ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLIV, zeszyt 1 – 1996

MAREK LECHNIAK
Lublin

O PRÓBACH INTUICYJNEJ INTERPRETACJI LOGIKI TRÓJWARTOŚCIOWEJ J. ŁUKASIEWICZA

Próbę intuicyjnej interpretacji formalnej systemu trójwartościowego przedstawił J. Słupecki w 1964 r.[1] Następnie system Słupeckiego został poddany aksjomatyzacji w artykule *Some Remarks on Three-valued Logic of J. Łukasiewicz*[2]. Analizom próby Słupeckiego poświęcona była praca L. Borkowskiego *W sprawie intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza*[3]. Niniejszy artykuł podejmuje zagadnienie analizowane we wskazanych pracach. Przedstawię w nim dalsze trudności, do jakich musi prowadzić próba Słupeckiego, a o których nie wspomniał Borkowski. Następnie omówię poprawioną przez Borkowskiego czterowartościową wersję systemu Łukasiewicza oraz porównam tę próbę z pewnymi uwagami, dotyczącymi pojęć modalnych, podanymi przez „późnego" Łukasiewicza.

W omawianym artykule Słupecki podał formalne ujęcie intuicyjnych podstaw systemu Ł3 wyrażonych głównie w artykule *O determinizmie*. Słupecki podejmuje próbę usystematyzowania tej argumentacji, polegającą na sformułowaniu pewnych założeń dotyczących zdarzeń, relacji opisywania zdarzenia przez zdanie i związku przyczynowego, a następnie na podstawie tych założeń oraz definicji udowodnieniu pewnych twierdzeń o związkach wyrażonych w tabelkach funktorów systemu Ł3.

W systemie Słupeckiego używa się zmiennych f, f_1, f_2 jako zmiennych przebiegających zbiór wszystkich zdarzeń, zmiennej g jako zmiennej przebiegającej

---

[1] Por. J. S ł u p e c k i, *Próba intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza*, [w:] *Rozprawy logiczne. Księga Pamiątkowa ku czci K. Ajdukiewicza*, pod. red. T. Kotarbińskiego, Warszawa 1964, s. 185-191.

[2] Por. J. S ł u p e c k i, G. B r y l l, T. P r u c n a l, *Some Remarks on Three-valued Logic*, „Studia Logica", 21(1967), s. 45-66.

[3] „Roczniki Filozoficzne", 25(1978), z. 1, s. 61-68.

zbiór wszystkich zdarzeń minionych lub z chwili obecnej, wyrażenia „$p * f$” jako wyrażenia stwierdzającego, że zdanie „p” opisuje zdarzenie f, wyrażenia „$f \mapsto f_1$” jako wyrażenia stwierdzającego, że zdarzenie f jest przyczyną zdarzenia f_1, a znaków: „+”, „·”, „’” jako znaków sumy, iloczynu i dopełnienia zdarzeń.

Za pomocą tych oznaczeń zapisuje się założenia[4]:

1. $\forall p\ \exists f\ (p * f)$

Zmienne zdaniowe reprezentują wyłącznie zdania o zdarzeniach.

2. $(p * f) \wedge (p_1 * f_1) \rightarrow (App_1 * f + f_1)$
3. $(p * f) \wedge (p_1 * f_1) \rightarrow (Kpp_1 * f \cdot f_1)$
4. $(p * f) \rightarrow (Np * f')$

Alternatywa, koniunkcja i negacja opisują odpowiednio sumę, iloczyn i dopełnienie zdarzeń.

5. $(f \mapsto f_1 + f_2) \equiv (f \mapsto f_1) \vee (f \mapsto f_2)$
6. $(f \mapsto f_1 \cdot f_2) \equiv (f \mapsto f_1) \wedge (f \mapsto f_2)$

Zdarzenie jest przyczyną sumy zdarzeń wtedy, gdy jest przyczyną jednego z tych zdarzeń, a przyczyną iloczynu zdarzeń, gdy jest przyczyną każdego z nich.

7. $\exists f\ (f \mapsto f_1\ ) \rightarrow \sim\exists f\ (f \mapsto f_1\ ')$

Posiadanie przez zdarzenie przyczyny wyklucza istnienie przyczyny zdarzenia przeciwnego.

8. $(f \mapsto f) \rightarrow (f_1 \cdot f_2 \mapsto f)$

Jeśli pewne zdarzenie f_1 jest przyczyną zdarzenia f, to iloczyn zdarzenia f_1 i dowolnego zdarzenia f_2 jest przyczyną zdarzenia f. Wyrażenie to ma wyrażać konieczność stosunku przyczynowego; po przyczynie skutek występuje niezawodnie.

Prócz powyższych założeń przyjmuje się następujące definicje:

Df1. $D(f) \equiv \exists y\ (g \mapsto f)$

Zdarzenie f jest zdeterminowane, gdy istnieje fakt miniony lub z chwili obecnej, który jest jego przyczyną.

Df2. $-D\ (f) \equiv \sim D(f) \wedge \sim D(f')$

Zdarzenie f jest niezdeterminowane, gdy nieprawdą jest, że zdarzenie to jest zdeterminowane i nieprawdą jest, że zdeterminowane jest zdarzenie przeciwne.

Df3. $(p * f) \rightarrow [1(p) \equiv D(f)]$ „$1(p)$” = „p jest prawdziwe”
Df4. $(p * f) \rightarrow [0(p) \equiv D(f')]$ „$0(p)$” = „p jest fałszywe”
Df5. $(p * f) \rightarrow [1/2(p) \equiv -D(f)]$ „$1/2(p)$” = „p ma trzecią wartość logiczną”

Ze wzoru 7. i definicji Df1 wynika wzór:

---

[4] Choć założenia Słupeckiego były cytowane we wzmiankowanym artykule Borkowskiego, przytoczymy je ponownie ze względu na to, że analizy nasze są bezpośrednio z tymi założeniami związane.

$D(f) \to \sim D(f')$

z którego z kolei wynika wyrażenie

$D(f) \veebar D(f') \veebar [\sim D(f) \wedge \sim D(f')]$, gdzie „$\veebar$” jest symbolem alternatywy rozłącznej, z tego zaś wzoru wynika z kolei po zastosowaniu definicji Df3-5 wzór:

10. $[1(p) \veebar 0(p) \veebar 1/2(p)] \wedge \sim[1(p) \wedge 0(p) \wedge 1/2(p)]$

Każde zdarzenie ma jedną z trzech wartości logicznych, przy czym nie jest tak, że jakieś zdarzenia ma więcej niż jedną wartość logiczną. Ze wzorów 6. i 8. oraz z założenia, że iloczyn dwóch zdarzeń z chwili obecnej lub minionych jest zdarzeniem z chwili obecnej lub minionym, wynika wzór:

11. $\exists g\ (g \rightarrowtail f \cdot f_1) \equiv \exists g\ (g \rightarrowtail f) \wedge \exists g\ (g \rightarrowtail f_1)$

Z powyższych wzorów Słupecki wyprowadza wzory na wartość trójwartościowej alternatywy (Tw 1), koniunkcji (Tw 2) i negacji (Tw 3). Jednakże za pomocą funktorów *A, K, N* nie można zdefiniować funktora trójwartościowej implikacji, jako że funktor implikacji przyjmowany w logice trójwartościowej jest słabszy od jego dwuwartościowego odpowiednika. W logice dwuwartościowej definicja alternatywy jest następująca: *Apq* = *CNpq*, przy czym można łatwo sprawdzić, że jeśli rozpatrywane są tylko dwie wartości logiczne (gdybyśmy z tabelki trójwartościowej usunęli wartość 1/2), definicja ta jest równoważna definicji „trójwartościowej”, czyli *Apq* = *CNpq* = *CCpqq*. W trójwartościowej logice natomiast obie te definicje nie są równoważne, bowiem dla $p = q = 1/2$ (dla skrócenia będziemy pisać np. $p = 1/2$ zamiast $v(p) = 1/2$) mamy:

$CNpq = CN1/2\ 1/2 = C\ 1/2\ 1/2 = 1$

podczas gdy

$CCpqq = CC1/2\ 1/2\ 1/2 = C1\ 1/2 = 1/2.$

To, że funktor implikacji jest słabszy w systemie trójwartościowym niż jego dwuwartościowy odpowiednik, łatwo sprawdzić. *CNpq* jest w dwuwartościowym systemie równoważne *Apq*, podczas gdy w systemie trójwartościowym zachodzi jedynie implikacja w jedną stronę, tzn. *ANpq* implikuje *Cpq*, ale nie odwrotnie ($CCpqANpq = CC1/2\ 1/2\ AN1/2\ 1/2 = CC1/2\ 1/2\ A1/2\ 1/2 = C1\ 1/2 = 1/2$). Podobnie *Apq* definiowane w terminach implikacji nie jest równoważne *CNpq*, ale jest nieco mocniejsze. Aby więc zdefiniować *Apq* w terminach *C*, trzeba funktora „trochę mocniejszego” niż *CNpq*. Lub raczej wymagamy funktora, który jest nieco mocniejszy od *CNpq* w trójwartościowej logice, ale który jest jemu równoważny w logice dwuwartościowej. Jest to subtelny problem, a jego rozwiązanie jest pomysłowe[5].

Procedurą, która zwykle służy do wzmocnienia siły logicznej zdania implikacyjnego, jest osłabienie jego poprzednika. W tym wypadku Łukasiewicz musiał

[5] Por. A. P r i o r, *Three-valued Logic and Future Contingents*, „The Philosophical Quarterly”, 3(1953), s. 320.

znaleźć takie wyrażenie zdaniowe, które jest słabsze od *Np*. Formą tą, słabszą od *Np*, okazało się *Cpq*, ponieważ zarówno w logice dwuwartościowej, jak i w trójwartościowej „nie-*p*” implikuje „Jeśli *p*, to *q*” bez względu na to, jakie jest *q*, ale nie zawsze „nie-*p*” jest przez *Cpq* implikowane[6].

Innym argumentem wskazującym na względną słabość relacji reprezentowanej w Ł3 przez funktor *C* jest fakt, że jeśli rozpatrujemy siłę logiczną wyrażenia *CNpp* („Jeśli nie-*p*, to *p*”), to możemy w logice dwuwartościowej stwierdzić, że jeśli zdanie jest implikowane przez swoją negację, to jest ono prawdziwe (*consequentia mirabilis*, czyli *CCNppp*). Podobnie zachodzi też zależność odwrotna: ⊢*CpCNpp*, czyli w logice dwuwartościowej mamy tezę *ECCNpppCpCNpp*. Inaczej natomiast jest w logice trójwartościowej, gdzie owszem zachodzi *CpCNpp* (bo dla *p* = 1/2 mamy *C* 1/2 *C* 1/2 1/2 = 1), ale nie jest tezą *CCNppp* (bo dla *p* = 1/2 mamy *CCN*1/2 1/2 1/2 = *C*1/2 1/2 = 1/2).

Powyższe analizy związków między siłą funktorów w logice dwuwartościowej i w systemie Ł3 pokazują, że znaczenia poszczególnych funktorów w obu tych logikach różnią się. Znajduje to wyraz w tym, że pewne trójwartościowe odpowiedniki tez logiki klasycznej nie są tezami systemu Ł3. Oto kilka takich przypadków:

a) odpowiednik zasady wyłączonego środka:
ApNp (bo dla *p* = 1/2, *A* 1/2 1/2 = 1/2),
b) odpowiednik prawa niesprzeczności:
NKpNp (bo dla *p* = 1/2, *NK* 1/2 1/2 = *N* 1/2 = 1/2),
c) odpowiednik prawa Claviusa (patrz powyższe analizy),
d) postać koniunkcyjna prawa sylogizmu warunkowego:
CKCpqCqrCpr, gdyż dla *p* = 1, *q* = 1/2, *r* = 0 mamy
CKC 1 1/2 *C* 1/2 0 *C* 1 0 = *CK* 1/2 1/2 0 = *C* 1/2 0 = 1/2,
e) odpowiednik *modus ponens*:
CKCpqpq, bo dla *p* = 1/2, *q* = 0 mamy *CKC*1/2 0 1/2 0 = *CK* 1/2 1/2 0 = = *C*1/2 0 = 1/2,
f) fałszywy w systemie Ł3 jest np. odpowiednik tezy dwuwartościowej, stwierdzający fałszywość równoważności dwóch zdań sprzecznych:
NEpNp, bo dla *p* = 1/2 mamy *NE* 1/2 *N* 1/2 = *N*1 = 0.

Oczywiście, ponieważ matryce Ł3 są tak skonstruowane, że jeśli pominiemy w nich wszystkie argumenty o wartościach innych niż 1 i 0, matryce te przechodzą w matryce dwuwartościowe, wszystkie tezy Ł3 są tezami logiki klasycznej.

Za pomocą samych funktorów *A*, *K*, *N* nie można zbudować żadnej tezy systemu Ł3. Dlatego trzeba rozszerzyć bazę intuicyjną systemu o założenia

[6] W logice dwuwartościowej oba te wyrażenia są równoważne, czyli ⊢*ENpCpq*, co umożliwia równoważność obu definicji alternatywy, czyli ⊢*ECNpqCCpqq*; por. tamże, s. 321.

dotyczące funktorów modalnych, które to wzbogacenie wystarcza do zdefiniowania w systemie funktora implikacji. Słupecki przyjmuje więc założenia:

12. $(p * f) \rightarrow [1(Lp) \equiv D(f)]$
13. $(p * f) \rightarrow [0(Lp) \equiv {\sim}D(f)]$
14. $(p * f) \rightarrow [1(Mp) \equiv {\sim}D(f')]$
15. $(p * f) \rightarrow [0(Mp) \equiv D(f')]$

z których oczywiście wynikają znane nam matryce dla funktorów konieczności i możliwości. W omawianym artykule Słupecki nie definiuje jednak funktora implikacji. Charakterystyka matrycowa implikacji jest podana w późniejszym rozszerzeniu artykułu Słupeckiego[7]. Tam też podano aksjomatykę systemu o terminach pierwotnych *A*, *K*, *N*, *L*, *M*, w której wprowadzono funktor *F* definiowany jako skrót wyrażenia *ANL*, czyli *Fpq = df ANLpq*, który to funktor można interpretować jako pewnego rodzaju implikację. Do zagadnienia jego interpretacji wrócimy niżej. Tymczasem poddajmy analizie powyższą interpretację Słupeckiego.

1. L. Borkowski w artykule *W sprawie intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza* zwraca uwagę na konsekwencje przyjęcia założenia 8.; jeśli f ma przyczynę w f_1, to $f_1 \cdot f_2 \rightarrowtail f$. Tak więc o ile za f_2 podstawimy f_1', wtedy otrzymamy, że zdarzenie niemożliwe $f_1 \cdot f_1'$ jest przyczyną zdarzenia f, co jest nie do przyjęcia. W związku z tym Borkowski, aby wyrazić twierdzenie, że po przyczynie skutek występuje niezawodnie, proponuje zastąpić założenie 8. przez:

b) $(p_1 * f_1) \wedge (p * f) \rightarrow ((f_1 \rightarrowtail f) \rightarrow (p_1 \rightarrow p))$,

z którego wynika wyrażenie:

c) $(p_1 * f_1) \wedge (p_2 * f_2) \wedge (p * f) \rightarrow [(f_1 \rightarrowtail f) \rightarrow (p_1 \wedge p_2 \rightarrow p)]$[8].

Wyrażenie b) można, zdaniem Borkowskiego, odczytać następująco: jeśli f_1 jest przyczyną f, to jeśli istnieje f_1, to istnieje f. Jednak w dowodach przeprowadzonych przez Słupeckiego wyrażenie b) nie może zastąpić założenia 8. Z kolei, zauważa Borkowski, 8. było wykorzystywane przez Słupeckiego do dowodzenia wyrażenia 11., które, jego zdaniem, nie budzi zastrzeżeń natury intuicyjnej. Dlatego Borkowski proponuje zamiast 8. przyjąć jako założenie pierwotne wyrażenie 11. (które nie jest na gruncie pozostałych założeń równoważne 8.).

2. Jednakże, jak się wydaje, można wskazać inne mankamenty interpretacji Słupeckiego. Przede wszystkim wnioski z założenia 8. nie powinny budzić zdziwienia, gdyż założenia nie zawierające kwantyfikatorów, dotyczące związku przyczynowego są odpowiednikami tez klasycznego rachunku zdań (o ile zinter-

[7] Por. S ł u p e c k i, B r y l, P r u c n a l, art. cyt.

[8] Użyta przez Borkowskiego symbolika sugeruje, że wyrażenia b), c) są wyrażeniami logiki dwuwartościowej.

pretować funktor „$\rightarrowtail$" jako funktor implikacji, a zmienne reprezentujące zdarzenia jako zmienne zdaniowe)[9]. Jednakże wątpliwości zdaje się budzić i wyrażenie c). Po podstawieniu bowiem $p_2/{\sim}p_1$ otrzymujemy:

$(p_1{*}f_1) \wedge (Np_1{*}f_1') \wedge (p{*}f) \rightarrow [(f_1 \rightarrowtail f) \rightarrow (p_1 \wedge {\sim}p_1 \rightarrow p)]$.

Ponieważ wyrażenie „$p_1 \wedge {\sim}p_1 \rightarrow p$" jest tezą logiki, więc następnik wyrażenia c) jest prawdziwy bez względu na wartość logiczną wyrażenia „$f_1 \rightarrowtail f$", a jest to chyba niezgodne z intencjami Borkowskiego. Kolejny zarzut pod adresem interpretacji Słupeckiego dotyczy założeń 2. oraz 3. Weźmy 2.:

$(p * f) \wedge (p_1 * f_1) \rightarrow (App_1 * f + f_1)$.

Niech $p_1 = Np$, wtedy (na mocy 4.)

$(p * f) \wedge (Np * f') \rightarrow (ApNp * f + f')$.

Przy założeniu, że $-D(f)$ mamy p=1/2 i wtedy:

$(1/2 * f) \wedge (1/2 * f') \rightarrow (A\ 1/2\ 1/2 * f + f')$. Ale $f + f'$ jest zdarzeniem koniecznym, a A 1/2 1/2 = 1/2, a więc nie powinna opisywać zdarzenia koniecznego. Podobne konsekwencje można wyprowadzić z założenia 3.: Jeśli $p = 1/2$, $Np = 1/2$, wtedy $(p * f) \wedge (Np * f') \rightarrow (Kp\ Np * f \cdot f')$; ale K 1/2 1/2 = 1/2, a zdarzenie $f \cdot f'$ jest zdarzeniem niemożliwym. Z tego wynika, że logika trójwartościowa opisuje jakąś inną niż klasyczna (Boole'owska) przestrzeń zdarzeń[10].

Z kolei jeśli weźmiemy funktor implikacji, którego matrycę podano w pracy Słupeckiego, Brylla i Prucnala, to budzi ona wątpliwości natury intuicyjnej. Omawiani autorzy traktują funktor implikacji jedynie jako skrót dla wyrażenia *ANLpq*, czyli niekoniecznie *p* lub *q*, i nie poddają sensu tego wyrażenia żadnej dyskusji. Trudno jednak uznać ten funktor za funktor implikacji. Matryca funktora *F* jest następująca:

F	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1	1	1
1	0	1/2	1

[9] Założenie 8. odpowiada tezie $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$, z której po podstawieniu $r/{\sim}p$ otrzymujemy $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge {\sim}p \rightarrow q)$.

[10] Do podobnego rezultatu od strony formalnej doszedł M. Nowak, który wykazał, że interpretacja Słupeckiego jest poprawna jedynie przy założeniu, że struktura Z = (Z, +, ·, ') jest kratą de Morgana nie będącą algebrą Boole'a. „Ten wynik nie deprecjonuje jednak propozycji Słupeckiego, lecz przeciwnie, czyni ją bardziej godną uwagi: trójwartościową logikę można w przedstawiony sposób interpretować jako logikę zdań opisującą zdarzenia tworzące algebrę nieklasyczną. Jeśli tak, to z definicji 5) [u nas 3. – uwaga M. L.] można «wyczytać», że trzecia wartość Łukasiewicza 1/2 przyporządkowana jest zdaniom opisującym nieboole'owskie zdarzenia niezdeterminowane". Zob. G. M a l i n o w s k i, *Logiki wielowartościowe*, Warszawa 1990, s. 34-35 oraz M. N o w a k, *O możliwości interpretowania trójwartościowej logiki Łukasiewicza metodą J. Słupeckiego*, „Acta Universtitatis Lodziensis", Folia Philosophica, 5(1988), s. 3-13.

Wątpliwości budzi szczególnie wartość *Fpq* dla p=1/2, q=0. Mamy wtedy F1/2 0 = 1, co nie spełnia zwykłego warunku stawianego implikacji, głoszącego, iż implikacja, w przypadku gdy wartość następnika jest mniejsza od wartości poprzednika, nie może być uznana (czyli że następnik nie może być „dalszy od prawdy" niż poprzednik). Oczywiście tak zdefiniowana implikacja różni się zasadniczo od implikacji w systemie Ł3; matryca dla F sprawdza więcej wyrażeń niż matryca dla C w Ł3; np. sprawdza wyrażenie *FKpqFqrFpr* czy też *FKFpqpq*, których odpowiedniki w Ł3 nie są tezami. Dlatego przedwczesna wydaje się uwaga Borkowskiego, że w ten sposób (tzn. w systemie Brylla i Prucnala) unika się kwestii związanych z sensem intuicyjnym implikacji trójwartościowej[11].

Powyżej scharakteryzowaną próbę wyprowadzenia systemu trójwartościowej logiki zdań z wyraźnie sformułowanych założeń Borkowski ocenia pozytywnie (po uwzględnieniu modyfikacji założenia 8.). Jednakże formalizacja Słupeckiego bardzo dobrze uwidacznia podstawową wadę intuicyjną systemu Łukasiewicza (co, niestety, nie zostało zauważone ani przez Borkowskiego, ani przez Słupeckiego). Otóż wyprowadzone powyżej konsekwencje założeń 2. i 3. dla zdarzeń sprzecznych ujawniają fakt, że trójwartościowa koniunkcja i alternatywa nie opisują trafnie dwuwartościowego świata zdarzeń. Dla zdarzeń dopełniających się suma tych zdarzeń jest zdarzeniem koniecznym, a więc alternatywa opisujących je zdań winna być prawdziwa (zdarzenie konieczne jest zdeterminowane), podczas gdy iloczyn zdarzeń dopełniających się jest zdarzeniem niemożliwym, a więc zdanie opisujące to zdarzenie winno być fałszywe.

Te niekonsekwencje są, jak to wynika z analiz Priora, wynikiem pomieszania przez Arystotelesa, którego argumentację usiłował formalnie zapisać Łukasiewicz, dwóch koncepcji zdania (jego prawdziwości), co pociąga za sobą wymóg traktowania alternatywy (koniunkcji) jako funkcji nieekstensjonalnej. Wydaje się, że Arystoteles i średniowieczni autorzy dysponowali innym niż współczesne pojęciem zdania prawdziwego. Wskazują na to m.in. Prior, Acrill i Patzig. Według Priora „terminy «zdanie» (*proposition*) i «prawdziwy» są współcześnie używane w taki sposób, że nie możemy mówić o wartości prawdziwościowej zdania jako o zmieniającej się z upływem czasu. U starożytnych i średniowiecznych autorów dominowało jednak takie użycie tych terminów, że logicy mogli mówić o zdaniu «Sokrates siedzi» jako o zdaniu prawdziwym w tych chwilach, gdy Sokrates rzeczywiście siedzi, i że zdanie to jest fałszywe we wszystkich tych razach, w których Sokrates rzeczywiście nie siedzi (na przykład gdy wstał). I co ważniejsze, Arystoteles mówi o pewnych zdaniach o przyszłości, że nie są te zdania w chwili wystąpienia ani prawdziwe, ani fałszy-

[11] Por. B o r k o w s k i, art. cyt., s. 63.

we na podstawie tego, że nie nastąpił jeszcze określony fakt, z którym one mogłyby pozostawać w zgodzie lub być w konflikcie”[12]. A ponieważ zdania korespondują z faktami, czyli ich prawdziwość lub fałszywość opiera się na ich relacji do faktów, to jest oczywiste, że „jeśli w przyszłych zdarzeniach jest alternatywa i możliwość w przeciwnych kierunkach, korespondująca afirmacja lub negacja mają taki sam charakter, tzn. mają możliwość bycia prawdziwymi i bycia fałszywymi, ale nie są takimi aktualnie”[13]. Zdaniem Priora Arystoteles mocował się z zasadniczą trudnością. Czy jest możliwe utrzymywać naraz, że:

(a) to, czy będzie, czy nie będzie jutro bitwa morska, jest jako takie pierwotnie niezdeterminowane;

(b) że jest już albo definitywnie prawdziwe, albo definitywnie fałszywe, że bitwa morska jutro się odbędzie (innymi słowy: czy mogą być zdania w „bezczasowym (atemporalnym)” sensie o tego typu zdarzeniach), ponieważ to, co jest faktem, już przeszło z dziedziny alternatywnych możliwości do dziedziny tego, co nie może być zmienione. Natomiast konsekwentne trwanie przy jednej koncepcji zdania od razu ujawnia trudności intuicyjne, z którymi „zmagał się” Arystoteles.

W związku z tymi problemami Borkowski podejmuje zadanie poprawienia założeń intuicyjnych logiki trójwartościowej Łukasiewicza. Dlatego proponuje poszerzyć definicję zdarzenia zdeterminowanego (koniecznego i niemożliwego). Tak więc mamy:

Df1’. $D(f) \equiv \exists f_1\ (f = f_1 + f_1') \vee \exists \mathrm{g}\ (\mathrm{g} \mapsto \mathrm{f})$

z tej definicji otrzymać można:

$D(f') \equiv \exists f_1\ (f = f_1 \cdot f_1') \vee \exists g (g \mapsto f')$

Oczywiście po takich modyfikacjach nie można już wyprowadzić wyżej wspomnianych konsekwencji założeń (2), (3). Mamy bowiem:

$$-\mathrm{D}(f) \equiv {\sim} D(f) \wedge {\sim} D(f') \equiv {\sim}\exists f_1\ (f = f_1 + f_1') \wedge {\sim}\exists g\ (g \mapsto f) \wedge$$
$$\wedge {\sim}\exists f_1\ (f = f_1 \cdot f_1') \wedge {\sim}\exists g\ (g \mapsto f_1)$$

czyli zdania opisujące zdarzenia, które nie mają ani wartości 1, ani wartości 0, można podzielić na dwie rozłączne klasy w następujący sposób: Jeśli jakieś zdanie należy do jednej z tych klas, to jego negacja należy do drugiej. Koniunkcja dwóch zdań należących do tej samej klasy należy do tej samej klasy. Koniunkcja dwóch zdań należących do różnych klas jest fałszywa. Alternatywa dwóch zdań należących do tej samej klasy należy do tej samej klasy. Alternatywa dwóch zdań należących do różnych klas jest prawdziwa. Zdania należące do jednej z tych klas niech mają wartość 2, a zdania należące do drugiej

[12] Zob. P r i o r, *Three-valued Logic*, s. 322.

[13] Tamże, s. 323.

mają wartość 3. Jednak w ten sposób otrzymujemy matryce czterowartościowe (gdzie „4” reprezentuje „fałsz”):

K	1	2	3	4	*N*	*M*	*L*
1	1	2	3	4	4	1	1
2	2	2	4	4	3	1	4
3	3	4	3	4	2	1	4
4	4	4	4	4	1	4	4

A	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

a dla funktora implikacji zdefiniowanego $Cpq = NKpNq$ matrycę

C	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

i dla równoważności $Epq = KCpqCqp$

E	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	4	3
3	1	4	1	2
4	4	3	2	1

Matryca ta sprawdza wszystkie tezy S5, pokrywa się dla *C* i *N* z matrycą systemu Ł-modalnego. Matryce dla *A*, *K*, *N*, *C* można otrzymać przez mnożenie przez siebie dwóch matryc dwuwartościowych, sprawdzają więc one wszystkie tezy klasycznego rachunku zdań. Natomiast, wskazuje Borkowski, funktory *L*, *M* są nieekstensjonalne w tak skonstruowanym systemie w tym sensie, że dla $p = 3$, $q = 4$ wyrażenie (1) *CEpqEMpMq* nie przyjmuje wartości wyróżnionej (*CE*34*CM*3*M*4 = *C*2*E*14 = *C*24 = 3). Podobnie dla $p = 1$, $q = 2$ wyrażenie (2) *CEpqCLpLq* = 2. Trzeba jednak wskazać, że w tak mocnym sensie ekstensjonalności nie są również ekstensjonalne funktory *L*, *M* w systemie Ł3. Odpowiedniki bowiem wyrażeń (1), (2) nie są sprawdzane przez matryce Ł3 (dla $p = 1$, $q = 1/2$ *CEpqELpLq* = *CE* 1 1/2 *EL*1 *L*1/2 = *C* 1/2 *E*1 0 = *C* 1/2 0 = 1/2. Podobnie dla $p = 1/2$, $q = 0$ mamy *CE* 1/2 0 *E M*1/2 *M*0 = C 1/2 0 =

= 1/2[14]. Jednakże oba te funktory, zarówno w jednym jak i w drugim z systemów, są ekstensjonalne, co podkreślał w sposób bardzo mocny Łukasiewicz, w tym sensie, że są prawdziwościowe, to znaczy, że wartość logiczna wyrażenia utworzonego przy ich pomocy jest wyznaczona wyłącznie przez wartości logiczne ich argumentów.

Podsumowując powyższe uwagi można stwierdzić, że system skonstruowany przez Borkowskiego różni się w sposób istotny od systemu Ł3, choć pewne z jego cech posiada. Zasadniczą różnicą jest to, że matryce systemu Borkowskiego są klasyczne i wielowartościowość ma w nich charakter formalny. Tak więc wszystkie tezy klasycznego rachunku zdań są przez te matryce sprawdzane. Obowiązuje więc także zasada niesprzeczności i zasada wyłączonego środka. Implikacja zachowuje cechę, że wartość poprzednika nie może być bliższa wartości wyróżnionej niż wartość następnika (w przeciwieństwie do matrycy funktora *F* w systemie Brylla i Prucnala). Podobieństwo do Ł3 jest także zachowane w charakterystyce funktorów modalnych. Zarówno konieczność, jak i możliwość jest charakteryzowana w obu tych systemach w podobny sposób: zdanie jest możliwe zawsze wtedy, gdy nie jest fałszywe, a konieczne tylko wtedy, gdy jest prawdziwe. Tak więc konieczność i możliwość w systemie Borkowskiego, podobnie jak u Łukasiewicza, nie jest koniecznością i możliwością logiczną. Na różnicę między pojęciami Ł-modalnymi a modalnościami logicznymi zwraca w sposób bardzo wyraźny uwagę Prior, który stwierdza, że „ważne jest odróżnienie pojęcia konieczności, które jest wyrażone przez jednoargumentowy funktor *L* (taki, że dla $p = 1$, $Lp = 1$, a dla $p = 1/2 = 0$ $Lp = 0$ – tak jest w systemie Ł3) od konieczności, która dotyczy praw logiki. Ta ostatnia bowiem nie może w żadnym systemie być funkcją prawdziwościową. Jest ona raczej konsekwentną charakterystyką pewnych funkcji prawdziwościowych dotyczącą faktu, że wszystkie funkcje prawdziwościowe zbudowane w ten sam sposób bez względu na wartości logiczne ich argumentów są prawdziwe”[15].

Podobne do analiz Borkowskiego analizy przeprowadził sam Łukasiewicz w swoich późniejszych pracach[16]. W *Sylogistyce Arystotelesa* Łukasiewicz wygło-

---

[14] U Łukasiewicza tezami są natomiast wyrażenia: *CCpqCMpMq* oraz *CCpqCLpLq*.

[15] Można to prześledzić na przykładzie. Zdanie: „Jest logicznie konieczne, że jeśli Sokrates umarł, to Sokrates umarł” jest prawdziwe bez względu na to, czy jego argument: „Sokrates umarł” jest prawdziwy, czy nie; jest ono prawdziwe ze względu na to, że koniecznościowaniu podlega implikacja o formie $p \to p$. Inaczej jest ze zdaniem *L* („Jeżeli Sokrates umarł, to Sokrates umarł”), które jest prawdziwe dokładnie dlatego, że zdanie „Sokrates umarł” jest prawdziwe. Podobnie *L* („Sokrates umarł”) jest prawdziwe, choć zdanie „Sokrates umarł” nie jest podstawieniem prawa logiki; por. P r i o r, *Formal Logic*, s. 248.

[16] Por. J. Ł u k a s i e w i c z, *System logiki modalnej*, [w:] J. Ł u k a s i e w i c z, *Z zagadnień logiki i filozofii*, Warszawa 1961, s. 275-305; t e n ż e, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu*

sił pochwałę klasycznego rachunku zdań i wskazał, że właściwie zbudowana logika modalna powinna się na klasycznym rachunku zdań opierać: „Jestem zdania, że we wszelkiej logice modalnej należy zachować klasyczny rachunek zdań. Rachunek ten wykazał dotychczas wielką solidność i użyteczność i bez ważkich przyczyn nie należy go odkładać na bok. Na szczęście klasyczny rachunek zdań ma nie tylko jedną – dwuwartościową – matrycę adekwatną, lecz także i wielowartościowe. Spróbowałem zastosować do logiki modalnej najprostszą adekwatną matrycę – matrycę czterowartościową – i udało mi się otrzymać pożądany rezultat”[17]. Matryce systemu Łukasiewicza dla funktorów *N*, *K*, *A*, *C*, *E* są takie jak w systemie Borkowskiego, gdyż otrzymane są one z matryc logiki klasycznej przez mnożenie tych matryc przez siebie. Przy tym Łukasiewicz wskazuje, że wartości „2” i „3” można w tych matrycach traktować jako dalsze symbole prawdy i fałszu. Przy tym nie można wskazać, że jedna z nich jest bliższa prawdy, a druga fałszu. Jest obojętne, czy „2” czy „3” przyrównamy do „1”. Mamy więc np. gdy „2” zastąpimy „1”, a „3” zastąpimy przez „0”:

C	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	1	1

czyli otrzymujemy matryce klasycznej implikacji materialnej. Identyczną matrycę otrzymamy, gdy zastąpimy na odwrót „3” przez „1”, a „2” przez „0”. Natomiast w inny sposób są definiowane w systemie Łukasiewicza funktory konieczności i możliwości, przy czym w systemie Ł4 są dwa funktory możliwości. Pierwszy z nich jest określany w sposób następujący:
$M(a,b) = (Sa, Vb) = (a, Cbb)$, gdzie S = funktor asercji, V = funktor verum, „fałsz” jest oznaczany u Łukasiewicza przez „0”. Tak więc mamy:

p	*Mp*	czyli	*p*	*Mp*
(1,1)	(1,1)		1	1
(1,0)	(1,1)		2	1
(0,1)	(0,1)		3	3
(0,0)	(0,1)		0	3

widzenia współczesnej logiki formalnej, Warszawa 1988.

[17] T e n ż e, *Sylogistyka Arystotelesa*, s. 215.

i „bliźniaczy" do *M* funktor możliwości *W* określany przez matrycę:

p	Wp
1	1
2	2
3	1
0	2

natomiast dla funktora konieczności (*L* reprezentuje funktor konieczności, a Γ funktor względem niego „bliźniaczy":

p	LP
1	2
2	2
3	0
0	0

p	Γp
1	3
2	0
3	3
0	0

Oba więc systemy różnią się rozumieniem funktorów modalnych. Funktory modalne u Borkowskiego mają tę ważną intuicyjnie cechę, że zdania zbudowane za ich pomocą przyjmują tylko wartości klasyczne (jest to istotne przy ontologicznym nastawieniu badawczym[18]), podczas gdy funktory Łukasiewicza przybierają także wartości „nieklasyczne" – przy Arystotelesowskim sposobie ujmowania modalności tak być nie powinno – sugeruje to inny, bardziej epistemiczny charakter tych funktorów. Zwraca tu uwagę fakt konstruowania matrycy dla funktora możliwości przez Łukasiewicza poprzez mnożenie matryc dwuwartościowych. Funktory jednoargumentowe logiki czterowartościowej *M*, *L*, *W*, Γ traktowane są jako dwuargumentowe funkcje, których argumentami są dwuwartościowe funkcje Verum, Falsum, Asercja, Negacja.Takich funktorów czterowartościowych jest szesnaście[19].

[18] Mówiąc o ontologicznym nastawieniu, chcemy odpowiedzieć na pytanie „jaki jest świat?" bez względu na to, czy jest on przez kogoś poznawany i jak jest poznawany. Ontologiczne nastawienie towarzyszy np. logice klasycznej. Inaczej jest przy epistemologicznym podejściu. Interesują nas wtedy zdania jako poznane – zdanie w tym ujęciu reprezentuje nie tylko stan rzeczy, jak w ujęciu ontologicznym, lecz stan rzeczy wraz z procedurą jego poznania (skonstruowania); por. A. G r z e g o r c z y k, *Nieklasyczne rachunki zdań a metodologiczne schematy badania naukowego i definicje pojęć asertywnych*, „Studia Logica", 20(1967), s. 117-131.

[19] Tak więc mamy następujące pary:
$(Sa, Vb) = M(a, b)$

Rodzi się pytanie, jak intuicyjnie rozumieć tak określone funktory konieczności i możliwości. Gdyby zastosować zabieg taki, jak ten, który był stosowany w przypadku funktorów *N*, *K*, *A*, *C*, *E*, otrzymalibyśmy w systemie Borkowskiego po zastąpieniu „2” przez „1”, a „3” przez „0”:

p	Mp	i	p	Lp
1	1		1	1
1	1		1	0
0	1		0	0
0	0		0	0

oraz po zastąpieniu odwrotnym „3” przez „1”, a „2” przez „0”:

p	Mp	i	p	Lp
1	1		1	1
0	1		0	0
1	1		1	0
0	0		0	0

czyli w obu przypadkach ujawnia się swego rodzaju nieekstensjonalność funktorów *L, M*, które przyjmują dla tego samego argumentu fałszywego (funktor możliwości) raz wartość „1”, a raz „0” (a funktor konieczności zachowuje się w ten sam sposób dla argumentu prawdziwego). Natomiast w systemie Łukasiewicza mamy następującą sytuację (po zastąpieniu „2” przez „1”, a „3” przez „0”):

p	Mp	i	p	Lp
1	1		1	1
1	1		1	1
0	0		0	1
0	0		0	1

$(Sa,\ Nb)$
$(Sa,\ Fb) = L(a,\ b)$
....
$(Fa,\ Vb)$
$(Fa,\ Sb) = \Gamma(a,\ b)$
....
$(Va,\ Sb) = W(a,\ b)$
....
$(Na,\ Nb) = N(a,\ b)$

czyli Mp ma charakterystykę matrycową asercji, a Wp charakterystykę funktora verum p, a więc funktory te są „bardziej ekstensjonalne” niż funktory w systemie Borkowskiego. Dla funktorów konieczności zaś mamy:

p	Mp
1	1
1	1
0	0
0	0

i

p	Lp
1	0
1	0
0	0
0	0

a więc funktor konieczności przyjmuje charakterystykę dwuwartościowej asercji, a jego „bliźniak” – falsum dwuwartościowego[20].

Wydaje się więc, że funktory modalne w systemie Borkowskiego mają bardziej intuicyjną charakterystykę. Po pierwsze, mają „w pewnym stopniu” charakter nieekstensjonalny. Funktor możliwości ma cechę arystotelesowskiej możliwości: o ile wartości uporządkować w ten sposób, by „2” było bliższe prawdy niż „3”, a „3” bliższe prawdy niż „4”, to Mp jest prawdziwe, o ile p nie jest „całkowicie fałszywe”, a Lp jest prawdziwe tylko wtedy, gdy p jest „całkowicie prawdziwe”. Przy tym w systemie tym dopuszcza się istnienie zdań koniecznie prawdziwych. Natomiast całkowicie nieintuicyjne jest pojęcie możliwości i konieczności u Łukasiewicza. Zdania możliwe nigdy nie mogą być fałszywe, a zdania konieczne nigdy nie mogą być prawdziwe. Z tą ostatnią tezą wyraźnie solidaryzuje się Łukasiewicz, podkreślając ważność tego odkrycia, wskazującego, jego zdaniem, że żadne zdania apodyktyczne nie mogą być prawdziwe, czyli wskazując na niemożliwość wiedzy apodyktycznej. „Nie istnieją prawdziwe zdania apodyktyczne i z punktu widzenia logiki nie zachodzi różnica między prawdą matematyczną i empiryczną. Logikę modalną można opisać jako rozszerzenie logiki zwykłej przez wprowadzenie akceptacji «mocniejszej» i «słabszej». Akceptacja apodyktyczna Lp jest mocniejsza, a akceptacja problematyczna Mp słabsza od akceptacji asertorycznej p. Używając niezobowiązujących wyrażeń «mocniejsze» i «słabsze» zamiast «konieczne» i «kontyngentne» możemy uwol-

[20] Przy odwrotnym zastąpieniu („3” przez „1”, a „2” przez „0”) mamy

p	Mp	Wp	Lp	Γp
1	1	1	0	1
0	1	0	0	0
1	1	1	0	1
0	1	0	0	0

czyli ujawnia się w ten sposób „bliźniaczość” M względem W i L względem Γ. Mp przybrało wartości Wp, a Lp wartości Γp z poprzedniego wartościowania.

nić się od pewnych niebezpiecznych skojarzeń związanych z terminami modalnymi. Konieczność zawiera w sobie przymus, kontyngencja sugeruje przypadek. Uznajemy to, co konieczne, ponieważ czujemy się do tego zmuszeni. Ale jeżeli *La* jest tylko akceptacją mocniejszą niż *a*, i *a* jest prawdziwe, to dlaczego mielibyśmy uznawać *La*? Prawda jest wystarczająco silna i nie ma potrzeby wprowadzania «superprawdy» silniejszej niż prawda”[21].

Widzimy więc, że Łukasiewicz dokonał tu wyraźnej epistemizacji funktorów modalnych. Mamy hierarchię postaw epistemicznych:

– akceptacja apodyktyczna *Lp*, która na mocy matryc systemu Łukasiewicza nigdy nie ma miejsca,

– akceptacja asertoryczna *p*,

– akceptacja problematyczna *Mp*.

Natomiast trudno w sposób intuicyjny zinterpretować wartości poszczególnych tabelek. Wydaje się, że opierają się one na innym niż klasyczny (czyli podział zdań na prawdziwe i fałszywe) podziale zdań. Przy tym niejasny jest charakter wartości pośrednich między prawdziwością i fałszywością – nie jest wszakże tak, iż „2” jest bliższa prawdy, a „3” bliższa fałszu, choć po wzbogaceniu systemu Borkowskiego o funktory modalne okazuje się, że „2” wraz z „3” są bliższe prawdzie niż fałszowi (gdyż $Mp = 0$ tylko dla $p = 0$). Oczywiście, akceptując klasyczną definicję prawdy nie można dopuścić do uzupełnienia podziału zdań na prawdziwe i fałszywe (czyli zgodne z rzeczywistością i z nią niezgodne) o „nowe” wartości logiczne. Wydaje się więc, że jest tu zaangażowany inny podział zdań, przy czym sprawa nie jest tak prosta jak w przypadku systemu trójwartościowego[22].

Trzeba na koniec tego artykułu dodać, że próby modyfikacji systemu Ł3 dokonane zarówno przez Łukasiewicza, jak i przez Borkowskiego, aby uczynić ten system bardziej zgodnym z intuicjami, doprowadziły do tego, że zrezygnowano z konkurencyjnego charakteru tej logiki, a inne niż klasyczne wartości logiczne nie domagają się przyjęcia intuicji innych niż dwuwartościowe (gdyż

[21] Por. Ł u k a s i e w i c z, *Sylogistyka Arystotelesa*, s. 275. Wydaje się, że teza ta jest zgodna z instrumentalistycznym spojrzeniem na naturę logiki „późnego” Łukasiewicza. Wybór między systemami logicznymi jest podyktowany, jego zdaniem, użytecznością tych rachunków, natomiast nie można wskazać jednej logiki obowiązującej z konieczności; dlatego logika niczym istotnym nie różni się od nauk realnych.

[22] W systemie trójwartościowym zakładany jest, jak to pokazał Borkowski, podział zdań na dziś prawdziwe, dziś fałszywe i takie, które nie są dziś ani prawdziwe, ani fałszywe; por. L. B o r k o w s k i, *Kilka uwag o zasadzie dwuwartościowości i logikach nieklasycznych*, „Roczniki Filozoficzne”, 29(1981), z. 1, s. 9-14.

charakterystyki funktorów czterowartościowych mają u swych podstaw matryce dwuwartościowe)[23].

SOME REMARKS ABOUT ATTEMPTS OF INTUITIVE INTERPRETATION
OF ŁUKASIEWICZ'S THREE-VALUED LOGIC

S u m m a r y

This article presents some attempts of modification of Łukasiewicz's three-valued logic. Słupecki's attempt had some counterintuitive consequences its assumptions 2, 3, 4 and 8. Borkowski tried to eliminate those counterintuitive consequences. However, his system is four--valued one (it is a modification of Łukasiewicz's four-valued modal system) and its matrices are a result of multiplying of classical, two-valued matrices.

Summarized by Marek Lechniak

[23] W tym kierunku idą też inne próby interpretacji logik wielowartościowych, takie jak na przykład D. Scotta logika błędu czy czterowartościowa logika skonstruowana przez N. Belnapa jako baza dla „myślenia komputera". Por. D. S c o t t, *Does Many-valued Logic Have any Use*, [w:] S. K ö r n e r (red.), *Philosophy of Logic*, Oxford 1976 s. 64-74; N. B e l n a p, *How a Computer Should Think?*, [w:] *Contemporary Aspects of Philosophy*, Oxford 1976 s. 30-56; t e n ż e, *A Useful Four-valued Logic*, [w:] J. M. D u n n, G. E p s t e i n (red.), *Modern Uses of Multiple-valued Logic*, Dordrecht 1977, s. 5-37.