0 = [u_0] + \frac{1}{[u_1] + \frac{1}{[u_2] + \frac{1}{[u_3] + \dots}}}$$

Jako przykład rozważmy następujący kod dla $u_0 = 4,321$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ era} \quad 4,321 \rightarrow 3,321 \rightarrow 2,321 \rightarrow 1,321 \rightarrow 0,321 \\ 2 \text{ rea} \quad 1/0,321 = 3,115 \rightarrow 2,115 \rightarrow 1,115 \rightarrow 0,115 \\ 3 \text{ era} \quad 1/0,115 = 8,696 \rightarrow 7,696 \rightarrow 6,696 \rightarrow \dots \end{array}$$

Długości kolejnych er otrzymamy jako rozwinięcie u_0 w ułamek łańcuchowy [4]:

$$u_0 = 4,321 = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{8 + \dots}}$$

O takich rozwinięciach wiadomo, że są niestabilne w chaotycznym sensie, tj. początkowa nieoznaczoność u_0 propaguje się eksponencjalnie z liczbą iteracji.

Przyjrzyjmy się bliżej rozkładowi wielkości $x_i = 1/u_{i+1}$ [3]

$$x_i \equiv u_i - [u_i] = T(x_{i-1}) = x_{i-1}^{-1} - [x_{i-1}^{-1}], \quad 0 < x_i < 1.$$

Jednowymiarowe odwzorowanie T nosi nazwę odwzorowania Gaussa:

$$x \rightarrow T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], \quad x \neq 0$$

i działa jak lewa translacja w ułamku łańcuchowym będącym rozwinięciem liczby z jednostkowym interwału $[0, 1]$:

$$x = [a_1, a_2, a_3, \dots] \rightarrow T(x) = [a_2, a_3, \dots].$$

Można pokazać, że asymptotycznie dla $i \rightarrow \infty$ rozkład elementów x_i dąży do stacjonarnego rozkładu prawdopodobieństwa $\mu(x)$ dla danego u_0 [3, 4]:

$$\mu(x) = \frac{1}{(1+x)\ln 2}$$

Odwzorowanie Gaussa jest przykładem chaotycznych odwzorowań, które bardzo szybko zapominają o swoich warunkach początkowych. Asymptotycznie rozkład prawdopodobieństwa μ jest inwariantną miarą prawdopodobieństwa (zachowującą T), tj.

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A), \quad \mu(A) \equiv \int_A \mu(x)dx$$

dla dowolnego mierzalnego podzbioru $A \subseteq X$ zbioru $x \in X$ (odcinek $[0, 1]$ dla odwzorowania Gaussa). Odwzorowanie Gaussa $x \rightarrow T(x)$ z warunkiem $|T'(x)| > 1$ posiada własność eksponencjalnej niestabilności, tj. odległość między dwoma bliskimi punktami rośnie eksponencjalnie z liczbą kolejnych iteracji

$$x \rightarrow T(x) \rightarrow T(T(x)) = T^2(x) \rightarrow \dots$$

Aby się o tym przekonać, weźmy wartości bliskie złotego podziału $u = (\sqrt{5} - 1)/2 = [1,1,1,\dots]$, a mianowicie

$$(1) \quad u = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 10^{-2} = [1,1,1,2,4,\dots],$$

$$(2) \quad u = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 10^{-3} = [1,1,1,1,1,1,1,179,\dots]$$

Wówczas dla przypadku (1) zaburzenie 10^{-2} spowoduje, że fikcyjna cząstka wszechświat zderzy się z sąsiednią ścianą nie raz, a dwa razy. Dla drugiego przypadku po siedmiu cyklach cząstka wszechświat zderzy się z sąsiednią ścianą już 179 razy, a nie raz.

Entropia metryczna (entropia Kołmogorowa) $h = h(\mu, T)$ dla transformacji T jest uśrednioną własnością lokalnej niestabilności ($|T'(x)| > 1$). Uśrednienia dokonujemy względem miary μ (inwariantnej względem odwzorowania T):

$$h = h(\mu, T) = \langle \log |T'(x)| \rangle \equiv \int_0^1 \ln |T'(x)| \mu(x)dx.$$

Gdy $h > 0$, układ jest chaotyczny i pamięć o warunkach początkowych jest tracona po h^{-1} iteracjach. Dla odwzorowania Gaussa mamy

$$h = h(\mu, T) = -2 \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x) \ln 2} dx = \frac{\pi^2}{6(\ln 2)^2}.$$

Działanie odwzorowania T jest równoważne przesunięciom Bernoulliego: $x_{n+1} = 2x_n \pmod{1}$ i nie jest to zbieżność przypadkowa, ponieważ można pokazać,

że układy te są izomorficzne. Oznacza to, że chaotyczna dynamika modeli Mixmaster w BKL aproksymacji posiada własności identyczne z grą w kości.

Do tej pory mogliśmy mieć wrażenie, że badany typ dynamicznego zachowania i jego aproksymacji BKL jest przykładem mocno wyidealizowanym. W końcu złożona dynamika w 5-wymiarowej przestrzeni fazowej została aproksymowana przez jednowymiarową dynamikę dyskretną. Rzecz jednak w tym, że ten właśnie typ zachowania powielany jest przez modele niejednorodne i anizotropowe przy zbliżaniu się do osobliwości (wstecz w czasie). Czy chaos jest typową własnością dynamiki metryk czasoprzestrzeni OTW podczas kolapsu grawitacyjnego? – problem ciągle pozostaje otwarty. Pomiedzy aproksymacją BKL a rzeczywistą dynamiką w obrazie hamiltonowskim można ustalić ścisłą odpowiedniość i wtedy epoki kasnerowskie w aproksymacji BKL odpowiadają ruchom swobodnym fikcyjnej cząstki wszechświata wewnątrz jamy potencjału. Odbicie od ściany potencjału jest odpowiednikiem zmiany epoki kasnerowskiej. Podczas zderzenia ze ścianą albo jeden z czynników skali jest dużo większy od dwóch pozostałych ($q_i \gg q_j, q_k$) dla dowolnej cyklicznej permutacji (i, j, k) , albo dwa z czynników skali są bliskie i oscylują, pozostając dużo większe od trzeciego ($q_i \approx q_j \gg q_k$) i wtedy cząstka znajduje się w rogu utworzonym przez dwie sąsiednie ściany potencjalne. Pierwszy przypadek jest zwany I przybliżeniem BKL, a drugi II przybliżeniem BKL albo długą fazą (por. Rys. 7 i 8). Można pokazać, że cząstka wszechświat jeśli się znajdzie w rogu utworzonym przez ściany potencjału, to po pewnym czasie wyjdzie z tego rogu. W tej fazie ewolucji dwa z czynników skali oscylują w przeciwfazie, podczas gdy trzeci monotonicznie maleje. Przejście do nowej ery następuje z chwilą, gdy malejący czynnik zaczyna rosnać, by następnie oscylować z innym w przeciwnej fazie. Wówczas jeden z oscylujących czynników monotonicznie maleje. Cząstka znajdująca się w rogu potencjału koniec końców go opuści, co oznacza, że w długiej fazie nie może być nieskończenie wiele epok kasnerowskich, albo inaczej – nie wystąpi tam tzw. anomalne zachowanie. Dynamika modeli Mixmaster dopuszcza również trajektorie okresowe. Zdarzy się to wówczas, gdy kąt padania cząstki wszechświata jest równy liczbie zwanej złotym podziałem. Taką trajektorię w obrazie Misnera pokazano na Rys. 9.

Dynamika układu hamiltonowskiego dzieje się na niezwanej hiperpowierzchni, co jest to konsekwencją nieokreśloności formy energii kinetycznej. Klasa podobnego typu układów opisywana naturalnym Langrangianem nosi nazwę prostych relatywistycznych układów mechanicznych [5]. Układy takie wcześniej nie były dostrzegane przez matematyków, tak samo jak kiedyś nie istniała potrzeba badania przestrzeni z metryką Lorentza. Konieczność badania

takich układów wynika z opisu problemów dynamicznych w OTW i kosmologii. Niektóre przykłady prostych relatywistycznych układów mechanicznych zawiera Tablica 1.

Tab. 1. Przykłady relatywistycznych prostych układów dynamicznych

Układ mechaniczny	Funkcja Hamiltona (Lagrange'a)
kosmologia Friedmanna Robertsona Walkera z rzeczywistymi, sprzężonymi polami skalarnymi	$H = \frac{1}{2} (- p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (- q_1^2 + q_2^2 + m^2 q_1^2 q_2^2) = 0$
model Friedmanna Robertsona Walkera w teorii grawitacji z kwadratem skalar krzywizny w działaniu	$H = - \frac{1}{4} (p_1^2 - p_2^2) + \frac{1}{4} (q_1^2 - q_2^2) + \frac{q_1^2}{8\beta} (- q_1 + q_2)^2$
model kosmologiczny Bianchi I z minimalnie sprzężonym polem skalarnym	$H = \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{a^3} - \frac{2\pi}{3m_p^2} \frac{p_a^2}{a} + \frac{1}{2} m^2 a^3 \phi^2 - \frac{3m_p^2}{8\pi} k_\gamma a^{3-2\gamma}$
wielowymiarowy model kosmologiczny o topologii produktowej dwóch przestrzeni maksymalnie symetrycznych M_1 i $M_2 : \mathbf{R} \times M_1^3 \times M_2^{n-3}$	$L = - \frac{1}{2} n (n - 1) q_1^2 + \frac{1}{2} q_2^2 + \frac{R}{2} e^{-2q_1} + V (q_2)$
model Mixmaster jako zaburzona periodyczna sieć Tody	$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j + \sum_{k,l=1}^n b_{kl} \exp (\sum_{i=1}^n \alpha_k q_i + \sum_{i=1}^n \alpha_l q_i)$
cząstka swobodna lub foton w przestrzeni wielu czarnych dziur	$H = \frac{1}{2m} [- U^2 p_i^2 + U^{-2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)]$
naładowana cząstka w jednorodnym polu magnetycznym z liniowo spolaryzowaną falą grawitacyjną	$L = \frac{1}{2} \pi_0^2 - \frac{1}{2} \pi_i^2 - \frac{1}{2} \frac{(x^1)^2}{1 - \alpha \sin[v(x^1 - x^0)]} \equiv \frac{1}{2}$
wielowymiarowa kosmologia z topologią $\mathbf{R} \times \mathbf{M}_1 \times \dots \times \mathbf{M}_n$	$L = \frac{1}{2} G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V (x)$
kosmologia z polem skalarnym w sformułowaniu ADM	$H = N^i G_{ij\alpha\beta} \Pi^{\dot{i}} \Pi^{\alpha\beta} - \sqrt{g^3} R + \frac{\sqrt{g}}{2} \left[\frac{\Pi_\phi^2}{g} + V(\phi) \right]$

Tzw. przypadki całkowalne - przypadek (3) i (4) to układy w pewnym sensie zdegenerowane albo nietypowe, tworzące zbiór miary zero w prze-

strzeni układów dynamicznych. Typową własnością prostych układów dynamicznych jest chaos deterministyczny, manifestujący się złożonością ich dynamicznego zachowania [6, 7, 8, 9, 10]. Nietypową własnością tych układów jest ich całkowalność. Schumpeter mówił, że „Małe jest piękne”, my z kolei możemy powiedzieć, że „Proste jest złożone”. Albert Einstein, który kierował się kryterium prostoty przy wyborze teorii naukowej, w istocie poszukiwał teorii opisującej procesy złożone. Nasze dotychczasowe rozważania dynamicznych efektów w pobliżu osobliwości opierały się na klasycznej Ogólnej Teorii Względności. Musimy jednak pamiętać, że teoria ta traci swój walor poznawczy we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata i powinna być zamieniona przez odpowiednią teorię kwantową. Jednym z eksploatowanych aktualnie podejść do kwantowej kosmologii jest koncepcja Hawkinga-Hartlego kwantowej kreacji wszechświata *ex nihilo*.

Istotną kwestię, na którą musimy zwrócić uwagę, jest pytanie: czy chaos jest wewnętrzną własnością modeli Mixmaster czy tylko własnością ich aproksymacji? Takie pytanie jest uzasadnione, ponieważ znane są układy dynamiczne, które są całkowalne, a ich aproksymacja generuje chaos. Koronnym świadkiem tego typu zachowania jest nieliniowe wahadło matematyczne. Analogicznie możemy sądzić, że OTW jest jedynie pewną aproksymacją (każdy numeryczny algorytm jest również pewną aproksymacją). Przykładu podobnego typu dostarcza ruch cząstki próbnej po geodetyce w czasoprzestrzeni Kerra. Układ dynamiczny opisujący ruch tej cząstki jest oczywiście przykładem prostego relatywistycznego układu mechanicznego opisywanego przez hamiltonian

$$2mH = \frac{1}{\rho^2} \left[a^2 \sin^2 \Theta - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \right] p_t^2 + \frac{2a}{\rho^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) p_t p_\Phi + \frac{\Delta}{\rho^2} p_r^2 + \frac{1}{\rho^2} \left[p_\Theta^2 + \left(\frac{1}{\sin^2 \Theta} - \frac{a^2}{\Delta} \right) p_\Phi^2 \right] = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$$

gdzie współrzędne (t, r, Θ, Φ) są standardowymi współrzędnymi Boyera-Lindquista (uogólnionymi współrzędnymi Schwarzschilda), $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \Theta$, $a = S/M$ jest momentem pędu na jednostkę masy. Carter w r. 1968 pokazał całkowalność (w sensie istnienia dostatecznej liczby niezależnych całek pierwszych) problemu ruchu w czasoprzestrzeni Kerra, znajdując dodatkową całkę pierwszą (poza całkami wynikającymi z istnienia wektorów Killinga $\partial/\partial t$ i $\partial/\partial \Phi$ i tensora Killinga $g_{\mu\nu}$). Posiada ona postać:

$$I = p_{\Theta}^2 + \frac{p_{\Phi}^2}{\sin^2\Theta} + a^2 \sin^2\Theta p_t^2 - 2mHa^2 \cos^2\Theta = \text{const}$$

i jest (co łatwo sprawdzić wstawiając H) całką pierwszą związaną z istnieniem dodatkowego tensora Killinga (kwadratową w pędach). Tensor metryczny jest pierwszym tensorem Killinga. Całkowalność tego zagadnienia wynika więc z istnienia dwóch wektorów Killinga i dwóch tensorów Killinga.

Jeśli metrykę Kerra rozwiemy w szereg względem $1/r$ i zachowamy jedynie człony wiodące, otrzymamy:

$$ds^2 = - \left[1 + \frac{2M}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] dt^2 - \left[\frac{4aM}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] dt d\Phi + \\ + \left[1 + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] (dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2).$$

Do zapisania Hamiltonianu dla ruchu cząstki próbnej w czasoprzestrzeni z metryką ds^2 należy wyliczyć $g^{\mu\nu}$, tj. odwrotność metryki z rozwinięcia, ale ta na ogół nie koincyduje z rozwinięciem odwrotności metryki (operacje rozwinięcia i odwracanie macierzy nie komutują), co jest powodem, dla którego przybliżony problem staje się niecałkowalny. W tym przypadku nie istnieje odpowiednik całki pierwszej znalezionej przez Cartera i relatywistyczny układ wykazuje złożone chaotyczne zachowanie.

Opisana sytuacja występuje również dla całkowalnych sieci Tody, z eksponencjalną funkcją potencjału. Okazuje się, że rozwinięcie eksponent obcięte na dowolnym rzędzie generuje chaos w zachowaniu układu. W rezultacie układ jest niecałkowalny i traci całki pierwsze otrzymane z odpowiedniego przekształcenia pary Laxa.

Powyższe przykłady pokazują, z jak delikatną materią mamy do czynienia, badając chaos w OTW, i ostrzegają nas przed brakiem kontroli przy uproszczeniu problemu. Znowu przypominają nam się słowa Zalewskiego „prawdziwego fizyka poznać można po tym, jak przybliża”.

I na koniec jeszcze jedna uwaga natury ogólnej. Czasami się dziwimy, że w OTW kolekcjonuje się jawne rozwiązania. Mówi się nawet o swoistej „egzaktologii”. Z powyższego przykładu wynika, jak dalece jest to ważne, a nasz osąd krzywdzący. Oczywiście, że takie czy inne podejście do badań naukowych jest funkcją np. temperamentu, ponieważ naukę „robią” żywi ludzie, i tak być powinno.

*

W ostatnim czasie daje się zauważyć ponowne zainteresowanie chaosem w modelach kosmologicznych Mixmaster. Okazuje się, że numerycznie liczone wskaźniki Lapunowa w tzw. czasie logarytmicznym znikają w otoczeniu osobliwości początkowej. Fakt ten mógłby sugerować znikanie chaosu, ale ponieważ przestrzeń fazowa jest nieograniczona, nie istnieje żaden związek pomiędzy wskaźnikami Lapunowa a chaosem. Standardowo chaos definiuje się poprzez dodatność wskaźników Lapunowa (LCE - Lapunov Characteristic Exponent), rozumianych jako miary uśrednionego tempa rozbieżności bliskich trajektorii. Dla układów chaotycznych tempo ich rozbiegania się jest co najmniej meksponencjalne, co implikuje własność nadwrażliwej czułości układu na małe zmiany warunków początkowych. Fizycznie oznacza to, że nie możemy przewidywać dokładnie długoterminowego zachowania się układu. Możliwe są wtedy jedynie przewidywania statystyczne.

Zaletą wskaźników Lapunowa jest możliwość liczenia ich metodami numerycznymi, ale ich podstawową wadą jest brak inwariantności względem zamiany zmiennych zależnych, jak i niezależnych (czasu). Jeśli oryginalny układ posiada własność nadwrażliwej czułości na zaburzenia warunków początkowych, tj. jego bliskie trajektorie separują się jak $\exp(\lambda_{\text{ap}}t)$, to po przejściu do nowego czasu $\tau : t = \ln(\tau)/\lambda_{\text{Lap}}$ tempo separacji będzie liniowe, co jest z kolei charakterystyczne dla układów całkownych. Pojawia się tutaj problem inwariantnego zdefiniowania własności nadwrażliwej czułości na warunki początkowe. Można to uczynić, tłumacząc zagadnienie dynamiki hamiltonowskiej na język geodezyjnych na przestrzeniach riemannowskich albo pseudoriemannowskich (poprzez uogólnioną zasadę Maupertuis, znaną z mechaniki klasycznej) i wyrażając własność tę przy użyciu niezmienników tensora krzywizny Riemanna [5]. Tempo separacji bliskich geodetyk jest wyznaczone z równania dewiacji geodezyjnych, określającego względne przyspieszenie punktów na sąsiednich geodetykach, na przestrzeni z metryką Jacobiego. Dokładne omówienie tego problemu wymaga, niestety, osobnej pracy. Pamiętajmy, że problem chaosu, będącego wewnętrzną własnością samego układu, a nie jedynie konsekwencją wyboru takich a nie innych zmiennych posiada swoją specyfikę w OTW, związaną z faktem, że mamy do czynienia z teorią cechowania.

Co więcej, możemy wykazać, że niezmienniczy chaos jest wewnętrzną własnością dynamiki modeli Mixmaster. Istnieją również argumenty analityczne i numeryczne wskazujące na to, że jest on także własności niejednorod-

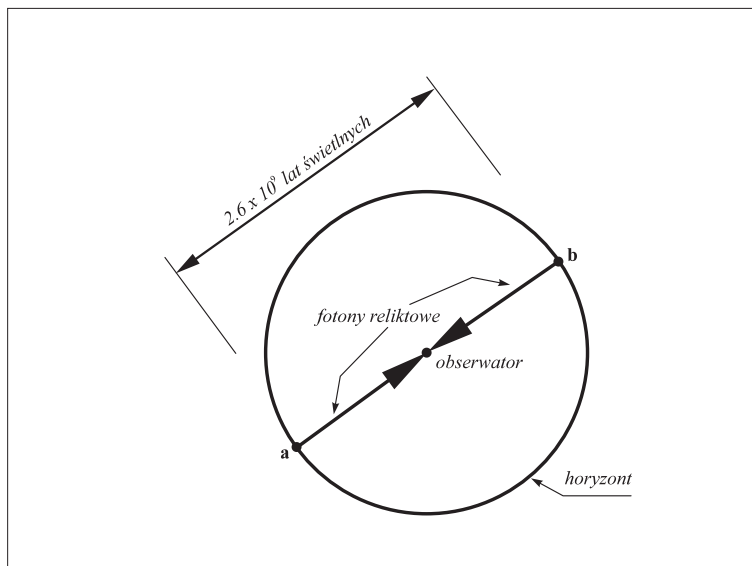
nych i anizotropowych modeli kosmologicznych w otoczeniu osobliwości początkowej.

Widzimy teraz, jak wielkim odkryciem było znalezienie przez Belinskiego, Khalatnikowa i Lifszycy prostego układu dynamicznego, opisującego kolaps jednorodnego pola grawitacyjnego, wykazującego złożone chaotyczne zachowanie. Otwartym pozostaje pytanie, czy chaos jest typową własnością osobliwości początkowej? Jest to przedmiotem badań wielu autorów. Zrozumienie natury i znaczenia chaosu w kontekście OTW i kosmologii jest ważne dla opisu dynamiki Wszechświata we wczesnych etapach ewolucji. Hipoteza jest następująca: wczesny Wszechświat jest koronnym świadkiem chaotycznego (albo turbulentnego) zachowania pola grawitacyjnego o własnościach procesu Bernoulliego. Prototypem takiego procesu jest rzut kością. Chaos ten nie może być wykryty poprzez standardowo liczone wskaźniki Lapunowa. Czyż Pan Bóg nie gra w kości, jeśli hipoteza ta jest słuszna. Czy również Einstein nie miał racji mówiąc, że Pan Bóg jest pomysłowy, ale nie złośliwy.

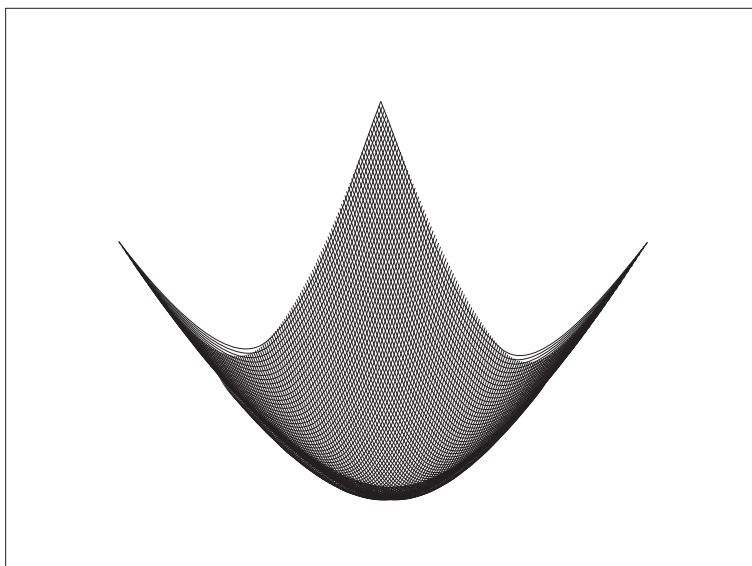
CYTOWANA LITERATURA

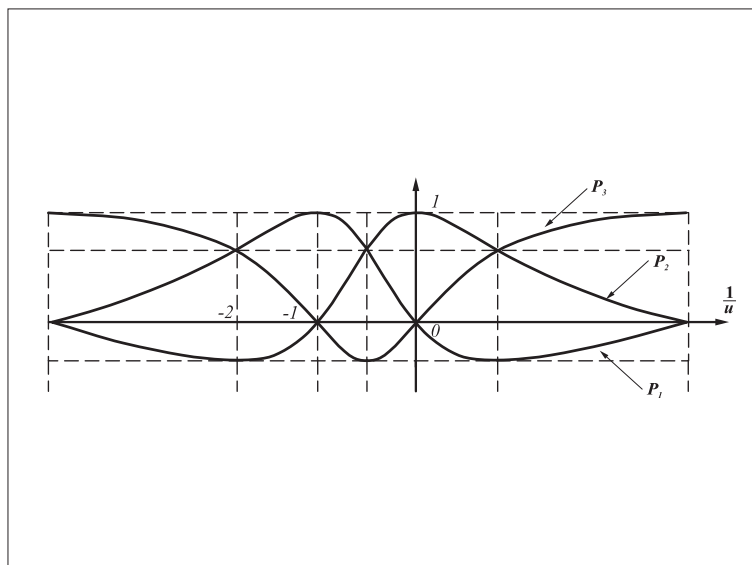
1. L a n d a u L. D., L i f s z y c E. M., Teoria pola, Warszawa 1976, PWN.
2. M i s n e r C. W., Phys. Rep. Lett. 22, 1071, (1969).
3. B a r r o w J. D., Phys. Rep. 85, 1, (1982).
4. B e l i n s k i V. A., K h a l a t n i k o v I. M., L i f s h i t z E. M., Adv. Phys. 19, 525, (1970); Adv. Phys. 31, 639, (1982).
5. S z y d ł o w s k i M., K r a w i e c A., Phys. Rev. D53, 6893 (1996);
S z y d ł o w s k i M., S z c z e s n y J., Phys. Rev. D50, 819 (1994);
S z y d ł o w s k i M., K r a w i e c A., Phys. Rev. D47, 5323 (1993);
S z y d ł o w s k i M., B i e s i a d a M., Phys. Rev. D44, 2369 (1991).
6. G l e i c k J., Chaos: Making a New Science, New York 1987, Viking Press.
7. W i g g i n s W., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, New York 1990, Springer-Verlag.
8. A r n o l d V. I., A v e z A., Ergodic Problems of Classical Mechanics, New York 1968, Benjamin.
9. A r n o l d V. I., Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, New York 1983, Springer-Verlag.
10. R u e l l e D., Chaotic Evolution and Strange Attractors, Cambridge 1989, Cambridge University Press.

RYSUNKI

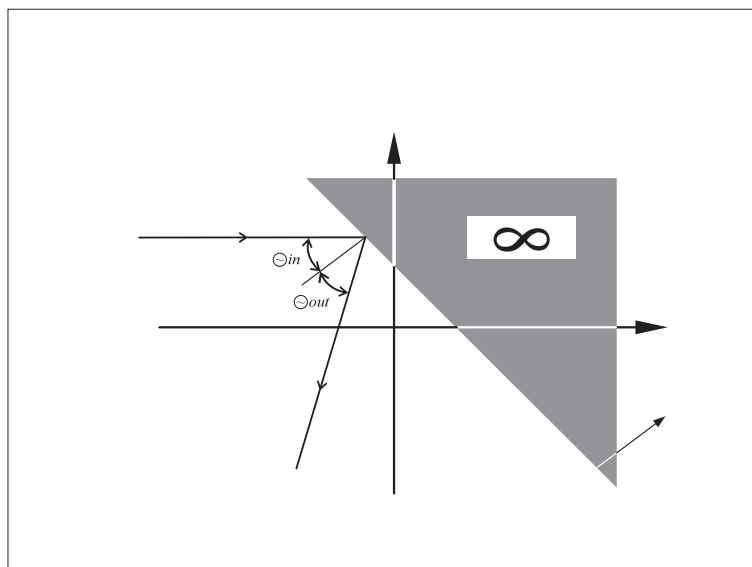


Ilustracja zagadki izotropii i jednorodności promieniowania tła

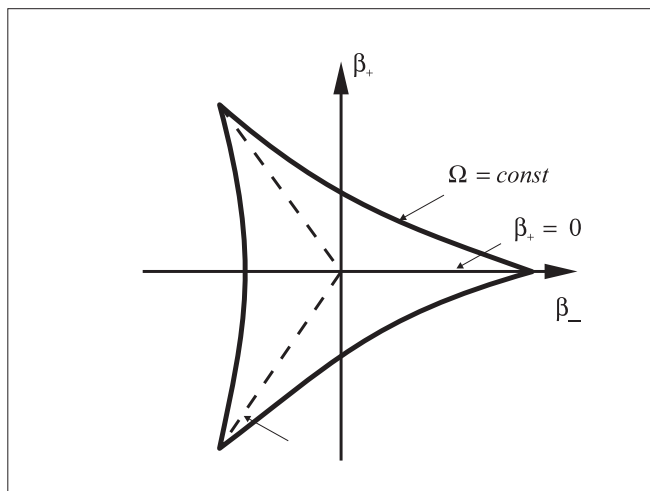
Wykres niezależnej od czasu funkcji potencjału $V(\beta_+, \beta_-)$



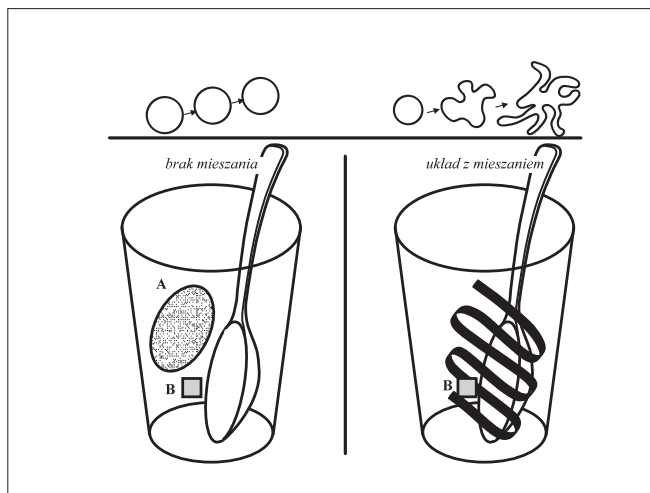
Wykres zależności wykładników kasnerowskich p_i ($i = 1,2,3$) od parametru $1/u$



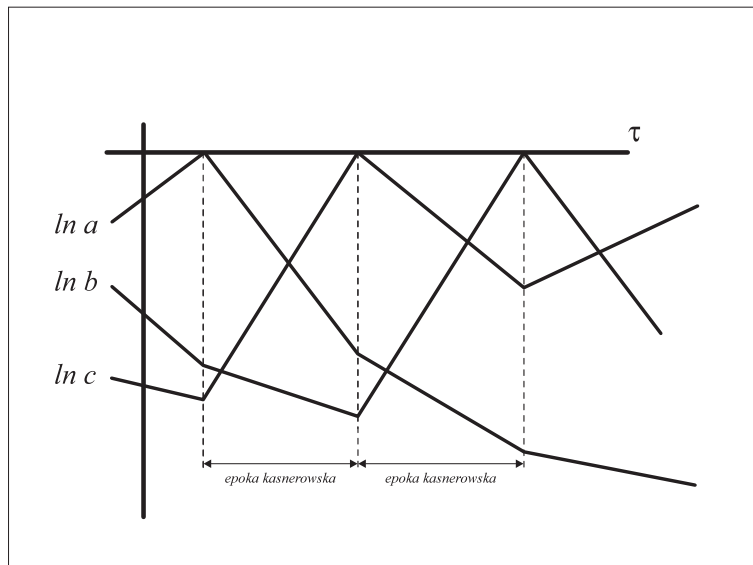
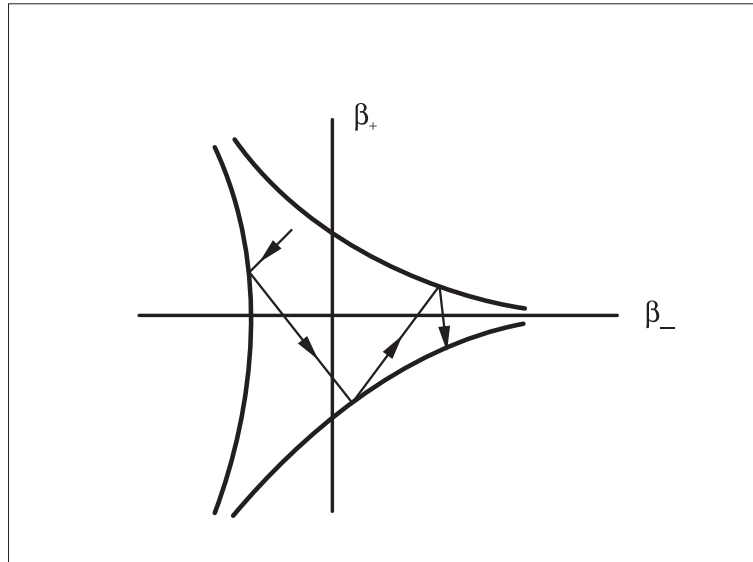
Trajektoria cząstki wszechświata w modelu Bianchi II na płaszczyźnie (β_+, β_-) . Ściana przesuwa się w zaznaczonym kierunku z prędkością $1/2$



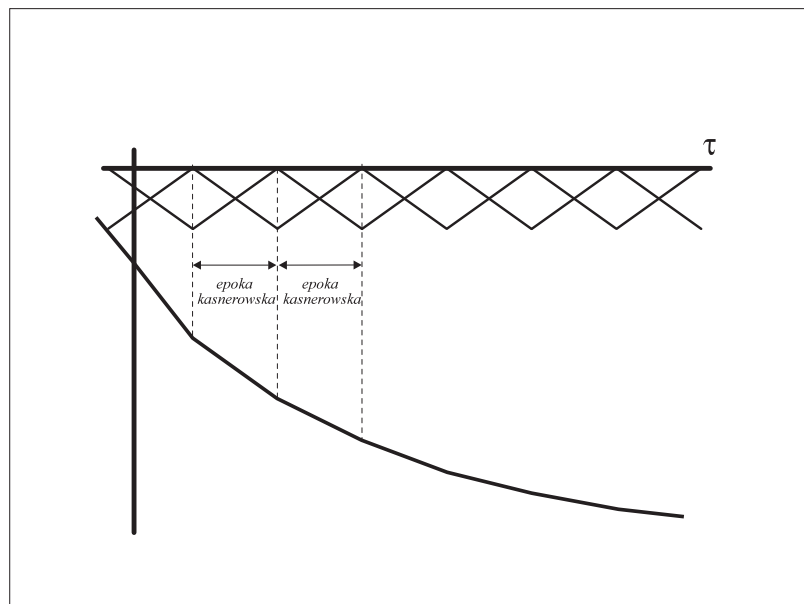
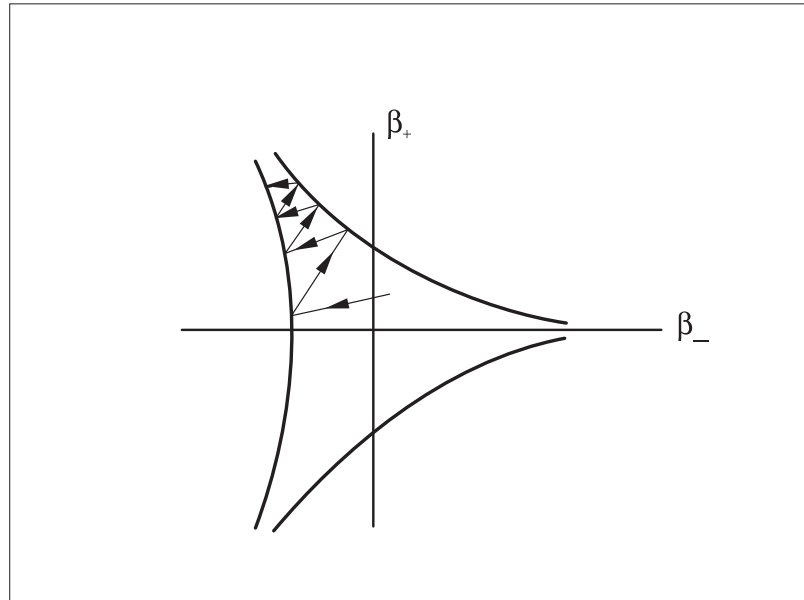
Powierzchnia ekwipotencjalna w przypadku $\Omega = \text{const}$ dla Bianchi IX na płaszczyźnie parametrów anizotropii (β_+, β_-) . W miarę zbliżania się do osobliwości, ściany potencjału ekspandują. Funkcja potencjału jest dobrze opisywana przez funkcję $\Theta_\infty(x)$ – ścianę o nieskończonej wysokości



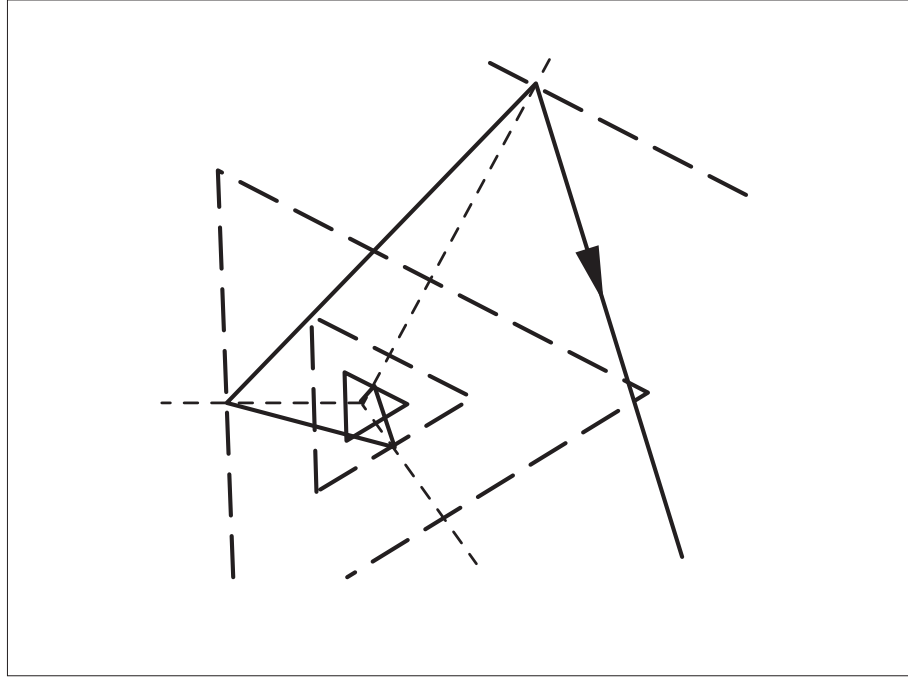
Ilustracja własności mieszania odwzorowania $T^n(A)$. Kropla rumu w coca-coli (zbiór A) jest pod wpływem tego odwzorowania – n kolejnych ruchów łyżeczką – jednorodnie rozprowadzana po całej objętości coca-coli. Na rysunku pokazano zachowanie się elementarnej objętości pod wpływem (a) niemieszających i (b) mieszających odwzorowań. Odwzorowanie posiada własność mieszania, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}[f^n(A) \cap B] = (\text{mes}A)(\text{mes}B)$ dla każdej pary mierzalnych zbiorów A, B . Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia się układu w obszarze B po wyjściu z obszaru A jest proporcjonalne do wielkości tych obszarów



I przybliżenie BKL: $q_i \gg q_i$, w obrazie Misnera na płaszczyźnie (β_+, β_-) (7a) oraz jego odpowiednik jako funkcji $q_i(\tau)$ w logarytmicznej skali $\tau = \ln t$ (7b). W obrazie Misnera nie zaznaczono ekspansji ścian



Cząstka wszechświat w długiej fazie na płaszczyźnie (β_+, β_-) (8a) oraz wykres $\ln q_i(\tau)$ w obrazie BKL (8b)



Trajektoria okresowa na płaszczyźnie (β_+, β_-) . Kątowi padania $\Theta_{in} = 15,5^\circ$ ($\Theta_{fin} = 44,5$) odpowiada wartość $u = (\sqrt{5} - 1)/2$ jak dla złotego podziału. Pokazano chwilowe położenia ścian, które ekspandują i zachowanie się fikcyjnej cząstki wszechświata w ich otoczeniu

IS THE UNIVERSE A SIMPLE DYNAMICAL SYSTEM WITH COMPLEX BEHAVIOUR?

S u m m a r y

In the present paper it is demonstrated the existence of complex (chaotic) behaviour in the time evolution of cosmological models.

We demonstrate that it is difficult to determine a precise sense of chaos in the Bianchi IX models. It can only be shown that some of their approximations form the systems with the property of the Bernoulli shifts. On the other hand, there are examples of integrable systems, but their approximations are non-integrable, e.g. the geodesic motion in the truncated to any finite order of Kerr geometry is not integrable and also chaotic. The generalized criterion of chaotic behaviour from the Maupertuis geometry of dynamics is proposed as a method of invariant chaos description.