ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLIII, zeszyt 3 – 1995

ZENON EUGENIUSZ ROSKAL
Lublin

REALIZM WE WSPÓŁCZESNEJ FILOZOFII MATEMATYKI

WSTĘP

Bardzo ożywiona dyskusja[1], jaka obecnie toczy się w filozofii nauki wokół ontologiczno-epistemologicznych kontrowersji na osi realizm–antyrealizm, ma swoje głębokie źródła w filozoficznych sporach dotyczących istnienia i poznawalności przedmiotów niezależnych od podmiotu poznającego oraz statusu ontycznego desygnatów nazw ogólnych[2]. Inną wersją tego sporu, a filozoficznie bardziej podstawową[3], jest dyskusja toczona na gruncie filozofii matematyki[4]. O ile jednak opozycja realizm–antyrealizm na gruncie filozofii nauki jest przynajmniej w zasadzie czytelnie zarysowana i może być

[1] Jak żartobliwie zauważa J. Leplin we wstępie do zbioru artykułów pod jego redakcją (*Scientific Realism*. Berkeley–Los Angeles–London 1984) nowe zainteresowanie realizmem w filozofii nauki wzięło się z uwagi H. Putnama, w której stwierdza, że „realizm jest jedyną filozofią, która nie uznaje za cud sukcesów teorii naukowych" (tamże s. 1). Drobna modyfikacja tej tezy, która również jest autorstwa Putnama, pozwala na umieszczenie jej w kontekście filozofii matematyki.

[2] Por. P. M a d y, *Sets and Numbers*. „Noûs" 15:1981 s. 496.

[3] Takie stanowisko reprezentuje M. Dummett (*Truth and other Enigmas*. London 1978 s. 164).

[4] Problematyka realizm–antyrealizm na gruncie filozofii matematyki jest szczególnie eksploatowana. Świadectwem tego zainteresowania może być liczba publikacji w ostatnim czasie na ten temat. Przykładowo, nie licząc pojedynczych artykułów i ograniczając się tylko do monografii i zbiorów artykułów, można podać następujące pozycje: M. D u m m e t t. *Truth and other Enigmas*. Cambridge -Mas.) 1978; M. D e v i t t. *Realism and Truth*. Oxford 1984; A. A p p i a c h. *For Truth in Semantics*. Oxford 1986; H. P u t n a m. *The Many Faces of Realism*. La Salle 1987; C. W r i g h t. *Realism, Meaning and Truth*. Oxford 1987; G. V i s i o n. *Modern Anti-Realism and Manufactured Truth*. London 1988; R. W a l k e r. *The Coherence Theory of Truth. Realism, Anti-Realism, Idealism*. London 1989; P. M a d y. *Realism in Mathematics*. Oxford 1990.

odebrana jako kontynuacja opozycji realizm-instrumentalizm, o tyle w filozofii matematyki przeciwstawienie to jest o wiele mniej wyraźne[5]. Zatem próba przedstawienia jednego ze stanowisk w tym sporze musi być ograniczona do jednego nurtu w tej wielowątkowej dyskusji. Dlatego też rzeczą niezbędną jest zrelatywizowanie prowadzonych rozważań do określonej grupy prac[6], w których rozwija się konsystentną próbę aktualizacji stanowiska realistycznego. Ta wersja realizmu nazywana jest przez swoich przedstawicieli *strukturalizmem.*

Celem artykułu jest przedstawienie wybranych aspektów zaktualizowanego stanowiska realistycznego reprezentowanego przez M. Resnika, M. Steinera i S. Shapiro w kontekście jego klasycznych sformułowań (G. Frege, K. Gödel) oraz próba podania definicji realizmu funkcjonującego w ramach współczesnej[7] filozofii matematyki.

1. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA FILOZOFII MATEMATYKI

Matematyka od początku swojego istnienia zawsze budziła żywe zainteresowanie filozofów. Zarówno poszczególne problemy, jakie pojawiały się na gruncie matematyki, jak i sam fakt jej istnienia był źródłem rozlicznych inspiracji. Podstawowe problemy filozoficzne tj. zagadnienie wiedzy *a priori*, czy problem istnienia obiektów abstrakcyjnych (w tym zbiorów nieskończonych) pojawiły się w związku z praktyką matematyczną lub były filozoficzną eksplikacją pewnych kwestii stricte matematycznych. Szczególne zainteresowanie filozofów budziły te okresy w rozwoju matematyki, w których matematycy pod wpływem nowych idei (w tym często filozoficznych) kwestionowali

[5] Realizm (platonizm) lub jego zaktualizowana wersja (strukturalizm) przeciwstawiany jest zarówno fikcjonalizmowi (nominalizm), jak i intuicjonizmowi (zarówno w jego wersji standardowej jak i zliberalizowanej). Por. M. L i s t o n. *Taking Mathematical Fictions Seriously*. „Synthese" 95:1993 s. 433; D. J. V e l l e m a n. *Constructivism Liberalized*. „The Philosophical Review" 102:1993 s. 59.

[6] Uwzględniamy tu następujące prace: M. R e s n i k. *Mathematical Knowledge and Pattern Cognition*. „Canadian Journal of Philosophy" 5:1975 s. 25-39; t e n ż e. *Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference*. „Noûs" 15:1981 s. 529-550; t e n ż e. *Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology*. „Noûs" 16:1982 s. 95-105; t e n ż e. *Mathematics from the structural point of view*. „Revue Internationale de Philosophie" 4:1988 s. 400-424; M. S t e i n e r. *Mathematics, Explanations, and Scientific Knowledge*. „Noûs" 12:1978 s. 17-28; t e n ż e. *Mathematical Explanation*. „Philosophical Studies" 24:1978 s. 135-151; t e n ż e. *Mathematical Realism*. „Noûs 17:1983 s. 363-385; t e n ż e. *Mathematical Knowledge*. Ithaca–London 1975; S. S h a p i r o. *Mathematics and Reality*. „Philosophy of Science" 50:1983 s. 523-548.

[7] Jako cezurę oddzielającą stary okres badań w filozofii matematyki od nowego przyjmujemy tutaj twórczość Fregego.

ustalone poglądy na zakres i charakter badań matematycznych. Okresy takie pojawiały się na całej przestrzeni dziejów matematyki. Pierwszy można wiązać z kryzysem spowodowanym wykryciem niewymierności w szkole pitagorejskiej. Kolejne pojawiały się w związku z wprowadzeniem metod nieskończonościowych oraz geometrii nieeuklidesowych. Ostatni z wielkich kryzysów powstał w wyniku odkrycia antynomii teoriomnogościowych.

Obok tak spektakularnego zainteresowania matematyką w obszarze badań pojawia się systematyczna refleksja będąca próbą kompleksowej analizy matematyki. Badania takie prowadzone są w dwu zasadniczo odmiennych nurtach. W pierwszym badania prowadzone są za pomocą środków czysto matematycznych (teoria mnogości, algebra abstrakcyjna, teoria funkcji rekurencyjnych). Celem tych badań jest ustalenie podstawowych własności sformalizowanych teorii matematycznych takich, jak: aksjomatyzowalność, niesprzeczność, niezależność, zupełność, pełność, kategoryczność i rozstrzygalność. Ten składnik refleksji nad matematyką rozwija się bardzo dynamicznie i może odnotować znaczące sukcesy (twierdzenia limitacyjne, twierdzenie o pełności, twierdzenie o zwartości). W literaturze przedmiotu nazywa się go metamatematyką[8].

W drugim nurcie badań prowadzi się rozważania za pomocą metod i aparatury pojęciowej wypracowanej w filozofii. Po ukonstytuowaniu się w latach trzydziestych XX w. semantyki i uwzględnieniu czynnika pragmatycznego (w tym kulturowego) ze względu na charakter analizowanych problemów można wyróżnić następujące aspekty, czy też poziomy prowadzonych analiz: e p i s t e m o l o g i a, w której analizuje się m.in. zespół zagadnień dotyczących swoistości poznania matematycznego (problem wiedzy *a priori*, zagadnienie źródeł poznania matematycznego w kontekście innych typów poznania naukowego); o n t o l o g i a zajmująca się problematyką dotyczącą natury bytów matematycznych (sposoby istnienia obiektów matematycznych); s e m a n t y k a grupująca problemy dotyczące relacji pojęć, twierdzeń i teorii matematycznych do rzeczywistości empirycznej lub pozaempirycznej (spełnianie, zagadnienie prawdy, teorie referencji); m e t o d o l o g i a badająca poprawność metod stosowanych w matematyce, w tym centralny dla matematyki problem określenia kryteriów, jakie musi spełniać dowód, aby mógł być zaakceptowany przez społeczność matematyków (metody finitystyczne i infinitystyczne, zagadnienie konstruowalności); p r a g m a t y k a badająca relacje pomiędzy językiem matematyki a jego twórcami

[8] Bardziej precyzyjną eksplikację metamatematyki w kontekście filozofii matematyki można znaleźć w A. L e m a ń s k a. *Matematyka – metamatematyka – filozofia matematyki*. „Studia Philosophiae Christianae” 28:1992 s. 231-239.

i odbiorcami (m.in. problem kulturowych uwarunkowań twórczości matematycznej).

2. POJĘCIE REALIZMU

Z przedstawionych powyżej aspektów dla celów charakterystyki stanowiska realistycznego wybierzemy trzy: epistemologiczny, ontologiczny i semantyczny. Taki wybór jest o tyle sensowny, że pozwala z jednej strony na zminimalizowanie badanych aspektów, z drugiej zaś jest wystarczający do precyzyjnego przedstawienia stanowiska realistycznego. Przy takich założeniach realizm występuje w trzech postaciach:

1. Realizmu epistemologicznego (RE). Jest to stanowisko zakładające istnienie specjalnej władzy poznawczej, która umożliwia bezpośredni kontakt z realnie istniejącymi, pozaempirycznymi obiektami matematycznymi. Ten rodzaj poznania jest typem poznania *a priori* oraz jest niezależny od języka.

2. Realizmu ontologicznego (RO). Według tego stanowiska obiekty matematyczne istnieją realnie, ale nieempirycznie, tzn. pozaprzestrzennie i pozaczasowo.

3. Realizmu semantycznego (RS). W praktyce stanowisko to sprowadza się do akceptacji klasycznej koncepcji prawdy, a tym samym odrzucenia tzw. epistemicznych koncepcji prawdy. Jest to równoważne przyjęciu tezy, która stwierdza, że znaczenie zdania transcenduje jego warunki stwierdzalności lub też prawdziwość zdania transcenduje jego kryteria prawdziwości. Realizm semantyczny głosi również zasadę dwuwartościowości zdań (albo prawdziwe, albo fałszywe), która to zasada niekoniecznie musi być akceptowana na gruncie epistemicznych koncepcji prawdy. Koniunkcja tych trzech postaci realizmu daje wersję silną:

$$R_s = RE \wedge RO \wedge RS.$$

Zanegowanie jednej z postaci realizmu prowadzi do trzech wersji słabych:

$$R_{w1} = RE \wedge RO \wedge \sim RS$$
$$R_{w2} = RE \wedge RS \wedge \sim RO$$
$$R_{w3} = RO \wedge RS \wedge \sim RE$$

Ze względu na występujące zależności[9] pomiędzy poszczególnymi postaciami realizmu w praktyce istnieje również jedna wersja realizmu słabego:

$$R_w = RE \wedge RO \wedge \sim RS.$$

3. TRADYCYJNE I ZAKTUALIZOWANE KONCEPTUALIZACJE REALIZMU

Centralnym zagadnieniem dla tego typu problematyki jest zagadnienie wiedzy *a priori*. Spór prowadzony na osi aprioryzm–aposterioryzm ma swoje źródło w problematyczności istnienia wiedzy koniecznej i zarazem przedmiotowej (rzeczowej). Pewnym jego rozwiązaniem jest koncepcja wiedzy analitycznej[10]. Konieczność tej wiedzy byłaby ustanowiona na mocy konwencji i nie byłaby koniecznością rzeczową. Same konwencje byłyby zaś mniej lub bardziej arbitralne i zrelatywizowane do aspektu pragmatycznego.

Stanowisko realistyczne głoszące możliwość dotarcia do pozaempirycznej rzeczywistości matematycznej, odrzucając konieczność analityczną, tym samym przyjmuje istnienie syntetycznej wiedzy *a priori*. Tylko taka wiedza jest bowiem konieczna i rzeczowa zarazem. Żeby jednak wejść w posiadanie takiej wiedzy, musimy dysponować specjalną władzą poznawczą, którą na przestrzeni dziejów filozofii różnie nazywano oraz której przypisywano różne kwalifikacje[11]. Wzorcowym przedstawicielem realizmu w wersji silnej (R_s), a tym

---

[9] Bardziej pierwotny wydaje się bowiem realizm epistemologiczny RE ponieważ RE $\Rightarrow$ RO, ale równocześnie nie musi zachodzić RO $\Rightarrow$ RE. Można zatem przyjmować RO oraz równocześnie przeczyć RE. Często cytowanym przykładem tego stanu rzeczy na gruncie ogólnofilozoficznym jest filozofia E. Kanta, w której rzeczy same w sobie istnieją n i e z a l e ż n i e od podmiotu poznającego, ale przedmiot poznania z a l e ż y od podmiotu poznającego. Krytykę tej relacji przeprowadza J. Woleński (*Metamatematyka a epistemologia*. Warszawa 1993 s. 287-289). Jednakże jeżeli założymy, że przynajmniej niektóre kategorie obiektów matematycznych istnieją „naprawdę”, tzn. nie są tylko konstruktami podmiotu poznającego, oraz semantyczny charakter predykatów egzystencjalnych to *eo ipso* realizm ontologiczny jawi się jako konsekwencja podstawowej tezy realizmu epistemologicznego o niedefiniowalności semantyki w syntaktyce.

[10] Pojęcie wiedzy analitycznej i/lub odpowiednio zdań (sądów) analitycznych jest bardzo złożone choćby ze względu na różne konteksty, w jakich się pojawiało. Prowadzi to do nieuchronnej i notorycznej wieloznaczności terminu ‘wiedza analityczna’. Próby usystematyzowania różnych definicji zdań analitycznych podaje L. Borkowski (*Deductive Foundation and Analitic Propositions*. „Studia Logica” 19:1966 s. 59-72). Szeroko problematykę analityczności wiedzy omawia Woleński (jw. s. 116-170).

[11] U Arystotelesa była to *intelekcja*. Bardzo charakterystyczna dla innego nurtu filozofii jest koncepcja materialnego *a priori* rozwijana przez fenomenologów (E. Husserl, A. Reinach). Jest ona zbudowana na intuicji istoty i zależności esencjalnych. Zależności te ujmowane są w aktach ejdetycznych, które transcendują zarówno poznanie potoczne jak i naukowe. Odrębnym

samym jego postaci RE jest Kurt Gödel. Przyjmował on specjalny rodzaj intuicji, która była nie tylko intuicją *prawd matematycznych*, ale również intuicją *przedmiotów matematycznych*. Ten rodzaj intuicji był wzorowany na percepcji rzeczywistości empirycznej. Gödel zauważa[12], że nie ma żadnych powodów, aby sądzić, że ten rodzaj poznania jest mniej wartościowy, a wyniki otrzymane na tej drodze są mniej pewne niż bezpośrednie doświadczenie zmysłowe, na którym buduje się teorie fizyczne. Analogicznie do doświadczenia zmysłowego intuicja matematyczna nie może być kreatywna, tzn. nie może tworzyć obiektów o własnościach nie będących prostym zestawieniem własności danych uprzednio. Za jej pomocą można jedynie *odkrywać* rzeczywistość tak, jak za pomocą zmysłów można *oglądać* świat empiryczny.

Ten rodzaj bezpośredniego poznania *a priori* przyjmowany był też przez G. Fregego, a ostatnio został zaktualizowany przez Ch. Parsonsa. Jednakże koncepcja matematycznej intuicji prezentowana przez Parsonsa w poważnym stopniu ogranicza możliwości tego poznania, wyklucza m.in. te rezultaty, które otrzymuje się za pomocą indukcji matematycznej. W swojej pracy[13] wskazuje także na brak analogii pomiędzy percepcją zmysłową a intuicją matematyczną, polegający na różnicy, jaka wynika z tego, że zwykła percepcja jest wyrażana w języku naturalnym, a percepcja obiektów matematycznych w sztucznym języku matematyki.

Najczęściej jednak dyskutowanym zagadnieniem w filozofii matematyki jest problem statusu ontycznego jej obiektów. Stanowisko realistyczne najczęściej wyraża się w przyjmowaniu tezy o ich niezależnym istnieniu. Jednakże bardzo różnie precyzuje się tę ‘niezależność’. Tradycyjnie niezależne istnienie obiektów matematyki werbalizuje się w postaci twierdzenia głoszącego, że byty matematyczne są tworami pozaprzestrzennymi i pozaczasowymi, ale równocześnie nie redukują się do obiektów mentalnych. Takie sformułowanie rodzi rozliczne trudności. Pojawia się m.in. problem wyjaśnienia sposobu poznawczego dostępu do tak skonceptualizowanych obiektów. Bez przyjęcia specjalnej władzy poznawczej pozwalającej na kontakt podmiotu poznającego

---

typem jest intuicja przyjmowana przez intuicjonistów ze szkoły L. E. Brouwera i A. Heytinga. Nie jest to bowiem typ poznania umożliwiający bezpośredni kontakt z niezależnie istniejącymi obiektami matematycznymi, ale jedynie władza poznawcza pozwalająca konstruować te obiekty. Najczęściej przyjmowana jest intuicja dwujedności, która stwarza wszystkie skończone liczby porządkowe oraz najmniejszą liczbę nieskończoną, sama zaś jest oparta na aprioryczności czasu. Por. A. H e y t i n g. *The Intuitionist Foundations of Mathematics*. w: P. B e n a c e r r a f, H. P u t n a m. *Philosophy of Mathematics*. Cambridge 1983 s. 52-61.

[12] *What is Cantor's Continuum Problem?* W: P. B e n a c e r r a f, H. P u t n a m. *Philosophy of Mathematics*. Cambridge 1983 s. 470-484.

[13] *Mathematical Intuition*. „Proceedings of the Aristotelian Society” 80:1979/80 s. 145-168.

z tak pojętymi obiektami zagadnienie możliwości poznania przedmiotów matematyki staje się niesłychanie trudne do rozwiązania. Inną trudnością jest nierozróżnialność (pojętych indywiduowo) obiektów izomorficznych między sobą (przestrzeń afiniczna i przestrzeń do niej dualna, ciało liczb wymiernych i ciało liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, a i $b \in Q$).

Aktualizacje stanowiska realistycznego idą w kierunku wyeliminowania lub przynajmniej osłabienia powyższych trudności. Najbardziej rozpowszechnioną wersją zaktualizowanego stanowiska realistycznego jest tzw. strukturalizm. Bardzo wpływowymi przedstawicielami matematycznego strukturalizmu są M. Resnik, M. Steiner i S. Shapiro. Powyżsi autorzy deklarują się jako platoniści, gdyż poszukują takiej filozofii matematyki, w której matematykę interpretuje się jako naukę o abstrakcyjnych (niematerialnych i niementalnych) obiektach, ale równocześnie takiej, w której daje się uniknąć powyższych trudności. Najczęściej ten cel jest realizowany poprzez modyfikację koncepcji obiektu matematyki, w tym jego sposobu istnienia[14]. Według Resnika obiektów matematyki nie można konceptualizować analogicznie do przedmiotów makroskopowych. W szczególności nie mogą być one dane w izolacji (indywidualnie) od innych obiektów. Zawsze występują w pewnych agregatach, które nazywane są strukturami. Same struktury są jedynie agregatami obiektów znajdujących się w różnych relacjach (jednakże nieredukowalnych do zbiorów). Mogą też posiadać różne deskrypcje. Elementy struktury same w sobie są nierozróżnialne, ale jako ‘elementy struktury’ dają się wyróżnić. Przykładowo wierzchołki trójkąta jako punkty geometryczne są nierozróżnialne, ale jako elementy struktury geometrycznej, jaką jest trójkąt, dają się zidentyfikować poprzez własności relacyjne wewnątrz tej struktury. Tym samym zachowują swoją indywidualność w pewnych kontekstach oraz tracą ją w innych. Właśnie takie rozwiązanie problemu indywidualności bytów matematycznych pozwala na uniknięcie trudności związanych z ortodoksyjnym platonizmem. W efekcie w strukturalizmie pojawia się tzw. *epistemologia globalna*, która w opozycji do *epistemologii lokalnej* (charakterystycznej dla tradycyjnej wersji realizmu matematycznego) kładzie akcent na poznanie całych kompleksów obiektów, a nie wyizolowanych indywiduów.

Tak pojęte struktury leżą u podstaw rzeczywistości empirycznej tworząc rodzaj fundamentu, na którym jest ona ufundowana. To kluczowe dla strukturalizmu pojęcie jest notorycznie wieloznaczne[15]. Shapiro dokonując ekspli-

---

[14] Próbę uporządkowania problematyki istnienia zarówno w płaszczyźnie metafilozoficznej, jak i metalogicznej zawiera praca U. Żegleń *O istnieniu w logice i filozofii* (w: J. P e l c (red.). *Prace z pragmatyki, semantyki i metodologii semiotyki*. Wrocław 1991 s. 219-233).

[15] Respektujemy tutaj przyjęte za L. Corrym (*Bourbaki's Structures*. „Synthese" 92:1992 s. 316-318) rozróżnienie na 'formalne' i 'nieformalne' pojęcie struktury. Wieloznaczność tego pojęcia odnosi się oczywiście do jego nieformalnej wersji.

kacji tego pojęcia, podaje jedynie jego definicje ostensywne. Arytmetyka liczb naturalnych jest przykładem struktury. Nie można jej jednak pojmować jako zbioru liczb naturalnych z określonymi przez aksjomaty własnościami, ale raczej jako zbiór dowolnych obiektów, dany z dokładnością do izomorfizmu i spełniający wszystkie te postulaty, które spełniają liczby naturalne (aksjomaty G. Peano). Podobnie interpretujemy geometrię Euklidesa, której nie należy utożsamiać z pewnym jej historycznym sformułowaniem, ale raczej ze 'strukturą euklidesową'. Tym samym należy odróżniać poszczególne *reprezentacje* czy *modele* od danej struktury, od niej samej. Historycy i filozofowie matematyki bardzo często podkreślają centralną rolę pojęcia struktury w badaniach matematycznych. Sama matematyka z wyróżnionymi przez bourbakistów strukturami (algebraiczną, topologiczną i porządkową) byłaby paradygmatem strukturalnej nauki. Koncepcja struktury według niektórych filozofów matematyki (W. Aspray, P. Kitcher)[16] może odegrać też decydującą rolę przy rozwiązywaniu problemów *stricte* filozoficznych. Historycznie rzecz biorąc – pojęcie struktury w matematyce po raz pierwszy wykrystalizowało się w algebrze. Obecnie pojmuje się algebrę jako naukę badającą pewne 'struktury', a nie, jak to było jeszcze w XIX w., jako wiedzę o rozwiązywaniu równań wielomianowych. W podobny sposób zostały przeformułowane pozostałe dyscypliny matematyczne.

Ze strukturalistycznego punktu widzenia matematyka w aspekcie historycznym, psychologicznym i socjologicznym jest bardziej podobna do nauk empirycznych takich jak fizyka, chemia czy ekonomia niż do innych dziedzin ludzkiej wiedzy. Resnik sugeruje, że matematyka tak jest uwikłana w kontekst innych nauk, że bardzo trudno jest ją wyizolować z tych dziedzin bez naruszenia ich treści. Właściwą analogią jest tutaj relacja ciała do szkieletu. Matematyka jest 'szkieletem' (strukturą) ciała nauk empirycznych. Podobnie jak i w naukach empirycznych celem matematyki jest poznanie prawdy o niezależnie istniejącej rzeczywistości. Tym samym stanowisko to zbliża się do holizmu Quine'a, w którym nie istnieją żadne istotne epistemologiczne różnice pomiędzy matematyką a naukami empirycznymi. W tym kontekście pojawia się argument za stanowiskiem realistycznym, ale z innych niż strukturalistyczne pozycji. Jest to tzw. argument z niezbędności (*indispensability*) matematyki. Argument ten pochodzi od Quine'a[17] i H. Putnama[18]. Naj-

[16] *An Opinionated Introduction*. W: W. A s p r a y, P. K i t c h e r. (eds.). *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis 1988 s. 4. Z tego kontekstu bynajmniej nie wynika, że wspomnieni powyżej autorzy są strukturalistami.

[17] *On What There Is*. W: t e n ż e. *From a Logical Point of View*. Cambridge MA 1953; *Word and Object*. Cambridge (MA) 1960.

częściej formułuje się go następująco: zakładając, że aplikacja matematyki do teorii empirycznych jest płodna, musimy przyjąć, że byty matematyczne, które postuluje się w teoriach matematycznych, istnieją realnie, w przeciwnym razie sukces teorii empirycznej (zakładającej teorie matematyczne) byłby cudem (Putnam). Obiekty matematyki istniałyby zatem na mocy sukcesu teorii empirycznej oraz jej siły wyjaśniającej. We współczesnej filozofii matematyki dyskutuje się głównie z tym argumentem (H. Field) uważając, że obalenie go jest zarazem obaleniem realizmu (platonizmu)[19].

Strukturalizm Resnika idzie jednak dalej. Matematyka nie jest już tylko 'językiem fizyki', ale czymś więcej. Wskazują na to przykłady zaczerpnięte z praktyki badawczej. Często bowiem rozważania czysto matematyczne pozwalają na odkrycie nowych bytów fizycznych (antymateria, niektóre cząstki elementarne). Resnik przyjmuje, że fizyka teoretyczna i matematyka angażują tę samą ontologię. Tym samym w aspekcie epistemologicznym, ontologicznym i metodologicznym matematyka niczym nie różni się od fizyki.

To, co różni zaktualizowaną wersję realizmu od tradycyjnej, to brak akceptacji dla intuicji matematycznej, osłabienie tezy o konieczności wiedzy matematycznej oraz inna konceptualizacja istnienia obiektów matematycznych. Według strukturalizmu istnienie obiektu matematycznego jest zrelatywizowane do jego różnych deskrypcji w niezależnych teoriach matematycznych[20]. Idąc za przykładami przytoczonymi przez M. Steinera, powiemy, że liczba π istnieje realnie, gdy posiada niezależne deskrypcje w różnych teoriach matematycznych. Z jednej strony liczba ta dana jest w postaci analitycznej w twierdzeniu Eulera

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

[18] *What is Mathematical Truth?* W: t e n ż e. *Mathematics, Matter, and Method: Philosophical Papers*. Vol. 1. Cambridge 1979 s. 73.

[19] Por. E. S o b e r. *Mathematics and Indispensability*. „The Philosophical Review" 102:1993 s. 35-57; G. H e l l m a n. *Constructive Mathematics and Quantum Mechanics: Unbounded Operators and the Spectral Theorem*. „Journal of Philosophical Logic" 22:1993 s. 221-248; H. F i e l d. *Sciences without Numbers*. Princeton 1980. Krytykę tej ostatniej pozycji, a tym samym krytykę programu nominalizacji nauki zawierają następujące prace: M. R e s n i k. *How Nominalist is Hartry Field's Nominalism*. „Philosophical Studies" 47:1984 s. 163-181; t e n ż e. *Logic and Ontology: Some Remarks on Harty Field's Philosophy of Mathematics*. „History and Philosophy of Logic" 6:1985 s. 191-209.

[20] W tym kontekście predykat istnienia faktualnego (materialnego), który jest zasadny w stosunku do przedmiotów makroskopowych, nie stosowałby się do obiektów abstrakcyjnych, ale też predykat istnienia formalnego (pojęciowego) byłby równie nieadekwatny, gdyż dany obiekt istnieje właśnie w różnych kontekstach, a nawet ten sposób istnienia jest konstytutywny. Por. Z. H a j d u k. *Ontologiczne założenia matematyki.* W: M. H e l l e r, J. Ż y c i ń - s k i (red.). *Matematyczność przyrody*. Kraków 1990 s. 98.

ale równocześnie z drugiej strony definiuje się ją w geometrii jako stosunek długości okręgu do jego średnicy. Poza tym, dodatkowo, występuje w innej zależności analitycznej, a mianowicie w wyrażeniu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Te klasyczne przykłady ilustrują przyjmowane przez strukturalistów pojęcie istnienia obiektów matematyki. Zgodnie z przyjmowaną w strukturalizmie terminologią powiemy, że obiekty takie jak liczba π czy liczby naturalne są jedynie położeniami (*positions*) w strukturze określonej przez aksjomaty Peano. Tak skonceptualizowane byty matematyczne pojawiają się w perspektywie poznawczej bez udziału specjalnych władz poznawczych (intuicja matematyczna). Poznanie obiektów matematycznych (struktur) jest naturalnym poznaniem teoretycznym. Jest ono analogiczne do tego, jakie charakterystyczne jest np. dla fizyki. Poznanie obiektów matematyki odbywa się podobnie do poznania np. cząstek subatomowych. Pojawienie się nowych struktur jest równoznaczne ze sformułowaniem *nowej* teorii, poszerzeniu wiedzy o starych strukturach odpowiada rozwinięcie teorii już istniejącej. Struktury są abstraktami, ale genetycznie z nimi związane ich prototypy są konkretami (*templates*). Wzorcowymi przykładami takich prototypów może być np. odbitka światłodrukowa czy partytura utworu muzycznego. Inaczej zatem niż w klasycznym realizmie matematycznym, gdzie obiekty świata empirycznego były tylko niedoskonałymi egzemplifikacjami swych idealnych wzorców, przedstawia się rozwiązanie zagadnienia porządku poznania poszczególnych sfer rzeczywistości. W strukturalizmie bowiem badane przez matematyków struktury są jedynie abstrakcyjnymi korelatami swoich materialnych prototypów, które poznajemy na drodze abstrakcji i generalizacji z danych doświadczenia zmysłowego. Teza ta wydaje się być prostą konsekwencją odrzucenia intuicji matematycznej.

REALISM IN THE CONTEMPORARY PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

S u m m a r y

Probably no term in the philosopher's lexicon has had more distinct uses than 'realism'. In this article we attempt at explaining how this term works within the scope of contemporized standpoints of the philosophy of mathematics. In order to attain this we accept differentiation of the philosophy of mathematics from the theory of the foundamentals of mathematics, and then in the first one we distinguish epistemology, ontology, semantics, methodology, and pragmatics. The realistic attitude is presented here both in the traditional, and contemporized approach. The traditional realism represented by K. Gödel and G. Frege have been recently contemporized by the discussions, which arose with regard to the attitudes of M. Resnik, M. Steiner, and S. Shapiro. In the article we present all this options.