ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLIII, zeszyt 1 – 1995

BOŻENA CZERNECKA
Lublin

O ZWIĄZKACH MIĘDZY UPROSZCZONĄ SEMANTYKĄ S. KRIPKEGO DLA SYSTEMÓW LOGIKI MODALNEJ A UJĘCIEM ALGEBRAICZNYM SYNTAKTYKI TYCH SYSTEMÓW I ICH SEMANTYKI

W części pierwszej niniejszego artykułu zostanie zaprezentowana syntaktyka najważniejszych współczesnych systemów modalnej logiki zdań. Przedstawi się ją w dwóch wersjach: typowej i algebraicznej. O ile charakterystyka teorii modalnych metodą aksjomatyczną jest szeroko eksploatowana, o tyle algebraiczne ujęcie modalności jest – przynajmniej na gruncie polskim – prawie w ogóle nie znane.

W związku z pierwszą metodą wspomni się najpierw o genezie logik modalnych, wiążąc ją z nazwiskiem C. I. Lewisa, oraz przedstawi się pokrótce najczęściej omawiane w literaturze logicznej klasyfikacje pokaźnej już dziś liczby rachunków modalnych. Odnośnie do charakterystyki algebraicznej ustali się relację między algebrą Boole'a a rachunkiem zdań, a następnie między T-algebrą a systemem T. Zaprezentuje się także twierdzenia ukazujące związki między odnośnymi systemami aksjomatycznymi a strukturami algebraicznymi. Sformalizowany zostanie również dowód jednego z ważniejszych twierdzeń syntaktycznych, głoszącego, że każda T-algebra weryfikuje każdą tezę systemu T.

Druga część artykułu zostanie poświęcona semantyce omawianych systemów logiki modalnej. Zgodnie z rozpowszechnionym w literaturze logicznej sposobem ujmowania tej kwestii przedstawi się ją w wersji S. Kripkego. Następnie skoreluje się modele teoriomnogościowe występujące w tej semantyce z odpowiednimi modelami algebraicznymi. Otrzyma się w rezultacie dwie wersje formalnej definicji ogólnej ważności (prawdziwości) dla wyrażeń modalnych: teoriomodelową oraz algebraiczną.

Centralnym zamierzeniem trzeciej części pracy będzie formalizacja dowodów twierdzeń algebraicznych dotyczących pełności analizowanych systemów.

I

Współczesne badania w zakresie modalnych rachunków zdań[1] rozpoczynają się w drugim dziesięcioleciu XX wieku pracami C. I. Lewisa (1883-1964). Niektórzy wprawdzie wskazują na fakt, iż inspirował się on pomysłami H. McColla (koniec XIX wieku), niemniej u tego ostatniego nie występuje aksjomatyczne ujęcie modalności, które jest znamienne dla współczesnej logiki modalnej[2]. Twórcą pierwszych aksjomatycznych systemów modalnych był dopiero Lewis. Przedstawił je najpierw w pracy z 1918 roku *A Survey of Symbolic Logic*, a następnie w monografii *Symbolic Logic* z 1932 roku, napisanej wspólnie z C. H. Langfordem. Konstruował on swoje systemy z myślą uniknięcia tzw. paradoksów materialnej implikacji, na które natrafił w *Principia Mathematica* B. Russella i A. Whiteheada, niewłaściwie odczytując implikację „p⊃q" jako „z *p* wynika *q*"[3].

Lewisowska koncepcja ścisłej implikacji miała być zatem teorią wynikania, a nie – jak się później okazało – rachunkiem zdań modalnych. Zamierzał on bowiem zbudować system, w którym wystąpi implikacja mocniejsza od materialnej, lepiej odpowiadająca stosunkowi wynikania rozumianemu potocznie[4]. W tym celu wprowadził do systemu dodatkowy funktor – funktor tzw. ścisłej implikacji, do którego zdefiniowania użył terminu modalnego. Dzięki tej okoliczności, tj. dzięki pojawieniu się funktora modalnego, systemy ścisłej implikacji Lewisa ugruntowały swą ważną pozycję w logice współczesnej – okazało się, iż mogą być one skutecznie wykorzystane do analizy aletycznych modalności *de dicto*.

[1] Skonstruowane zostały również modalne rachunki ze zmiennymi indywidualnymi wiązanymi kwantyfikatorami, a także rachunki ze znakiem identyczności.

[2] Por. G. E. H u g h e s, M. J. C r e s s w e l l, *An Introduction to Modal Logic*, London 1974, s. 213-214.

[3] Ten sposób czytania materialnej implikacji prowadzi do paradoksalnych konsekwencji, np. do następujących twierdzeń niezgodnych ze zwykłym znaczeniem terminu „wynikanie": (t_1) zdanie prawdziwe wynika z dowolnego zdania /p⊃(q⊃p)/, (t_2) ze zdania fałszywego wynika dowolne zdanie /~p⊃(p⊃q)/, (t_3) dla dwóch dowolnych zdań jest prawdą, iż bądź pierwsze wynika z drugiego, bądź drugie wynika z pierwszego /(p⊃q)∨(q⊃p)/. Prawidłowym podstawieniem tego ostatniego prawa dwuwartościowej logiki zdań może być np. zdanie: „(Jeśli Jan niczego nie ukradł, to Jan jest złodziejem) lub (jeśli Jan jest złodziejem, to Jan niczego nie ukradł)", które wydaje się być w oczywisty sposób fałszywe. Zob. W. P o g o r z e l s k i, *Elementarny słownik logiki formalnej*, Białystok 1992, s. 365.

[4] L. Borkowski zauważa, iż system Lewisa powstał w czasach, gdy na ogół nie odróżniano logiki od metalogiki i nie zdawano sobie sprawy z tego, że pojęcie wynikania czy wyprowadzalności można zdefiniować metalogicznie, nie wprowadzając do tego celu innej implikacji niż materialna. Zob. L. B o r k o w s k i, *Uwagi o okresie warunkowym oraz implikacji materialnej i ścisłej*, [w:] *Studia logiczne*, Lublin 1990, s. 339.

Systemy zbudowane przez Lewisa metodą aksjomatyczną znane są w literaturze jako systemy S1, S2, S3, S4, S5[5] („S" od *strict implication*). Każdy następny z nich jest rozszerzeniem poprzedniego. W systemach ścisłej implikacji (już w S1) można zdefiniować (za pomocą funktorów negacji i koniunkcji, które Lewis przyjmuje jako pierwotne) funktor implikacji materialnej, otrzymując w konsekwencji, jako fragment tych systemów, alternatywno-negacyjny rachunek zdań Russella-Whiteheada. Ta okoliczność pozwoliła następnie budować systemy modalne jako nadbudowane nad klasycznym rachunkiem zdań przez dołączenie nowych terminów, aksjomatów i reguł. Jako pierwszy zwrócił na nią uwagę K. Gödel, który w 1933 roku podał aksjomatykę dla S4 i S5, dodając do terminów pierwotnych implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań funktor konieczności i definiując funktory możliwości i ścisłej implikacji. Dla systemów S1-S4 uczynił to E. J. Lemmon w 1957 roku[6]. Metoda Gödla jest obecnie najbardziej eksploatowaną metodą przy konstrukcji nowych systemów modalnych. Opierając się na niej R. Feys w 1937 roku zbudował ważny (jak się później okazało) z pewnego punktu widzenia system T. System ten jest równoważny[7] systemowi M G. H. von Wrighta, przedstawionemu w książce *An Essay in Modal Logic* z 1951 roku. Dowód równoważności tych systemów podał B. Sobociński w 1953 roku. System modalny T jest bliski rachunkom modalnym Lewisa, jako że jest zawarty w S4, zawiera S2, ale nie pokrywa się z S3.

Na przestrzeni kilkudziesięciu ostatnich lat tworzy się i bada również inne aksjomatyczne systemy modalne, konstruuje nowe aksjomatyki dla istniejących już logik, rozszerza się te logiki na różne sposoby, a także uprawia analizy porównawcze rozmaitych logik modalnych (ustala się stosunki zawierania się i krzyżowania między nimi). Dlatego w obecnej sytuacji (współistnienia wielu różnych rachunków) rodzi się zapotrzebowanie na jakąś typologię wszystkich logik modalnych. Problematykę tę częściowo podejmują m.in. G. E. Hughes i M. J. Cresswell, A. N. Prior, E. J. Lemmon, R. Feys, a z autorów polskich L. Gumański, W. Pogorzelski, W. Marciszewski.

I tak Gumański (idąc za pewnymi sugestiami Hughesa i Cresswella) dzieli wszystkie logiki modalne na standardowe i niestandardowe. Kryterium podziału stanowi spełnienie (lub niespełnienie) następujących warunków: 1) tezami teorii są m.in.: $\sim L\sim p \supset Mp$, $\sim M\sim p \supset Lp$, $(p \prec q) \equiv L(p \supset q)$, $(p = q) \equiv ((p \prec q) \wedge (q \prec p))$, $Lp \supset p$,

[5] Niektórzy zauważają, iż faktycznie Lewis był twórcą dwóch spośród nich: S2 i S3. Zob. np. M. Porębska, W. Suchoń, *Elementarne wprowadzenie w logikę formalną*, Warszawa 1991, s. 153.

[6] Por. L. Borkowski, *Logika formalna*, Lublin 1970, s. 262.

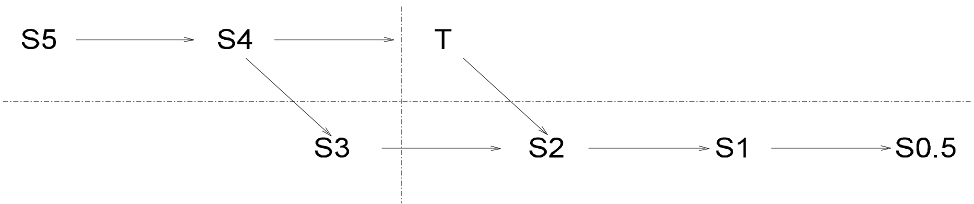
[7] Dwa systemy są dedukcyjnie równoważne (krócej: równoważne) wtedy i tylko wtedy, gdy (w.t.w.) zawierają dokładnie te same tezy (czyli zawierają się wzajemnie). Dla pewnych celów systemy równoważne traktuje się jako ten sam system (tak też będzie w niniejszym artykule).

$L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$, gdzie „L” i „M” reprezentują odpowiednio funktory konieczności i możliwości, „⊃” i „≺” – funktory materialnej i ścisłej implikacji, „≡” i „=” – funktory materialnej i ścisłej równoważności, „∧” – funktor koniunkcji; 2) nie jest tezą: $p \supset Lp$; 3) obowiązują reguły: podstawiania (RP), odrywania o schemacie: $\dfrac{\begin{array}{l}\vdash \alpha \supset \beta \\ \vdash \alpha\end{array}}{\vdash \beta}$ (RO), osłabiona reguła koniecznościowania o schemacie: $\dfrac{\vdash_{KRZ} \alpha}{\vdash L\alpha}$.

Każda logika modalna spełniająca warunki 1) – 3) zwie się standardową, pozostałe – niestandardowymi.

Logiki standardowe dzielą się dalej na regularne i nieregularne. Pierwsze mają następującą własność: zastąpienie ścisłych implikacji postaci $\alpha \prec \beta$ równoważnymi wyrażeniami $L(\alpha \supset \beta)$ oraz zastąpienie ścisłych równoważności $\alpha = \beta$ koniunkcjami postaci $L(\alpha \supset \beta) \wedge L(\beta \supset \alpha)$, a następnie wykreślenie wszystkich funktorów modalnych sprawia, że każda teza danej logiki przekształca się w tezę klasycznego rachunku zdań. Do regularnych logik modalnych należą m.in. S1-S5, T, K1-K4 Sobocińskiego, natomiast do nieregularnych: S6 M. J. Albana, S7 i S8 S. Halldéna, S9 L. Åquista. Natomiast wśród niestandardowych logik aletycznych można wyróżnić teorie wynikania (ang. *entailment*), rachunek Ł-modalny J. Łukasiewicza, logikę dyskusyjną S. Jaśkowskiego, systemy C1-C5, CT, S1°-S5°, T°[8].

Z kolei Hughes i Cresswell wybierają systemy ich zdaniem najbardziej znaczące (a zarazem najlepiej znane) i przedstawiają je schematycznie:



(S5 → S4 znaczy, że system S4 zawiera się w systemie S5, relacja → jest przechodnia)

[8] Por. L. G u m a ń s k i, *Logika modalna*, „Ruch Filozoficzny”, 2-3(1984), s. 169-171.

Systemy na lewo od pionowej przerywanej linii mają skończoną ilość różnych modalności[9], natomiast po prawej – nieskończoną ich ilość. W systemach powyżej poziomej przerywanej linii obowiązuje reguła koniecznościowania (nieograniczona) o schemacie: $\frac{\vdash \alpha}{\vdash L\alpha}$. Reguła ta znana jest także w literaturze pod nazwą „reguła Gödla” (RG) lub „reguła generalizacji modalnej”. Systemy poniżej tej linii mają ograniczoną regułę koniecznościowania[10].

Logiki, w których m.in. obowiązuje reguła Gödla, zalicza się do tzw. normalnych logik modalnych. Podkreśla się w literaturze logicznej ten moment, iż stanowią one ważną grupę logik. Warunkami koniecznymi stanowiącymi o normalności jakiejś logiki modalnej są: 1) język tej logiki zawiera co najmniej język klasycznej logiki zdaniowej, wzbogacony o formuły zbudowane przy użyciu funktora jednoargumentowego L; 2) wśród aksjomatów znajdują się aksjomaty dwuwartościowej logiki zdaniowej, a ponadto co najmniej następujący aksjomat: $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$, zwany monotonicznością L (lub rozdzielnością L względem implikacji); 3) wśród reguł pierwotnych znajdują się: reguła podstawiania (RP), reguła odrywania (RO) i reguła Gödla (RG)[11].

Najbardziej reprezentatywnymi przedstawicielami logik należących do klasy normalnych logik modalnych (a także – biorąc z nieco innego punktu widzenia – do logik standardowych regularnych) są systemy T, S4, S5. Lemmon uważa je (dodając jeszcze SO.5) za jedyne godne uwagi, wyróżnione ze wszystkich istniejących systemów modalnych pod względem interpretacyjnym[12]. Poza tym są to systemy najlepiej znane oraz najczęściej dyskutowane w środowisku logików. Z tych też względów uwaga niniejszego artykułu koncentruje się głównie wokół nich.

Funktory konieczności i możliwości (L, M) występujące w wyżej wymienionych systemach nie są oczywiście funktorami prawdziwościowymi. Ta okoliczność sprawia, iż budując system modalny nie można postępować tak, jak w przypadku logiki klasycznej, czyli nie można najpierw wyznaczać zbioru formuł prawdziwych, a dopiero potem tak dobierać aksjomaty i reguły, aby zbiór tez systemu pokrywał się z owym zbiorem formuł prawdziwych. Należy tu zastosować procedurę odwrotną. Niektórzy autorzy poprzedzają konstruowanie systemu logiki modalnej odwoływaniem się do pewnych intuicji, które

[9] Modalnością nazywa się wyrażenie, które jest bądź zmienną *p*, bądź jest postaci $F_1 \ldots F_n p$, gdzie F_i (i=1, 2, ..., n) jest funktorem konieczności lub możliwości lub negacji.

[10] Por. Hughes, Cresswell, dz. cyt., s. 256, 346; A. N. Prior, *Time and Modality*, Oxford 1957, s. 123-124.

[11] Por. Pogorzelski, dz. cyt., s. 341; E. J. Lemmon, G. P. Henderson, *Is There Only One Correct System of Modal Logic?*, „The Aristotelian Society”, 33(1959), s. 30.

[12] Por. Lemmon, Henderson, dz. cyt., s. 31.

dotyczą związków głównie między funktorami modalnymi lub między funktorami modalnymi i prawdziwościowymi. Następnie owe intuicje są przekładane na odpowiednie aksjomaty i reguły systemu.

SYSTEM T

1. Symbole pierwotne
   a) zmienne zdaniowe: p, q, r, ...
   b) funktory – jednoargumentowe: ~ (znak negacji), L (znak konieczności) dwuargumentowy: $\vee$ (znak alternatywy)
   c) nawiasy
2. Reguły tworzenia wyrażeń złożonych
   a) pojedyncza zmienna zdaniowa jest wyrażeniem poprawnie zbudowanym
   b) jeśli α jest wyrażeniem poprawnie zbudowanym, to są nimi także $\ulcorner{\sim}\alpha\urcorner$ i $\ulcorner L\alpha\urcorner$
   c) jeśli α i β są wyrażeniami poprawnie zbudowanymi, to jest nim także $\ulcorner\alpha\vee\beta\urcorner$
3. Definicje
   a) definicje funktorów koniunkcji, materialnej implikacji i materialnej równoważności jak w klasycznym rachunku zdań (krócej: KRZ), a więc:

[Def $\wedge$] $\ulcorner\alpha\wedge\beta\urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner{\sim}({\sim}\alpha\vee{\sim}\beta)\urcorner$

[Def $\supset$] $\ulcorner\alpha\supset\beta\urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner{\sim}\alpha\vee\beta\urcorner$

[Def $\equiv$] $\ulcorner\alpha\equiv\beta\urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner(\alpha\supset\beta)\wedge(\beta\supset\alpha)\urcorner$

   b) definicje funktorów możliwości, ścisłej implikacji i ścisłej równoważności:

[Def M] $\ulcorner M\alpha\urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner{\sim}L{\sim}\alpha\urcorner$

[Def $\prec$] $\ulcorner\alpha\prec\beta\urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner L(\alpha\supset\beta)\urcorner$

[Def $=$] $\ulcorner\alpha=\beta\urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner(\alpha\prec\beta)\wedge(\beta\prec\alpha)\urcorner$

4. Aksjomaty
a) aksjomaty alternatywno-implikacyjnego KRZ:
A1 $(p\vee p)\supset p$

A2 $q\supset(p\vee q)$
A3 $(p\vee q)\supset(q\vee p)$
A4 $(q\supset r)\supset((p\vee q)\supset(p\vee r))$
b) aksjomaty specyficzne:
A5 $Lp\supset p$
A6 $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$

5. Pierwotne reguły dowodzenia
a) reguły obowiązujące w KRZ:
Reguła podstawiania (RP) – wskazuje, że jeśli α jest tezą systemu, to tezą jest również każde wyrażenie β, otrzymane przez podstawienie w α za wszystkie równokształtne zmienne zdaniowe tego samego wyrażenia.
Reguła odrywania (RO) – wskazuje, że jeżeli tezą systemu jest implikacja $\ulcorner\alpha\supset\beta\urcorner$ i tezą systemu jest wyrażenie α, to tezą jest również wyrażenie β.

Schematycznie: $$\frac{\vdash \ulcorner\alpha\supset\beta\urcorner \quad \vdash \alpha}{\vdash \beta}$$

b) reguła osobliwa
Reguła Gödla (RG) – wskazuje, że jeżeli α jest tezą T, to tezą T jest również $\ulcorner L\alpha\urcorner$. Schematycznie: $\dfrac{\vdash\alpha}{\vdash\ulcorner L\alpha\urcorner}$

Dodając do systemu T dodatkowy aksjomat: A7 $Lp\supset LLp$, otrzymuje się system S4. Natomiast system S5 zawiera T oraz aksjomat A8 $Mp\supset LMp$, głoszący, że cokolwiek jest możliwe, to jest koniecznie możliwe.

Zachodzi powiązanie pomiędzy logiką a algebrą abstrakcyjną, tj. ogólną teorią struktur algebraicznych, takich jak grupy, kraty, algebry Boole'a. Algebraiczne podejście do logiki pojawiło się w pracach G. Boole'a (1815-1864) po raz pierwszy w pracy *The Mathematical Analysis of Logic* z 1847 roku, a następnie w obszerniejszym dziele *An Investigation of the Laws of Thought, on which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability* z 1854 roku. O podejściu algebraicznym do syntaktyki systemów logicznych mówi się wtedy, gdy systemy aksjomatyczne rozumiane są jako pewne struktury matematyczne (znane szeroko jako algebry Boole'a).

Najogólniej algebra (abstrakcyjna) jest układem złożonym ze zbioru przedmiotów i operacji na tych przedmiotach – symbolicznie: $A=\langle K,o_1, ..., o_n\rangle$. Elementy zbioru *K* traktuje się najczęściej jako zbiory, a operacje jako sposoby konstrukcji nowych zbiorów ze zbiorów już istniejących[13]. Algebra Boole'a jest strukturą $\langle K,-,\times\rangle$, gdzie *K* jest dowolnym zbiorem elementów, symbol „–" reprezentuje operator jednoargumentowy, symbol „×" reprezentuje operator dwuargumentowy na elementach zbioru *K*. Ponadto *K* spełnia następujące warunki:

1.1 K zawiera co najmniej 2 elementy
1.2 Jeśli $a,b\in K$ (a,b są elementami K), to $-a\in K$ i $(a\times b)\in K$
1.3 Jeśli $a,b\in K$, to $(a\times b)=(b\times a)$[14]
1.4 Jeśli $a,b,c\in K$, to $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
1.5 Dla każdego $a,b\in K$, jeśli istnieje $c\in K$, takie, że $(a\times -b)=(c\times -c)$, to $(a\times b)=a$
1.6 Dla każdego $a,b,c\in K$, jeśli $(a\times b)=a$, to $(a\times -b)=(c\times -c)$[15]

W algebrze Boole'a przyjmuje się poniższe definicje:

[Def 0] $0 \overset{Df}{=} (a\times -a)$
[Def 1] $1 \overset{Df}{=} -0$
[Def +] $(a+b) \overset{Df}{=} -(-a\times -b)$
[Def ⊂] $(a\subset b) \overset{Df}{=} (a\times b)=a$

„–a" nazywane jest „negacją" lub „dopełnieniem" elementu *a*; operacja reprezentowana przez symbol „×" zwana jest często „mnożeniem", zaś (a×b) – „iloczynem" lub „przecięciem" elementów *a* i *b*; operację reprezentowaną przez „+" zwie się „dodawaniem", a(a+b) – „sumą" lub „połączeniem" elementów *a* i *b*; a⊂b odczytuje się jako „*a* jest zawarte w *b*". Symbol „0" oznacza zbiór pusty, natomiast „1" – zbiór uniwersalny, tj. zbiór zawierający wszystkie elementy *K* (czyli 1 denotuje to, co de Morgan określił jako uniwersum dyskursu)[16].

Z uwagi na fakt, iż zbiór *K* może zawierać dowolną ilość elementów (większą niż 1), istnieje nieskończenie wiele algebr Boole'a. Jeżeli liczba elementów *K* jest skończona, wówczas algebrę $\langle K,-,\times\rangle$ nazywa się skończoną algebrą Boole'a, w przeciwnym razie – algebrą nieskończoną. Orzekając o

---

[13] Por. H. R a s i o w a, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1984, s. 256.

[14] „a=b" znaczy, że *a* i *b* są tymi samymi elementami algebry.

[15] Warunki te pochodzą z pracy R. Stolla pt. *Sets, Logic and Axiomatic Theories* (San Francisco–London 1961, s. 176-177), który z kolei czerpie je od E. V. Huntingtona (1904). Inne aksjomatyki podają m.in. A. Mostowski (*Logika matematyczna*, Warszawa–Wrocław 1948, s. 103), H. Rasiowa (*Wstęp do logiki matematycznej i teorii mnogości*, Wrocław–Warszawa–Kraków 1966, s. 63). W literaturze logicznej znanych jest kilka równoważnych zbiorów postulatów. Studium na ten temat przeprowadza C. Lejewski (*Studies in the Axiomatic Foundations of Boolean Algebra*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 1(1960), s. 23-27 i 91-106).

[16] Rozpowszechnione są również inne alternatywne notacje: zamiast a×b można pisać a∩b, a·b lub ab; zamiast a+b – a∪b; zamiast -a-ā, ´a lub a´; zamiast a⊂b – a⊆b lub a≤b; zamiast 0 – Z, Λ lub ∅; zamiast 1 – V.

jakimś wyrażeniu, że jest twierdzeniem algebry Boole'a, ma się na myśli to, że jest ono twierdzeniem każdej algebry Boole'a, niezależnie od liczby elementów. Oto przykłady wybranych twierdzeń algebry Boole'a:

B1 $a=--a$
B2 $-(-a\times-b)=a+b$
B3 $-(-a+-b)=a\times b$
B4 $-a\times-b=-(a+b)$
B5 $-a+-b=-(a\times b)$
B6 $-a+b=1$ w.t.w. $a\subset b$
B7 $-a+a=1$
B8 $a\times a=a$
B9 $a+a=a$
B10 $-1=0$
B11 $0+a=a$
B12 $a\subset 1$
B13 $(a+-b)\times(b+-a)=1$ w.t.w. $a=b$
B14 $(a\times b)\subset a$
B15 $a\subset(a+b)$
B16 $(a\times b)+c=(a+c)\times(b+c)$
B17 $(a+b)\subset c$ w.t.w $a\subset c$ i $b\subset c$
B18 Jeśli $a\subset b$ i $b\subset c$, to $a\subset c$
B19 Jeśli $a\subset b$ i $b\subset a$, to $a=b$
B20 Jeśli $a\subset b$ i $c\subset d$, to $(a+c)\subset(b+d)$[17]

W skończonej algebrze Boole'a można zdefiniować atom w następujący sposób: Jeśli $a\in K$, to a jest atomem w.t.w. (i) $a\neq 0$ i (ii) dla każdego $b\in K$, jeśli $b\subset a$, to $b=a$ lub $b=0$. Łatwo zauważyć, że jeżeli elementy algebry traktuje się jako zbiory, to atomy są zbiorami jednostkowymi. W każdej skończonej algebrze Boole'a $\langle K,-,x\rangle$ istnieje skończony zbiór $\{a^1,..., a^n\}$ składający się z wszystkich atomów *K*. Ponadto obowiązują poniższe twierdzenia:

B21 Każdy różny od 0 element zbioru K jest sumą jedynego w swoim rodzaju, określonego zbioru atomów.
B22 $(a^1 +...+ a^n)=1$, gdzie $a^1, ..., a^n$ są wszystkimi atomami K.
B23 Dla każdego $a,b\in K$, jeśli b jest sumą wszystkich atomów zawartych w a, to $a=b$.
B24 Jeśli n jest liczbą atomów w K, to liczba elementów w K wynosi 2^n.

[17] Por. H u g h e s, C r e s s w e l l, dz. cyt., s. 313. Dowody powyższych twierdzeń podają H. Rasiowa i R. Sikorski (*The Mathematics of Metamathematics*, Warszawa 1963).

Bazując na dotychczasowych analizach można ustalić relację pomiędzy algebrą Boole'a a rachunkiem zdań. Czyni się to w sposób następujący. Każdej zmiennej zdaniowej występującej w poprawnie zbudowanym wyrażeniu rachunku zdań przyporządkowuje się jakiś element zbioru *K*. I tak np. przyporządkowanie zmiennej *p* elementu *a* zapisuje się jako V(p)=a. Ponieważ każde wyrażenie klasycznego rachunku zdań może być zapisane wyłącznie za pomocą funktorów negacji i koniunkcji, przyporządkowanie może przebiegać według reguł:

R1 Jeśli $V(\alpha)=a$, to $V(\sim\alpha)=-a$

R2 Jeśli $V(\alpha)=a$ i $V(\beta)=b$, to $V(\alpha\wedge\beta)=a\times b$

Wygodnie jest posługiwać się również regułą przyporządkowania dla alternatywy:

R3 Jeśli $V(\alpha)=a$ i $V(\beta)=b$, to $V(\alpha\vee\beta)=a+b$

Algebra $\langle K,-,\times\rangle$ weryfikuje poprawnie zbudowane wyrażenie α w.t.w. dla każdego przyporządkowania elementów zbioru *K*, zmiennym zdaniowym w α, $V(\alpha)=1$. Algebra $\langle K,-,\times\rangle$ falsyfikuje α w.t.w. istnieje jakieś przyporządkowanie elementów *K* zmiennym w α, takie, że $V(\alpha)\neq 1$. Można dowieść ponadto twierdzenia, że poprawnie zbudowane wyrażenie KRZ jest prawdziwe w.t.w. jest weryfikowane przez każdą algebrę Boole'a[18].

Jednakże ażeby móc ustalić jedno-jednoznaczną odpowiedniość między modalnymi systemami aksjomatycznymi a strukturami algebraicznymi, należy powiększyć algebrę Boole'a dodając nowy operator. Będzie nim jednoargumentowy operator, symbolizowany przez „$*$", którego charakterystykę stanowią poniższe postulaty:

2.1 Jeśli $a\in K$, to $*a\in K$

2.2 Jeśli $a\in K$, to $a\subset *a$

2.3 Jeśli $a,b\in K$, to $*(a+b)=(*a+*b)$

2.4 $*0=0$

3.1 Jeśli $a\in K$, to $*a=**a$

3.2 Jeśli $a\in K$, to $*a=1$, o ile $a\neq 0$

Algebrę spełniającą warunki 1.1-2.4 nazywa się T-algebrą[19]. Algebrę spełniającą ponadto warunek 3.1 zwie się S4-algebrą, algebrę zaś spełniającą warunek 3.2 zamiast 3.1 (i oczywiście warunki 1.1-2.4) – S5-algebrą. Często

---

[18] Por. H u g h e s, C r e s s w e l l, dz. cyt., s. 314-315. Okazuje się, iż można dowieść jeszcze bardziej ścisłego twierdzenia postaci: Poprawnie zbudowane wyrażenie klasycznego rachunku zdań jest prawdziwe w.t.w. jest weryfikowane w dwuelementowej algebrze Boole'a – takiej, w której K={1,0}.

[19] Podobnie, aczkolwiek używając innej symboliki, definiuje T-algebrę (*extension algebra*) Lemmon. Zob. E. J. L e m m o n, *An Extension Algebra and the Modal System T*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", 1(1960), s. 3.

w literaturze logicznej T-algebry nazywa się algebrami rozszerzenia (*extension algebra*), a S4-algebry – algebrami domknięcia (*closure algebra*)[20].

Algebraiczną interpretację systemu T można ustalić w sposób analogiczny jak dla klasycznego rachunku zdań. Wspomniano już wcześniej, że system T jest równoważny systemowi M G. H. von Wrighta. Aksjomaty systemu M są następujące:

A1–A4 z KRZ

A5′ $p \supset Mp$

A6′ $M(p \vee q) \equiv Mp \vee Mq$

Reguły pierwotne: reguła podstawiania (RP), reguła odrywania (RO), reguła Gödla (RG) oraz reguła „możliwości dla równoważności” (RM ≡) o schemacie: $\dfrac{\vdash \ulcorner \alpha \equiv \beta \urcorner}{\vdash \ulcorner M\alpha \equiv M\beta \urcorner}$

Definicja: [Def L] $\ulcorner L\alpha \urcorner \stackrel{Df}{\equiv} \ulcorner {\sim} M {\sim} \alpha \urcorner$

W celu wykazania równoważności systemów T i M należy dowieść, iż zawierają się one wzajemnie, a więc Tw1 $M \subset T$ i Tw2 $T \subset M$.

Tw1. System T zawiera w sobie system M ($M \subset T$).

Dowód:

1° Aksjomaty systemu M są tezami systemu T[21].

2° Reguły pierwotne: RP, RO i RG są regułami pierwotnymi systemu T.
Dowód reguły RM≡ na gruncie systemu T.

1. $\vdash \alpha \equiv \beta$ z.
2. $\vdash \alpha \supset \beta$ OE: 1
3. $\vdash \beta \supset \alpha$ OE: 1
4. $\vdash M\alpha \supset M\beta$ 2, reguła wtórna T o schemacie: $\dfrac{\vdash \ulcorner \alpha \supset \beta \urcorner}{\vdash \ulcorner M\alpha \supset M\beta \urcorner}$
5. $\vdash M\beta \supset M\alpha$ 3, reguła wtórna T

$\vdash M\alpha \equiv M\beta$ 4, 5

[20] Termin „algebra domknięcia” wywodzi się z aplikowalności S4-algebr do pewnych problemów w topologii. Z uwagi na fakt, że w topologii przestrzeń jest traktowana w terminach zbiorów punktów, algebraiczne ujęcia stają się tam korzystne. Zob. J. M c K i n s e y, A. T a r s k i, *The Algebra of Topology*, „Annals of Mathematics”, 45(1944), s. 141-191.

[21] Dla przykładu dowód A5′ $p \supset Mp$ na gruncie T przebiega następująco:

1. $Lp \supset p$	A5
2. $L{\sim}p \supset {\sim}p$	1, RP
3. ${\sim\sim}p \supset {\sim}L{\sim}p$	2, KRZ (prawo transpozycji)
4. $p \supset {\sim\sim}p$	KRZ
5. $p \supset {\sim}L{\sim}p$	4, 3, KRZ (prawo sylogizmu)
$p \supset Mp$	5, def M

Analogicznie dowodzi się A6′ $M(p \vee q) \equiv Mp \vee Mq$.

3° Dowód definicji funktora konieczności $\ulcorner L\alpha \urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner {\sim} M {\sim} \alpha \urcorner$ na gruncie systemu T:

1. $Lp \equiv {\sim}M{\sim}p$	twierdzenie systemu T[22]
2. $\vdash(\ulcorner L\alpha \urcorner \equiv \ulcorner {\sim}M{\sim}\alpha \urcorner)$	1
3. $\vdash\beta$	z.
4. $\vdash\beta(L\alpha // {\sim}M{\sim}\alpha)$	2, 3, REq (reguła ekstensjonalności dla równoważności)
5. $\vdash\beta({\sim}M{\sim}\alpha // L\alpha)$	2, 3, REq
$\ulcorner L\alpha \urcorner = \ulcorner {\sim}M{\sim}\alpha \urcorner$	4, 5

Tw2. System M zawiera w sobie system T ($T \subset M$).

Dowód:

1° Aksjomaty systemu T są tezami systemu M[23].

2° Zbiór reguł pierwotnych systemu M zawiera w sobie zbiór reguł pierwotnych T.

3° $\ulcorner M\alpha \urcorner \overset{Df}{=} \ulcorner {\sim}L{\sim}\alpha \urcorner$

Dowód:

1. $Mp \equiv {\sim}L{\sim}p$	twierdzenie systemu M
2. $\vdash(\ulcorner M\alpha \urcorner \equiv \ulcorner {\sim}L{\sim}\alpha \urcorner)$	1
3. $\vdash\beta$	z.
4. $\vdash\beta(M\alpha // {\sim}L{\sim}\alpha)$	2, 3, REq
5. $\vdash\beta({\sim}L{\sim}\alpha // M\alpha)$	2, 3, REq
$\ulcorner M\alpha \urcorner = \ulcorner {\sim}L{\sim}\alpha \urcorner$	4, 5

Z uwagi na fakt, iż systemy T i M są równoważne – co wyżej pokazano – można wykorzystać do dalszych analiz którykolwiek z nich. Wygodnie jest skorzystać z systemu, w którym terminami pierwotnymi są funktory negacji, koniunkcji oraz możliwości (a więc z systemu M). Można obecnie ustalić relację pomiędzy algebrą Boole'a $\langle K, -, \times, * \rangle$ a systemem T (M) analogicznie

---

[22] Dowód tego twierdzenia jest bardzo prosty:

1. $p \equiv {\sim}{\sim}p$	KRZ
2. $Lp \equiv {\sim}{\sim}Lp$	1, RP
3. $Lp \equiv {\sim}{\sim}L{\sim}{\sim}p$	2, 1 REq
$Lp \equiv {\sim}M{\sim}p$	3, def M

[23] Oto przykład dowodu A5 $Lp \supset p$ na gruncie systemu M:

1. $p \supset Mp$	A5′
2. ${\sim}p \supset M{\sim}p$	1,RP
3. ${\sim}M{\sim}p \supset {\sim}{\sim}p$	2, KRZ (prawo transpozycji)
4. ${\sim}{\sim}p \supset p$	KRZ
5. ${\sim}M{\sim}p \supset p$	3, 4, KRZ (prawo sylogizmu)
$Lp \supset p$	5, def L

Podobnie dowodzi się A6 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$.

jak poprzednio. Należy w tym celu dodać do reguł R1–R3 (dla KRZ) dodatkową regułę:

R4 Jeśli $V(\alpha)=a$, to $V(M\alpha)=*a$

Na bazie powyższych analiz można obecnie przejść do prezentacji twierdzeń ukazujących związek między systemami aksjomatycznymi a strukturami algebraicznymi.

T I Każda T-algebra $\langle K,-,\times,*\rangle$ weryfikuje każdą tezę systemu T.

Etapy dowodu T I:

1. Lemat 1. Wszystkie aksjomaty systemu T są weryfikowane przez każdą T-algebrę.
2. Lemat 2. Wszystkie pierwotne reguły dowodzenia T zachowują własność weryfikowania przez każdą T-algebrę (czyli własność ta dziedziczy się wraz z regułami systemu).

Ad 1.

Dowód L1:

1) Aksjomaty A1-A4 jako aksjomaty KRZ są weryfikowane w każdej T-algebrze $\langle K,-,\times,*\rangle$, gdyż są weryfikowane w każdej algebrze Boole'a $\langle K,-,\times\rangle$, a każda algebra Boole'a zawiera się w T-algebrze.

2) a) Dowolna T-algebra weryfikuje A5´ $p\supset Mp$.

Dowód:

1. $a\in K$	z.
2. $V(p) = a$	z.
3. $V(p\supset Mp)\neq 1$	z.d.n.
4. $(p\supset Mp)\equiv(\sim p\vee Mp)$	KRZ
5. $V(\sim p\vee Mp)\neq 1$	4, 3, REq
6. $V(\sim p\vee Mp)=-a+*a$	R1, R3, R4, 1, 2
7. $-a+*a\neq 1$	6, 5, REi (reguła ekstensjonalności dla identyczności)
8. $-a+b=1$ w.t.w. $a\subset b$	B6
9. $-a+b\neq 1$ w.t.w. $a\not\subset b$	8, KRZ
10. $-a+*a\neq 1$ w.t.w. $a\not\subset *a$	9, RP
11. $a\not\subset -*a$	10, 7
12. $a\subset *a$	war. 2.2 dla T-algebry, 1

sprzeczność: 11, 12

b) Dowolna T-algebra weryfikuje A6´ $M(p\vee q)\equiv(Mp\vee Mq)$.

Dowód:

1. $a,b\in K$	z.
2. $V(p)=a\wedge V(q)=b$	z.
3. $V(M(p\vee q)\equiv(Mp\vee Mq))\neq 1$	z.d.n.
4. $[M(p\vee q)\equiv(Mp\vee Mq)]\equiv[\sim M(p\vee q)\vee(Mp\vee Mq)]\wedge[M(p\vee q)\vee\sim(Mp\vee Mq)]$	KRZ

5. $V[(\sim M(p\vee q)\vee(Mp\vee Mq))\wedge(M(p\vee q)\vee\sim(Mp\vee Mq))]\neq 1$	4, 3, REq
6. $[-*(a+b)+(*a+*b)]\times[*(a+b)+(-(*a+*b)]\neq 1$	5, R1-R4, 1, 2
7. $*(a+b)=*a+*b$	war.2.3 dla T-algebry, 1
8. $[-(*a+*b)+(*a+*b)]\times[(*a+*b)+(-(*a+*b)]\neq 1$	6, 7
9. $-a+a=1$	B7
10. $1\times 1\neq 1$	8, 9
11. $a\times a=a$	B8
12. $1\times 1=1$	11, RP

sprzeczność: 10, 12

Ad 2.

Dowód L2:

1) Reguła podstawiania zachowuje własność bycia weryfikowanym przez każdą T-algebrę.

   Dowód:

   Zakładając, że wyrażenie α jest weryfikowane przez każdą T-algebrę, trzeba przyjąć, że $V(\alpha)=1$ dla każdego przyporządkowania dowolnej zmiennej w α dowolnego elementu zbioru *K*. Skoro więc dowolnemu wyrażeniu α przyporządkowany jest jakiś element zbioru *K*, to po podstawieniu wyrażenia β za zmienną, np. *p*, w wyrażeniu α uzyska się $V(\alpha(\beta/p))=1$. A zatem RP zachowuje własność weryfikowalności w każdej T-algebrze.

2) Reguła odrywania

   Zakładając, że wyrażenie α oraz implikacja $\ulcorner\alpha\supset\beta\urcorner$ są weryfikowane przez każdą T-algebrę, należy udowodnić, że wyrażenie β też jest weryfikowane przez każdą T-algebrę.

   Dowód:

1. $a,b\in K$	z.
2. $V(\alpha)=a\wedge V(\beta)=b$	z.
3. $V(\alpha)=1$	z.
4. $V(\alpha\supset\beta)=1$	z.
5. $V(\sim\alpha\vee\beta)=1$	4, KRZ, REq
6. $-a+b=1$	5, R1, R3, 1, 2, REi
7. $a=1$	2, 3, REi
8. $-1+b=1$	6, 7, REi
9. $-1=0$	B10
10. $0+b=1$	8, 9, REi
11. $0+b=b$	B11
12. $b=1$	10, 11, REi

$V(\beta)=1$	12, 2, REi

3) Reguła Gödla

Zakładając, że $V(\alpha)=1$, należy dowieść, że $V(L\alpha)=1$.

Dowód:

1. $a \in K$	z.
2. $V(\alpha)=a$	z.
3. $V(\alpha)=1$	z.
4. $L\alpha = \sim M \sim \alpha$	def L
5. $V(\sim M \sim \alpha) = - * - a$	R1, R4, 1, 2
6. $a=1$	2, 3, REi
7. $-1=0$	B10
8. $*0=0$	war. 2.4 dla T-algebry
9. $-0=1$	B10′
$V(L\alpha)=1$	4, 5, 6, 7, 8, 9

4) Reguła „możliwości dla równoważności”

Zakładając, że $V(\alpha \equiv \beta)=1$, należy dowieść, że $V(M\alpha \equiv M\beta)=1$.

Dowód:

1. $a,b \in K$	z.
2. $V(\alpha)=a \wedge V(\beta)=b$	z.
3. $V(\alpha \equiv \beta)=1$	z.
4. $V((\sim\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \sim\beta))=1$	3, KRZ, REq
5. $(-a+b) \times (a+-b)=1$	4, R1, R2, R3, 1, 2
6. $(-a+b) \times (a+-b)=1$ w.t.w. $a=b$	B13
7. $a=b$	6, 5, RO_E (reguła odrywania dla równoważności)
8. $*a=*b$	7
9. $(-*a+*b) \times (*a+-*b)=1$	8, B13
10. $V((\sim M\alpha \vee M\beta) \wedge (M\alpha \vee \sim M\beta))=1$	9, R1-R4
$(M\alpha \equiv M\beta)=1$	10, KRZ, REq

Zostało udowodnione twierdzenie głoszące, że każda T-algebra weryfikuje każdą tezę systemu T. Ale już teraz warto zauważyć, że istnieje wiele algebr, które weryfikują wszystkie tezy T, a ponadto wyrażenia, które nie są tezami T. Algebrę, która weryfikuje wszystkie i wyłącznie te wyrażenia, które są tezami T, nazywa się charakterystyczną T-algebrą. O istnieniu takiej algebry mówi T II.

T II Istnieje T-algebra, która weryfikuje tylko i wyłącznie tezy systemu T[24].

Dla T-algebr można ponadto dowieść następujących twierdzeń:

T III Jeśli dana jest T-algebra $\langle K,-,\times,*\rangle$ i skończony podzbiór zbioru *K* $\{a_1, ..., a_n\}$, to istnieje skończona T-algebra $\langle K',-',\times',*'\rangle$ taka, że
(i) dla każdego a_i $(1 \leq i \leq n)$, $a_i \in K'$,
(ii) K' zawiera co najwyżej 2^{2^n} elementów,
(iii) dla każdego $a,b \in K'$, jeśli $-a \in K'$, to $-a=-'a$
i jeśli $(a \times b) \in K'$, to $(a \times b)=(a \times' b)$
i jeśli $*a \in K'$, to $*a=*'a$.

T IV Jeśli α jest wyrażeniem poprawnie zbudowanym systemu T, to α jest tezą T w.t.w. α jest weryfikowana przez każdą T-algebrę zawierającą co najwyżej 2^{2^n} elementów[25].

Powyższe twierdzenia obowiązują dla systemów S4 i S5, ich dowody przeprowadza się (z niewielkimi modyfikacjami) analogicznie jak dla T. Dla przykładu zostanie obecnie przedstawiony dowód twierdzenia T I dla S4 i S5.

T I Każda S4-algebra (S5-algebra) weryfikuje każdą tezę S4 (S5).

Ponieważ każda S4-algebra (i oczywiście S5-algebra) jest T-algebrą, zatem każda teza T jest weryfikowana przez każdą S4-algebrę (i S5-algebrę). Ponadto reguły systemu T są tymi samymi regułami obowiązującymi w S4 i S5. Wystarczy więc udowodnić, że S4-algebra (S5-algebra) weryfikuje aksjomat specyficzny S4 (S5) różnicujący ten system od systemu T. Znaczy to, że należy dowieść, iż S4-algebra weryfikuje A7 $Lp \supset LLp$, natomiast S5-algebra weryfikuje A8 $Mp \supset LMp$.

c) Dowolna S4-algebra weryfikuje A7 $Lp \supset LLp$.

Dowód:

1. $a \in K$	z.
2. $V(p) = a$	z.
3. $V(Lp \supset LLp) \neq 1$	z.d.n.
4. $Lp \supset LLp \equiv M{\sim}p \vee {\sim}MM{\sim}p$	KRZ, def L
5. $V(M{\sim}p \vee {\sim}MM{\sim}p) \neq 1$	4, 3, REq
6. $V(M{\sim}p \vee {\sim}MM{\sim}p) = * -a + - * * - a$	R1, R3, R4, 1, 2

[24] Dowód tego twierdzenia podają G. E. Hughes i M. J. Cresswell (dz. cyt., 318-320) oraz E. J. Lemmon (*An Extencion Algebra* s. 10-11). Natomiast M. A. E. Dummett i E. J. Lemmon (*Modal Logics between S4 and S5*, „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", 5(1959), s. 250-264) dowodzą istnienia charakterystycznej S4-algebry.

[25] Chodzi głównie o wspólne prace obu autorów: *The Algebra of Topology* („Annals of Mathematics", 45(1944), s. 141-191), *Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting* („The Journal of Symbolic Logic", 13(1948), s. 1-15).

7. $*-a+-**-a\neq 1$	6, 5, REi
8. $**a=*a$	war. 3.1 dla S4-algebry, 1
9. $*-a+-*-a\neq 1$	7, 8, REi
10. $a+-a=1$	B7
11. $*-a+-*-a=1$	10, RP

sprzeczność: 9, 11

d) Dowolna S5-algebra weryfikuje A8 $Mp\supset LMp$.

Dowód:

1. $a\in K$	z.
2. $V(p)=a$	z.
3. $V(Mp\supset LMp)\neq 1$	z.d.n.
4. $Mp\supset LMp\equiv\sim Mp\vee\sim M\sim Mp$	KRZ, def L
5. $V(\sim Mp\vee\sim M\sim Mp)\neq 1$	4, 3, REq
6. $V(\sim Mp\vee\sim M\sim Mp)=-*a+-*-*a$	R1, R3, R4, 1, 2
7. $-*a+-*-*a\neq 1$	6, 5, REi
8. $a=0\vee a\neq 0$	KRZ
1.1 $a=0$	z.d.
1.2 $*0=0$	war. 2.4
1.3 $*a=0$	1.2, 1.1, REi
1.4 $-0+-*-0\neq 1$	1.3, 7, REi
1.5 $-0=1$	B10′
1.6 $1+-*1\neq 1$	1.5, 1.4, REi
1.7 jeśli $a\in K$ i $a\neq 0$, to $*a=1$	war. 3.2 dla S5-algebry
1.8 $*1=1$	1, 1.7, RO
1.9 $1+-1\neq 1$	1.8, 1.6, REi
1.10 $-1=0$	B10
1.11 $1+0\neq 1$	1.10, 1.9, REi
1.12 $1+0=1$	B11, RP
2.1 $a\neq 0$	z.d.
2.2 jeśli $a\in K$ i $a\neq 0$, to $*a=1$	war. 3.2
2.3 $*a=1$	1, 2.1, 2.2, RO
2.4 $-1+-*-1\neq 1$	2.3, 7, REi
2.5 $-1=0$	B10
2.6 $0+-*0\neq 1$	2.5, 2.4, REi
2.7 $*0=0$	war. 2.4
2.8 $0+-0\neq 1$	2.7, 2.6, REi
2.9 $-0=1$	B10′
2.10 $0+1\neq 1$	2.9, 2.8, REi
2.11 $0+1=1$	B11, RP

Sprzeczność: $\begin{bmatrix} 1.1 \rightarrow \text{sprz. } (1.11,\ 1.12) \\ 2.1 \rightarrow \text{sprz. } (2.10,\ 2.11) \\ 8 \end{bmatrix}$

II

Badania nad semantyką logik modalnych zostały zapoczątkowane w latach trzydziestych XX wieku pracami M. Wajsberga i K. Gödla. *Ein erweiteter Klassenkalkül* Wajsberga przedstawia pierwszą w ogóle charakterystykę semantyczną logiki modalnej poprzez opis specjalną „ciągową" matrycą. Natomiast już w latach czterdziestych J. McKinsey i A. Tarski[26] zaczęli używać algebr abstrakcyjnych jako modeli[27]. Szczególnie jednak intensywnie rozmnożyły się semantyki algebraiczne logik modalnych w drugiej połowie lat sześćdziesiątych i w latach siedemdziesiątych, a impuls dały im badania Lemmona.

W tym też czasie nastąpiło przesunięcie punktu ciężkości z badań syntaktycznych ku semantycznym. Przyczyną takiego stanu rzeczy był, jak się wydaje, ten fakt, iż filozofowie i logicy wiązali z owymi semantykami, szczególnie z tzw. semantyką światów możliwych, nadzieję na rozwiązanie podstawowych problemów ontologicznych. Sięgano więc po filozoficzne interpretacje światów możliwych sądząc, iż dziedziny wyznaczone przez modele logiczne odpowiadają w jakimś sensie uniwersum ontologicznemu badanemu przez filozofów. Taka postawa wynikała z przekonania, że logika modalna poprzez swą semantykę jest ontologicznie zaangażowana. Obecnie okazało się, że w dużej mierze to przekonanie jest złudne. Podkreśla ten moment m.in. A. Plantinga mówiąc, że semantyka S. Kripkego jest tylko aksjomatyzacją predykatu „być ogólnie ważną formułą modalną"[28]. Inaczej mówiąc, struktura modelowa jest czystym zbiorem konstrukcji teoretycznych, nie mającym żadnego związku nawet z terminami modalnymi. Podobne stanowisko prezentuje M. Przełęcki, który wskazuje na niewystarczalność aparatury teoriomodelowej do analizy problemów filozoficznych i przestrzega przed zbytnimi nadziejami wiązanymi z jej filozoficznymi zastosowaniami[29].

---

[26] Dziedzina przedmiotów D jest modelem (semantycznym) teorii X w.t.w. istnieje taka interpretacja wyrażeń języka J_X (polegająca na przyporządkowaniu symbolom i wyrażeniom języka J_X przedmiotów, własności i relacji dziedziny D), przy której każda teza t teorii X stwierdza coś prawdziwie o przedmiotach dziedziny D lub – jeśli t jest funkcją zdaniową – t jest ogólnie ważna w D. Modelami logik mogą być matryce, algebry, struktury relacyjne. Zob. G u m a ń s k i, *Logika modalna*, s. 165-166.

[27] Przegląd semantyk algebraicznych dla logik modalnych zob. E. J. L e m m o n, *Algebraic Semantics for Modal Logics*, „The Journal of Symbolic Logic", 31(1966), s. 46-65 (cz. I), s. 191-218 (cz. II.).

[28] Por. A. P l a n t i n g a, *The Nature of Necessity*, Oxford 1978, s. 126.

[29] Por. M. P r z e ł ę c k i, *O świecie rzeczywistym i światach możliwych*, „Studia Filozoficzne", 7(1974), s. 56.

Wyżej już zaznaczono, że przy konstruowaniu systemów logiki modalnej wykorzystuje się pewne ustalenia natury intuicyjnej, a następnie do tak skonstruowanych systemów aksjomatycznych dostosowuje się definicje ogólnej ważności (prawdziwości)[30] niektórych form zdaniowych. Obecnie powszechnie znane są dwa podejścia do tego zadania: algebraiczne i teoriomnogościowe. Pierwsze podejście posługuje się algebrami jako modelami, w drugim modelami są struktury relacyjne, stąd tego typu semantykę nazywa się często semantyką relacyjną. Struktura relacyjna, najogólniej biorąc, stanowi układ złożony ze zbioru przedmiotów oraz relacji pomiędzy nimi (mogą w niej być także pewne przedmioty wyróżnione).

Teoriomnogościowe modele, chociaż późniejsze (czasowo) od algebraicznych, są obecnie częściej eksploatowane. Wprowadzili je do badań nad rachunkami modalnymi w końcu lat pięćdziesiątych, niezależnie od siebie, S. Kanger (1957) i J. Hintikka (1961, 1963), ale decydujące znaczenie w tej materii miały klasyczne już prace Kripkego *Semantical Analysis of Modal Logic* (cz. I – 1963, cz. II – 1965). Z uwagi na szczególną doniosłość prac Kripkego metoda opisu semantyki w nich zapoczątkowana związała się na stałe z jego nazwiskiem.

Semantyka Kripkego okazała się – jak już wcześniej sygnalizowano – niezwykle inspirująca filozoficznie. Powodem tak dużego nią zainteresowania nie tylko logików formalistów, ale i logików filozofujących, a także samych filozofów, wydaje się być fakt, iż Kripke oparł swoją semantykę na filozoficznie kontrowersyjnym pojęciu „świata możliwego”, zaczerpniętym od Leibniza[31]. U. Żegleń zauważa, że w literaturze dominują trzy podejścia określające status świata możliwego: 1) językowe – świat możliwy jest określonym zbiorem wyrażeń językowych, czyli jest opisywany za pomocą pewnego stanu deskrypcji, stanowiącego zbiór zdań atomowych (R. Carnap); 2) rzeczowe – świat możliwy jest zbiorem rzeczy lub ich własności (A. Plantinga, D. Lewis, R. Stalnaker); 3) epistemiczne – świat możliwy jest możliwą sytuacją poznawczą lub zbiorem obiektów intelektualnych procesów (J. Hintikka, N. Rescher)[32].

[30] W literaturze logicznej, zwłaszcza anglojęzycznej, odróżnia się prawdziwość od ogólnej ważności. I tak mówi się, że prawdziwe mogą być zdania, natomiast ogólnie ważne – formy (funkcje) zdaniowe. W literaturze polskiej zwykło się przyjmować, że formy zdaniowe spełnione przez każdy przedmiot (ciąg przedmiotów) są formami prawdziwymi. Zob. L. B o r k o w s k i, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991, s. 10.

[31] Trzeba zauważyć, iż problematyka światów możliwych zdominowana została obecnie przez filozofów analitycznych.

[32] Por. U. Ż e g l e ń, *Modalność w logice i filozofii*, Warszawa 1990, s. 41, 129-130. W artykule *Ontologiczna doniosłość logiki modalnej* („Roczniki Filozoficzne”, 32(1984), z. 1, s. 74) uzupełnia te podejścia o czwarte – Meinongowskie: świat możliwy to zbiór obiektów Meinongow-

Często podnoszą się także głosy, że semantyka Kripkego jest konstrukcją formalną i jako taka unika zaangażowania ontologicznego. Nie zachodzi bowiem potrzeba interpretowania zbioru *W* występującego w modelu dla jakiejś logiki, jako zbioru światów możliwych. Jest to po prostu zbiór pewnego rodzaju przedmiotów. Hughes i Cresswell pokazują, że mogą to być gracze, którzy uczestniczą w pewnej grze słownej. Wprowadzają oni pojęcie gry językowej, związanej kolejno z klasycznym rachunkiem zdań, systemem T, S4 i S5 – zinterpretowanie tych gier daje semantykę Kripkego.

W grze związanej z klasycznym rachunkiem zdań (KRZ-grze) występuje jeden gracz, który otrzymuje kartkę papieru z wypisanymi na niej literami alfabetu. Instrukcje gry są następujące:

1° Jeśli zostaje wywołana pojedyncza litera, która jest napisana na kartce, to należy podnieść rękę.

2° Jeśli wywołane jest $\sim\alpha$, to należy podnieść rękę wtedy, gdy była ona opuszczona przy wywoływaniu α.

3° Jeśli wywołane jest $\alpha\vee\beta$, to należy podnieść rękę wtedy, gdy była ona podnoszona dla α lub β.

Te warunki są wystarczające do charakterystyki KRZ-gry, gdyż funktory koniunkcji, implikacji i równoważności można zdefiniować za pomocą funktorów negacji i alternatywy. Wyrażenie poprawnie zbudowane α w pewnym układzie liter jest uwieńczone powodzeniem wtedy, gdy gracz podnosi rękę, jeśli wypowiadane jest całe wyrażenie. Są takie wyrażenia, które będą zawsze uwieńczone powodzeniem, niezależnie od układu liter napisanych na kartce, np. wyrażenie $p\vee\sim p$.

W T-grze graczy może być więcej niż jeden. Są oni przy tym tak rozmieszczeni, że jest określone, których pozostałych graczy dany gracz może widzieć. (Gracze nie muszą się wzajemnie widzieć; z jednego miejsca dany gracz może być widoczny, a z innego nie.) Instrukcje gry są tu następujące:

1°–3° jak dla KRZ-gry, a ponadto:

4° Jeśli wywoływane jest $L\alpha$, to należy podnieść rękę, jeśli każdy gracz, którego możesz widzieć (włączając siebie), podniósł rękę, gdy samo α było wywoływane; w przeciwnym razie należy trzymać rękę nie podniesioną.

Wygodny, aczkolwiek niekonieczny (odkąd funktor M można zdefiniować w terminach L), jest warunek dotyczący możliwości:

5° Jeśli wywoływane jest $M\alpha$, to należy podnieść rękę, jeśli przynajmniej jeden z graczy, których możesz widzieć (włączając siebie), podniósł rękę, gdy samo α było wywoływane; w przeciwnym razie należy trzymać rękę nie podniesioną.

skich (N. Cocchiarella).

Opierając się na dotychczasowych uwagach można wysunąć następujące wnioski:

a) Dla funktorów L i M (a więc w T-grze) gracz musi wiedzieć nie tylko to, co sam zrobił dla wcześniejszych wołań, ale także to, co zrobili inni gracze.
b) W danym T-układzie jakieś wołanie może prowadzić do podniesienia ręki przez jednych graczy, a przez innych nie.
c) Jeśli jakieś wołanie prowadzi każdego gracza do podniesienia ręki, to wołanie to jest uwieńczone powodzeniem w tym T-układzie.
d) Jakieś wołanie może być uwieńczone powodzeniem w jednym T-układzie, a nie uwieńczone powodzeniem w innym T-układzie.
e) Są pewne wołania, które będą uwieńczone powodzeniem w każdym T-układzie, tj. niezależnie od liczby graczy biorących udział w grze, od układu liter napisanych na kartce i od wzajemnego widzenia się graczy. Powyższe trzy elementy jednoznacznie wyznaczają T-układ.

Wyrażenie, które jest uwieńczone powodzeniem w każdym T-układzie, nazywa się ogólnie ważnym wyrażeniem T[33].

Oto przykłady zastosowania powyższych instrukcji. Rozważanym wyrażeniem jest $Lp \supset p$, które w pierwotnej symbolice przybiera postać: $\sim Lp \vee p$. Występuje jeden gracz A. Dla pierwszego wołania jeśli A ma na swojej kartce literę *p*, wówczas podnosi rękę (instrukcja 1°). A stąd musi ją podnieść, gdy wywoływane jest całe wyrażenie (instrukcja 3°). Jeśli zaś A nie ma na swojej kartce *p*, to trzyma rękę opuszczoną. Tak samo postępuje dla wołania Lp (instrukcja 4°). Podnosi rękę dla $\sim Lp$ (instrukcja 2°), a zatem musi ją podnieść dla całego wyrażenia (instrukcja 3°). Wynika stąd, iż wyrażenie $\sim Lp \vee p$ jest uwieńczone powodzeniem w T-układzie z jednym graczem (odkąd każdy inny gracz musi postąpić tak jak A). Przebieg wyżej opisanej gry można przedstawić schematycznie:

A $\boxed{p}$	$p=T$	A $\boxed{}$	$p=F$	T – gracz podniósł rękę
	$Lp=T$		$Lp=F$	F – gracz nie podniósł ręki
	$\sim Lp=F$		$\sim Lp=T$	
	$\sim Lp \vee p=T$		$\sim Lp \vee p=T$	

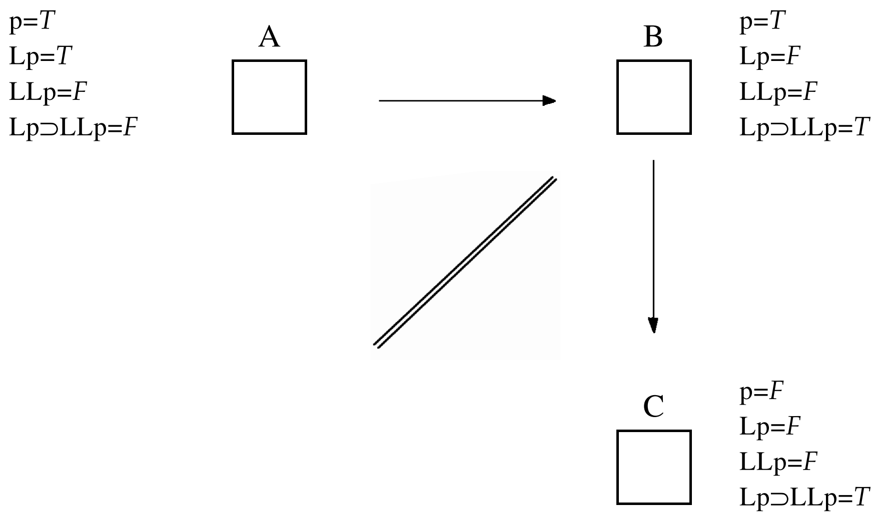
Można wykazać, że wyrażenie $\sim Lp \vee p$ jest uwieńczone powodzeniem w każdym skończonym T-układzie.

Podobne rozważanie można przeprowadzić dla innego wyrażenia, np. $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$. Gdyby nie było ono uwieńczone powodzeniem, to w jakimś

[33] Por. H u g h e s, C r e s s w e l l, *An Introduction*, s. 61-64.

T-układzie jakiś gracz, np. A, nie podniósłby ręki, gdy jest wywoływane. Mógłby on tak postąpić tylko wtedy, gdyby podniósł rękę dla $L(p\supset q)$ i Lp, ale nie podniósł dla Lq. Lecz jeśliby podniósł rękę dla $L(p\supset q)$, to każdy gracz, którego mógł widzieć, podniósł rękę dla $p\supset q$, tj. każdy kogo mógł widzieć, kto podniósł rękę dla p, podniósł także dla q. Gracz A jednak także podniósł rękę dla Lp i stąd każdy, kogo mógł widzieć, podniósł rękę dla p. Zatem każdy gracz, którego mógł widzieć, podniósł rękę dla q. Czyli jeśli A podniósł rękę dla $L(p\supset q)$ i dla Lp, to musi ją podnieść również dla Lq. Innymi słowy, wyrażenie $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$ jest uwieńczone powodzeniem w każdym T-układzie.

Warto w tym miejscu zauważyć, że powyższe wyrażenia wzięte do analizy są aksjomatami specyficznymi systemu T. Wykazano, iż są one uwieńczone powodzeniem w każdym T-układzie, a zatem są ogólnie ważnymi wyrażeniami T. Rodzi się natychmiast pytanie, czy wyrażenie $Lp\supset LLp$ (aksjomat specyficzny S4) jest ogólnie ważne w T. Poniższy schemat:



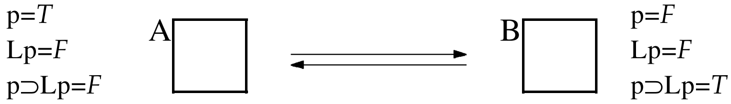
strzałki symbolizują relację widzenia się graczy

ilustruje taki T-układ, w którym $Lp\supset LLp$ nie jest uwieńczone powodzeniem (gracz A nie podniósł ręki). A zatem, jak należało się spodziewać, aksjomat charakterystyczny S4 nie jest ogólnie ważnym wyrażeniem T (istnieje bowiem taki T-układ, w którym nie jest on uwieńczony powodzeniem).

S4-gra różni się od T-gry jednym dodatkowym warunkiem nałożonym na relację widzenia. Jak w systemie T relacja widzenia jest tylko zwrotna (tj. każdy gracz widzi sam siebie), tak w S4 jest zwrotna i przechodnia (dla każdych graczy A, B, C, jeśli A widzi B i B widzi C, to A widzi C). Można łatwo teraz wykazać, że A7 Lp⊃LLp jest ogólnie ważnym wyrażeniem S4. A7 nie byłby uwieńczony powodzeniem w S4 tylko wówczas, gdyby w jakimś S4-układzie jakiś gracz, np. A, podniósł rękę dla Lp, ale nie podniósł dla LLp. Mógłby tak postąpić tylko wtedy, gdyby wszyscy gracze, których może widzieć, podnieśli rękę dla *p* i zarazem któryś z nich nie podniósł dla Lp. Ci, którzy trzymali rękę nie podniesioną dla Lp, mogli to uczynić tylko w przypadku gdyby byli gracze, których mogli widzieć i którzy nie podnieśli ręki dla *p*. To jednak jest niemożliwe w żadnym S4-układzie, odkąd wszystkich, których pozostali gracze mogą widzieć, A może także widzieć, i wszyscy, których A może widzieć, podnieśli rękę dla *p*.

Należy jeszcze wykazać, że A8 Mp⊃LMp (aksjomat specyficzny S5) nie jest ogólnie ważny w S4. Ilustruje to poniższy schemat:

Z kolei w S5, gdzie na relację widzenia nałożony jest dodatkowo nowy wymóg – wymóg symetryczności (tj. dla dowolnych dwóch graczy A i B, jeśli A widzi B, to B widzi A), powyższe wyrażenie jest ogólnie ważne. Biorąc bowiem dowolnego gracza, np. A, w dowolnym S5-układzie, jeśli podniesie on rękę dla Mp, to podniesie także dla LMp. Podniesienie ręki dla Mp oznacza, że jakiś gracz, którego A może widzieć, podniósł rękę dla *p*. I odkąd w każdym S5-układzie każdy gracz może widzieć każdego innego gracza (warunek symetryczności relacji widzenia), jeśli A widział gracza, który podniósł rękę dla *p*, to widzieli go wszyscy inni gracze. Zatem nie tylko A, lecz wszyscy podnieśli rękę dla Mp, a stąd A podniósł rękę dla LMp. Przykładem wyrażenia, które nie jest ogólnie ważne w żadnym z przedstawionych systemów, może być p⊃Lp. Dla najmocniejszego z nich – S5 uwidacznia to schemat:



Po tych ustaleniach warto zastanowić się nad sformułowaniem formalnej definicji ogólnej ważności (prawdziwości) dla wyrażeń modalnych. Aby osiągnąć ten cel, należy najpierw odpowiednio zinterpretować opisane powyżej gry językowe. Ustalono już wcześniej, że elementami T-gry są: grupa graczy, widzeniowe uporządkowanie graczy oraz zbiór instrukcji. Okazuje się, że zamiast o grupie graczy można mówić o zbiorze przedmiotów (obiektów) określonego rodzaju. Często w literaturze logiczno-filozoficznej owe przedmioty nazywane są „światami możliwymi". Odpowiednio zbiór tych przedmiotów (oznaczony literą W) to zbiór „światów możliwych" – $\{w_1, \dots, w_i, \dots, w_n\}$. Dwuargumentową relację widzeniową, określoną na elementach W można potraktować jako relację osiągalności albo dostępności czy też pojmowalności (lub możliwości relatywnej, jak u Kripkego) i oznaczyć przez R. Wyrażenie w_iRw_j czyta się następująco: „świat w_j jest osiągalny (dostępny, pojmowalny) ze świata w_i" albo „świat w_j jest możliwy ze względu na w_i", albo też „świat w_i osiąga świat w_j". Z kolei instrukcje dla odpowiedzi na wywoływane wyrażenia mają strukturę przyporządkowywania wartości dla poprawnie zbudowanych wyrażeń modalnych. Podnoszenie i opuszczenie ręki może być reprezentowane przez wartościujące przyporządkowanie. Jest ono tu bardziej skomplikowane niż w przypadku KRZ. W grach związanych z systemami modalnymi nie można mówić, że $V(\alpha)=T$ (T symbolizuje tu ogólną ważność albo prawdziwość) lub $V(\alpha)=F$ (F symbolizuje fałszywość), lecz należy zawsze mówić o wartości α dotyczącej gracza w_i (świata w_i), czyli $V(\alpha, w_i)=T$ lub $V(\alpha, w_i)=F$.

Wykorzystując powyższe ustalenia można obecnie wprowadzić ważne pojęcie modelu, które jest uwikłane w formalną definicję ogólnej ważności (prawdziwości). T-model jest uporządkowaną trójką $\langle W, R, V\rangle$, gdzie W jest zbiorem obiektów (światów), R – dwuargumentową relacją zwrotną, określoną na zbiorze W, V – funkcją przyporządkowującą wyrażeniom zdaniowym jedną z wartości należących do zbioru $\{T,F\}$ i spełniającą następujące warunki:

1. Dla dowolnej zmiennej zdaniowej p_j i dowolnego $w_i \in W$ $V(p_j, w_i)=T$ lub $V(p_j,w_i)=F$.
2. [V~] Dla dowolnego wyrażenia poprawnie zbudowanego α i dla dowolnego $w_i \in W$ $V(\sim\alpha, w_i)=T$, jeśli $V(\alpha, w_i)=F$; w przeciwnym razie $V(\sim\alpha, w_i)=F$.
3. [V∨] Dla dowolnych wyrażeń poprawnie zbudowanych α i β i dla dowolnego $w_i \in W$ $V((\alpha\vee\beta), w_i)=T$, jeśli $V(\alpha, w_i)=T$ lub $V(\beta, w_i)=T$; w przeciwnym razie $V((\alpha\vee\beta), w_i)=F$.
4. [VL] Dla dowolnego wyrażenia poprawnie zbudowanego α i dla dowolnego $w_i \in W$ $V(L\alpha, w_i)=T$, jeśli dla każdego $w_j \in W$ takiego, że w_iRw_j, $V(\alpha, w_j)=T$; w przeciwnym razie $V(L\alpha, w_i)=F$.

5. [VM] Dla dowolnego wyrażenia poprawnie zbudowanego α i dla dowolnego $w_i \in W$ $V(M\alpha, w_i)=T$, jeśli przynajmniej dla jednego $w_j \in W$, takiego, że $w_i R w_j$, $V(\alpha, w_j)=T$; w przeciwnym razie $V(M\alpha, w_i)=F$[34].

Analogicznie jak dla systemu T definiuje się S4-model i S5-model. S4-model (S5-model) jest uporządkowaną trójką $\langle W, R, V \rangle$, gdzie W i V są określone tak jak w T-modelu, a R jest dwuargumentową relacją zwrotną i przechodnią (zwrotną, przechodnią i symetryczną[35] w S5-modelu) określoną na zbiorze W.

Opierając się na wprowadzonym wyżej pojęciu modelu można podać formalną definicję ogólnej ważności (prawdziwości) wyrażeń zawierających funktory modalne. I tak wyrażenie poprawnie zbudowane α jest ogólnie ważne (prawdziwe) w systemie T (S4, S5) w.t.w. dla każdego T-modelu $\langle W, R, V \rangle$ (odpowiednio: S4-modelu, S5-modelu) i dla każdego $w_i \in W$, $V(\alpha, w_i)=T$[36]. Inaczej mówiąc, wyrażenie α jest ogólnie ważne (prawdziwe) w systemie T (S4, S5) w.t.w. jest ono ogólnie ważne (prawdziwe) w każdym świecie, w każdym T-modelu (S4-modelu, S5-modelu)[37].

---

[34] Warunek [VM] jest oczywiście niekonieczny, aczkolwiek wygodny.

[35] Relacja R w S5-modelu jest więc relacją równoważnościową. Z tego względu S5-model można zdefiniować jako uporządkowaną dwójkę $\langle W, V \rangle$, gdzie W i V są określone tak jak poprzednio z wyjątkiem [VL] (i konsekwentnie [VM]) – w jego miejscu jest: [VL′] Dla dowolnego wyrażenia poprawnie zbudowanego α i dla dowolnego $w_i \in W$ $V(L\alpha, w_i)=T$, jeśli dla każdego $w_j \in W$, $V(L\alpha, w_j)=T$; w przeciwnym razie $V(L\alpha, w_i)=F$.

[36] Dla S5 z uwagi na równoważnościowość relacji R powyższą definicję można nieco przeformułować w następujący sposób: Wyrażenie poprawnie zbudowane α jest ogólnie ważne (prawdziwe) w S5 w.t.w. dla każdego S5-modelu $\langle W, V \rangle$ i dla każdego $w_i \in W$, $V(\alpha, w_i)=T$. Równoważnościowość relacji osiągalności (dostępności, pojmowalności) sprawia, że zbiór światów jest podzielony na klasy abstrakcji. Między elementami różnych klas abstrakcji nie zachodzi żadna relacja osiągalności.

[37] Oryginalna wersja semantyki dla systemów modalnych zaprezentowana przez Kripkego wygląda następująco. Kripke definiuje normalną strukturę modelową jako uporządkowaną trójkę $\langle G, K, R \rangle$, gdzie K jest niepustym zbiorem (odpowiednik W), G jest elementem K (tak zwanym światem aktualnym), R jest relacją (o własnościach zwrotności, przechodniości, symetryczności – w zależności od systemu), określoną na zbiorze K. Mając daną strukturę modelową $\langle G, K, R \rangle$ otrzymuje się model dla poprawnie zbudowanego wyrażenia A poprzez dodanie do tej struktury funkcji $\Phi(P,H)$ (odpowiadającej wartościowaniu V), gdzie P przebiega zbiór wyrażeń zdaniowych języka danego rachunku modalnego, natomiast H jest elementem zbioru K. Funkcja Φ spełnia ponadto następujące warunki (analogiczne do podanych wyżej):

1. Dla dowolnej zmiennej zdaniowej P i dla dowolnego $H \in K$ $\Phi(P,H)=T$ lub $\Phi(P, H)=F$.
2. Jeśli $\Phi(B, H)=\Phi(C, H)=T$, to $\Phi(B \wedge C, H)=T$; w przeciwnym razie $\Phi(B \wedge C, H)=F$.
3. Jeśli $\Phi(B, H)=T$, to $\Phi(\sim B, H)=F$; w przeciwnym razie $\Phi(\sim B, H)=T$.
4. Jeśli $\Phi(B, H')=T$ dla każdego H' takiego, że $H' \in K$ i HRH', to $\Phi(\Box B, H)=T$; w przeciwnym razie $\Phi(\Box B, H)=F$ (gdzie $\Box$ jest odpowiednikiem L).

Wyrażenie poprawnie zbudowane A jest ogólnie ważne (prawdziwe) w jakimś swoim modelu wyznaczonym przez funkcję Φ, związaną ze strukturą modelową $\langle G,K,R \rangle$, jeśli $\Phi(A, G)=T$. Ogólniej mówiąc, wyrażenie poprawnie zbudowane A jest ogólnie ważne (prawdziwe) na gruncie

Warto jeszcze zwrócić uwagę na własności formalne relacji R (dostępności albo osiągalności), które to własności różnicują poszczególne systemy modalne. Okazuje się, że analiza tych własności jest zarazem analizą aksjomatów specyficznych systemów T, S4 i S5 w świetle semantyki Kripkego. Najsłabszym aksjomatem modalnym jest A6 $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$. Aksjomat ten nie wymaga bowiem żadnych warunków nakładanych na relację dostępności.

W najsłabszym z omawianych systemów, tj. w systemie T, relacja R jest zwrotna, czyli $w_i R w_i$, to znaczy, że świat w_i jest osiągalny (dostępny) sam dla siebie. Zwrotność relacji R wynika z przyjętego w tym systemie postulatu konieczności: A5 $Lp \supset p$. Można to pokazać w następujący sposób. Niech α będzie wyrażeniem $Lp \supset p$. Zakładając, że $V(\alpha, w_i)=F$, należy przyjąć, że $V(Lp, w_i)=T$ i $V(p, w_i)=F$. $V(Lp, w_i)=T$ w.t.w. *p* jest ogólnie ważne (prawdziwe) we wszystkich światach osiągalnych ze świata w_i (*p* opisuje stan rzeczy zachodzący we wszystkich światach możliwych dostępnych dla w_i), oraz $V(p, w_i)=F$ w.t.w. *p* nie jest ogólnie ważne (jest fałszywe) w świecie w_i (*p* opisuje nie zachodzący w świecie w_i stan rzeczy). Sytuacja taka zachodziłaby wówczas, gdyby świat w_i nie był sam dla siebie osiągalny. A zatem świat aktualny w_i jest sam dla siebie osiągalny, ale żadne inne możliwe światy nie są w ogóle brane pod uwagę, czyli nie są osiągalne ze świata aktualnego w_i. Dostępność (czy osiągalność) ogranicza się tu do dostępności z punktu widzenia mieszkańców aktualnego świata, to znaczy nie uważa się za dostępne tego, co jest dostępne dla „mieszkańców” innych światów.

W systemie S4 relacja R zyskuje dodatkowo własność przechodniości, a w konsekwencji mocniejszy sens dostępności. Tak więc jeśli świat w_2 jest dostępny dla w_1, to każdy świat dostępny dla w_2 jest również dostępny dla w_1. Przechodniość relacji R wynika w S4 z postulatu A7 $Lp \supset LLp$. Niech tym razem α będzie wyrażeniem $Lp \supset LLp$. Zakładając, że $V(\alpha, w_i)=F$, trzeba przyjąć, że $V(Lp, w_i)=T$ i $V(LLp, w_i)=F$. $V(Lp, w_i)=T$ w.t.w. Lp jest ogólnie ważne (prawdziwe) w świecie w_i, czyli *p* opisuje stan rzeczy zachodzący w każdym świecie, który jest osiągalny ze świata w_i. Natomiast $V(LLp, w_i)=F$ w.t.w. LLp nie jest ogólnie ważne (jest fałszywe) w świecie w_i, czyli *p* jest także fałszywe w jakimś świecie, który jest osiągalny ze świata osiągalnego z w_i. A to miałoby miejsce wówczas, gdyby relacja R nie była przechodnia.

jakiegoś systemu w.t.w. A jest ogólnie ważne (prawdziwe) we wszystkich swoich modelach (dla każdej struktury modelowej). Zob. S. K r i p k e, *Semantical Analysis of Modal Logic I, Normal Propositional Calculi*, „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik”, 9(1963), s. 68; t e n ż e, *Semantical Considerations on Modal Logic*, [w]: L. L i n s k y (red.), *Reference and Modality*, Oxford 1971, s. 63-72.

Warto zauważyć, iż w S4 wraz z dodatkowym warunkiem nałożonym na R zmienia się sens konieczności i możliwości. Można obecnie powiedzieć, że jakieś zdanie *p* jest możliwe w świecie aktualnym, jeśli jest ono prawdziwe w jakimś ze światów dostępnych dla świata aktualnego lub w jakimś świecie dostępnym dla któregoś z tych światów, które są dostępne dla aktualnego. W konsekwencji należy uznać, że co jest możliwie możliwe, jest możliwe, oraz że co jest koniecznie konieczne, jest konieczne[38].

Okazuje się, że relację dostępności można rozumieć w jeszcze mocniejszym sensie. Na gruncie S4 relacja ta jest zwrotna i przechodnia, ale nie jest symetryczna. Jest tu zatem do pomyślenia np. taka sytuacja, że świat bez telefonów byłby dostępny dla aktualnego (naszego) świata, lecz świat aktualny (z telefonami) nie byłby dostępny dla tamtego (bez telefonów). Relacja R zyskuje własność symetryczności dopiero w systemie S5, co wynika z przyjętego w nim postulatu A8 $Mp \supset LMp$. Niech α będzie teraz wyrażeniem $Mp \supset LMp$. Zakładając, że $V(\alpha, w_i)=F$, należy przyjąć, że $V(Mp, w_i)=T$ i $V(LMp, w_i)=F$. $V(Mp, w_i)=T$ znaczy, że *p* jest ogólnie ważne (prawdziwe) w jakimś świecie w_j osiągalnym ze świata w_i, $V(LMp, w_i)=F$ znaczy zaś, że nie istnieje żaden świat osiągalny ze świata w_i, w którym *p* byłoby ogólnie ważne (prawdziwe), co prowadzi do zaprzeczenia symetryczności relacji R.

Mocniejszy sens dostępności (osiągalności) w S5 pociąga za sobą również mocniejszy sens konieczności i możliwości. Zdaniem Hughesa i Cresswella S5 jest tym systemem, który wyraża ideę logicznej konieczności i możliwości w najszerszym, bezwarunkowym sensie. Uważają oni ponadto, że S5 najlepiej spośród wszystkich systemów modalnych odzwierciedla myśl filozoficzną Leibniza, głoszącą, że zdanie konieczne jest prawdziwe w każdym możliwym świecie[39]. W myśl bowiem ustaleń semantyki Kripkego dla systemu S5 każdy możliwy świat jest dostępny dla każdego innego świata, tak że jakieś zdanie konieczne w jakimś świecie jest bez ograniczeń prawdziwe w każdym możliwym świecie. Natomiast tam, gdzie są nałożone pewne ograniczenia na relację dostępności, jakieś zdanie konieczne w w_i nie musi być zdaniem prawdziwym we wszystkich możliwych światach, ale tylko w odpowiednim podzbiorze możliwych światów dostępnych dla w_i.

Taka sytuacja, tj. współistnienie wielu różnych systemów modalnych, na których gruncie inaczej rozumie się konieczność i możliwość logiczną, rodzi pytanie o to, który z nich jest poprawny. Pytanie to zresztą dawno już zostało w literaturze logicznej postawione[40]. Za tak sformułowanym pytaniem kryje

[38] Te zasady wyrażają S4 – prawa redukcji: $Mp \equiv MMp$, $Lp \equiv LLp$.

[39] Por. H u g h e s, C r e s s w e l l, *An Introduction*, s. 76, 79.

[40] Próbę odpowiedzi na nie podejmuje m.in. E. J. Lemmon w cytowanym już, napisanym

się jednak pewne założenie, że istnieje jakiś jeden sens konieczności i możliwości. Czy to założenie jest uzasadnione, to znaczy – czy faktycznie należy rozumieć kategorie modalne tylko w jeden sposób i konsekwentnie poszukiwać jednego systemu, który je poprawnie charakteryzuje? Systemy słabsze niż poprawny należałoby wówczas uznać za nie oddające całej prawdy o modalności, systemy mocniejsze zaś zawierałyby tezy w rzeczywistości fałszywe, aczkolwiek możliwe do przyjęcia. Uwzględniając opinię podzielaną przez większość współczesnych logików oraz dotychczas przeprowadzone analizy, można postawić następującą tezę: Wydaje się, iż poszukiwanie jednego poprawnego systemu modalnego jest nieuzasadnione, albowiem każdy z nich dostarcza tez prawdziwych o konieczności i możliwości, ale inaczej rozumianych[41].

W prezentacji semantyki algebraicznej dla systemów modalnej logiki zdań postąpi się analogicznie jak przy charakterystyce syntaktycznej w języku algebry, jako że podejście algebraiczne pozwala na jednorodne potraktowanie zarówno syntaktyki, jak i semantyki. Podejście algebraiczne do syntaktyki polegało na skorelowaniu systemu aksjomatycznego ze strukturami algebraicznymi. Podobnie i tu należy skorelować modele teoriomnogościowe dla systemów modalnych: T, S4 i S5 z pewnymi algebrami Boole'a. Postępując w ten sposób, uzyska się algebraiczną definicję ogólnej ważności (prawdziwości) w tych systemach.

W toku dotychczasowych wywodów ustalono, że uporządkowana trójka $\langle W, R, V\rangle$ stanowi model dla systemu T (S4, S5). Odpowiednikiem algebraicznym tak rozumianego T-modelu (S4-modelu, S5-modelu) jest T´-algebra (S4´-algebra, S5´-algebra). Ponadto T´-algebra pozostaje w ścisłym związku z wprowadzoną w rozważaniach syntaktycznych T-algebrą.

Elementy algebry Boole'a w T´-algebrze można traktować jako zbiory światów i konsekwentnie atomy jako indywidualne światy. Natomiast relacja R występująca w T´-algebrze posiada te same własności co w T-modelu. Do T´-algebry odzwieciedlającej strukturę T-modelu należy ponadto dodać funkcję – odpowiednio do funkcji V – przyporządkowującą wartości zmiennym, którą można scharakteryzować poprzez poniższe warunki. Analogicznie do [V~] $V(\sim\alpha, w_i)=T$ w.t.w. $V(\alpha, w_i)=F$ z semantyki Kripkego, w T´-algebrze występuje warunek: $V(\sim p)=-a$ w.t.w $V(p)=a$. Natomiast odpowiednikiem algebraicznym [V$\wedge$] $V(\alpha\wedge\beta, w_i)=T$ w.t.w. $V(\alpha, w_i)=T$ i $V(\beta, w_i)=T$ jest: $V(p\wedge q)=a\times b$ w.t.w $V(p)=a$ i $V(q)=b$.

wspólnie z G. P. Hendersonem, artykule *Is There Only One Correct System of Modal Logic?* (s. 23-56).

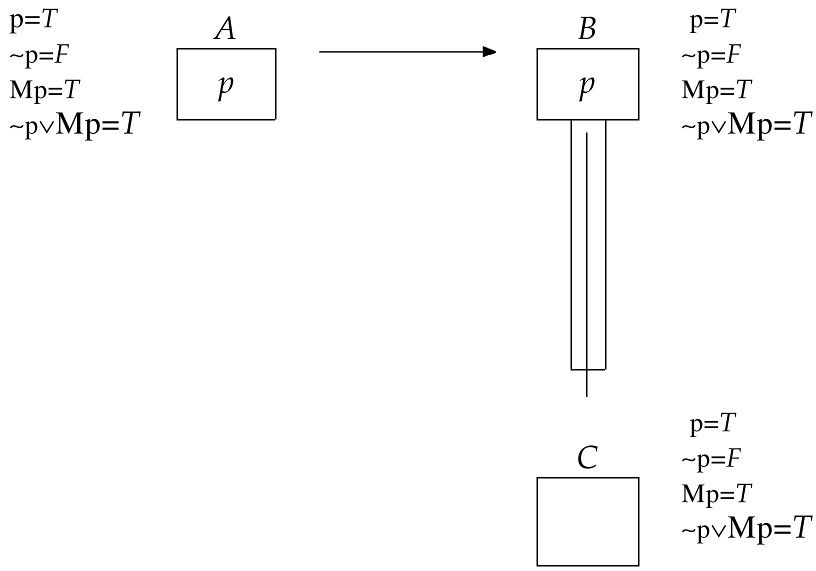
[41] Por. H u g h e s, C r e s s w e l l, *An Introduction*, s. 79.

Sytuacja się nieco komplikuje w przypadku podania algebraicznego odpowiednika warunku dla funktora modalnego. Ustalono już, że w dowolnym T-modelu Mα jest ogólnie ważne (prawdziwe) w świecie w_i w.t.w. α jest ogólnie ważne (prawdziwe) w przynajmniej jednym świecie w_j, takim, że w_iRw_j, gdzie R jest relacją zwrotną, określoną na zbiorze światów w modelu. Przekładając powyższy warunek [VM] na język algebry trzeba wykorzystać zdefiniowane wcześniej pojęcie atomu oraz twierdzenie B21, głoszące, że każdy różny od 0 element algebry można wyrazić jako sumę jedynego w swoim rodzaju, określonego zbioru atomów. Zatem warunek dotyczący funktora możliwości w T´-algebrze przyjmuje następującą postać:
$V(M\alpha)=(b^1 +...+ b^m)$ w.t.w. $V(\alpha)=a$ i $a^1, ..., a^k$ są wszystkimi atomami elementu a, i $b^1, ..., b^m$ są wszystkimi atomami w K, takimi, że dla każdego b^j $(1\leq j\leq m)$ b^jRa^i (gdzie a^i jest jednym z $a^1, ..., a^k$). Alternatywnie można powiedzieć, że $V(M\alpha)={*}a$ w.t.w. $V(\alpha)=a$, gdzie $*a$ jest sumą wszystkich atomów powiązanych relacją R z jakimś atomem elementu *a*[42].

Na bazie powyższych ustaleń można obecnie podać ścisłą definicję T´-algebry. $\langle K,-,\times,R\rangle$ jest T´-algebrą w.t.w. $\langle K, -, \times\rangle$ jest algebrą Boole'a, R zaś jest relacją zwrotną, określoną na elementach zbioru *K*. Sposób, w jaki została określona T´-algebra, upoważnia ponadto do stwierdzenia, że mając dany T-model można zawsze skonstruować T´-algebrę $\langle K, -, \times, R\rangle$ i funkcję przyporządkowującą wartości prawdziwościowe dla zmiennych, tak że:

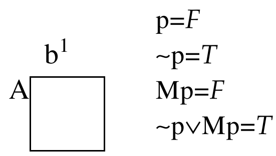
a) Z każdym $w_i \in W$ koresponduje jedyny w swoim rodzaju atom $a^i \in K$.
b) Kiedy zachodzi w_jRw_k, to dla korespondujących atomów mamy zależność a^jRa^k.
c) Dla jakiejkolwiek zmiennej zdaniowej p_m, $V(p_m)=(b^1 +...+ b^n)$, gdzie $b^1, ..., b^n$ są wszystkimi atomami korespondującymi ze światami w T-modelu, w których to światach $V(p_m)=T$. Oto przykład ułatwiający uchwycenie sensu c). Jeśli dla systemu T w semantyce relacyjnej zachodzi następująca sytuacja:

[42] Por. tamże, s. 325-328. Anglosascy autorzy zauważają, iż w T´-algebrze zamiast o relacji R można mówić o zbiorze funkcji spełniających określone warunki.



A, B, C – światy

czyli jeśli V(~p∨Mp)=V(p⊃Mp)=*T*, to w T´-algebrze V(p⊃Mp)=$b^1+b^2+b^3=1$, gdzie b^1, b^2, b^3 korespondują odpowiednio ze światami A, B, C. Natomiast w sytuacji:



V(p⊃Mp)=*T* w semantyce Kripkego, natomiast w T´-algebrze V(p⊃Mp)=$b^1=1$.

W powyższy sposób określona T´-algebra ⟨K,–,×,R⟩ wraz z funkcją przyporządkowującą wartości zmiennym koresponduje więc z T-modelem. Z dotychczasowych wywodów wynika ponadto, iż:

1) Jeśli V(α)=*T* w każdym świecie w dowolnym T-modelu, to dla korespondującej T´-algebry V(α) równa się sumie wszystkich atomów z K, która z kolei wynosi 1, a więc V(α)=1 w T´-algebrze.
2) Każdej T´-algebrze wraz z prawdziwościowym przyporządkowaniem odpowiada jakiś T-model.

Podobnie jak dla T-algebry, można obecnie podać definicję weryfikowania dowolnego wyrażenia α w T´-algebrze. Jest ona następująca: T´-algebra weryfikuje poprawnie zbudowane wyrażenie α systemu T w.t.w. dla każdego przyporządkowania zmiennym w α elementów zbioru K, $V(\alpha)=1$. Zdefiniowane pojęcie weryfikowalności posłuży z kolei do podania algebraicznej definicji ogólnej ważności (prawdziwości) wyrażeń zdaniowych w systemie T. Oto jej postać: Wyrażenie poprawnie zbudowane α jest ogólnie ważne (prawdziwe) w T w.t.w. α jest weryfikowane przez każdą T´-algebrę.

Uzyskane rezultaty powyższych dociekań dotyczą wprawdzie bezpośrednio systemu T, ale bez przeszkód można je rozszerzyć na systemy mocniejsze – S4 i S5, uwzględniając oczywiście odpowiednie własności relacji R.

III

System jest pełny w.t.w. każde wyrażenie ogólnie ważne (prawdziwe) zanotowane w języku tego systemu jest jego tezą[43]. Znaczy to, że prawdziwość (będącą własnością semantyczną) oraz dowodliwość czy dedukowalność (własność syntaktyczna) schodzą się. W rozważanym przypadku ogólna ważność (prawdziwość) jest związana z T´-algebrą, zaś tezowość z T-algebrą. Zatem aby dowieść pełności systemu T, trzeba wykazać, że obydwie algebry T i T´ weryfikują dokładnie te same formuły[44]. Innymi słowy, należy udowodnić dwa twierdzenia: T V i T VI.

T V Jeżeli $\langle K,-,\times,R\rangle$ jest T´-algebrą, to istnieje T-algebra $\langle K,-,\times,*\rangle$, która weryfikuje dokładnie te same wyrażenia poprawnie zbudowane co T´-algebra.

T VI Jeżeli $\langle K,-,\times,*\rangle$ jest T-algebrą, to istnieje T´-algebra $\langle K,-,\times,R\rangle$, która weryfikuje dokładnie te same wyrażenia poprawnie zbudowane co T-algebra.

[43] Por. B o r k o w s k i, *Wprowadzenie*, s. 376. Autorzy anglojęzyczni, a także niemieckojęzyczni posługują się zazwyczaj tym samym terminem na oznaczenie zarówno pełności systemu, jak i jego zupełności. Niektórzy odróżniają zupełność semantyczną (w obecnym rozumieniu pełności) oraz zupełność syntaktyczną. Inni wprowadzają dystynkcję: zupełność w sensie słabym (pełność) i zupełność w sensie mocnym (zupełność). Zob. H u g h e s, C r e s s w e l l, *An Introduction*, s. 19-20.

[44] Niealgebraiczny sposób dowodzenia pełności systemów modalnych prezentują G. E. Hughes, M. J. Cresswell (*An Introduction*: dla T – s. 96-104, dla S4 – s. 112-115, dla S5 – s. 121). Najogólniej mówiąc, polega on na wykazaniu, że dla każdego wyrażenia, którego prawdziwość została stwierdzona przy użyciu T-diagramu (S4-diagramu, S5-diagramu), istnieje dowód aksjomatyczny tego wyrażenia w odpowiednim systemie.

Etapy dowodu T V:

1. Mając daną strukturę $\langle K,-,\times,R\rangle$ jako T´-algebrę, aby skonstruować algebrę $\langle K,-,\times,*\rangle$, trzeba określić operację $*$ w terminach T´-algebry.
2. Lemat 1. $\langle K,-,\times,*\rangle$ ze zdefiniowanym operatorem $*$ (w kroku 1) jest T-algebrą.
3. Lemat 2. $\langle K,-,\times,*\rangle$ i $\langle K,-,\times,R\rangle$ weryfikują dokładnie te same wyrażenia.

Dowód:

Ad 1.
Definicja indukcyjna $*$ – operacji za pomocą terminów T´-algebry (R).
(i) $*0=0$
(ii) dla każdego $a\in K$, jeśli $a\neq 0$, to $*a=(b^1+...+b^m)$, gdzie b^1, ..., b^m są wszystkimi atomami związanymi relacją R (w T´-algebrze) z jakimkolwiek atomem elementu *a*.

Ad 2.
L1 $\langle K,-,\times,*\rangle$ ze zdefiniowanym operatorem $*$ za pomocą definicji (i), (ii) jest T-algebrą.

W celu udowodnienia L1 należy dowieść wszystkie postulaty dla operatora $*$ obowiązujące w T-algebrze, czyli postulaty 2.1-2.4.

a) 2.1 Jeśli $a\in K$, to $*a\in K$

Dowód:

1. $\langle K,-,\times\rangle$ jest algebrą Boole'a	z.
2. $a\in K$	z.
3. $a=0 \vee a\neq 0$	2, 1
1.1 $a=0$	z.d.
1.2 $*a=*0$	1.1, rozumienie „=”
1.3 $*0=0$	def (i)
1.4 $*a=0$	1.2, 1.3
1.5 $0\in K$	1.1, 2
1.6 $*a\in K$	1.4, 1.5
2.1 $a\neq 0$	z.d.
2.2 a jest sumą pewnej liczby atomów z K	2.1, 2, 1
2.3 każdy atom, o którym jest mowa w 2.2 jest związany z samym sobą przez R	zwrotność R, 2.2
2.4 zawsze będzie pewien atom związany przez R z jakimś atomem a, czyli $*a$ będzie złożone przynajmniej z jednego atomu	2.3, def (ii)
2.5 $*a\in K$	2.4, def (ii), 2
$*a\in K$	$\begin{bmatrix} 1.1 \rightarrow 1.6 \\ 2.1 \rightarrow 2.5 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) 2.2 Jeśli $a \in K$, to $a \subset {*}a$

Dowód:

1. $\langle K,-,\times\rangle$ jest algebrą Boole'a	z.
2. $a \in K$	z.
3. $a=0 \vee a \neq 0$	2, 1
1.1 $a=0$	z.d.
1.2 ${*}a=0$	def (i)
1.3 $0 \subset 0$	twierdzenie
1.4 $0 \subset {*}0$	1.3, 1.2
1.5 $a \subset {*}a$	1.4, 1.1
2.1 $a \neq 0$	z.d.
2.2 $a^1, \ldots, a^k$ są wszystkimi atomami elementu a	z.
2.3 $a=(a^1 + \ldots + a^k)$	2.2
2.4 każdy z $a^1, \ldots, a^k$ jest jednym z $b^1, \ldots, b^m$	zwrotność R, 2.3, def(ii)
2.5 $a \subset (a+b)$	B15
2.6 $a \subset ((a^1 + \ldots + a^k)+(b^1 + \ldots + b^m))$	2.5, 2.3, 2.4
2.7 $a \subset (b^1 + \ldots + b^m)$	2.4, 2.6
2.8 $a \subset {*}a$	2.7, def (ii)
$a \subset {*}a$	$\begin{bmatrix} 1.1 & \rightarrow & 1.5 \\ 2.1 & \rightarrow & 2.8 \\ 3 & & \end{bmatrix}$

c) 2.3 Jeśli $a,b \in K$, to ${*}(a+b)={*}a+{*}b$

Dowód:

1. $\langle K,-,\times\rangle$ jest algebrą Boole'a	z.
2. $a,b \in K$	z.
3. $(a=0 \vee a \neq 0) \wedge (b=0 \vee b \neq 0)$	2, 1
4. $a=b=0 \vee a=0 \wedge b \neq 0 \vee a \neq 0 \wedge b=0 \vee a \neq 0 \wedge b \neq 0$	3
1.1 $a=b=0$	z.d.
1.2 ${*}(0+0)={*}0=0$	def (i)
1.3 ${*}0+{*}0=0+0=0$	def (i)
1.4 ${*}(0+0)={*}0+{*}0$	1.2, 1.3
1.5 ${*}(a+b)={*}a+{*}b$	1.4, 1,1
2.1 $a=0 \wedge b \neq 0$	z.d.
2.2 ${*}(0+b)={*}b$	B11
2.3 ${*}0+{*}b=0+{*}b={*}b$	def (i), B11
2.4 ${*}(0+b)={*}0+{*}b$	2.2, 2.3
2.5 ${*}(a+b)={*}a+{*}b$	2.4, 2.1
3.1 $a \neq 0 \wedge b=0$	z.d.

3.2 $*(a+0)=*a$	B11
3.3 $*a+*0=*a+0=*a$	def (i), B11
3.4 $*(a+0)=*a+*0$	3.2, 3.3
3.5 $*(a+b)=*a+*b$	3.4, 3.1
4.1 $a\neq 0 \wedge b\neq 0$	z.d.
4.2 atomy elementu a+b są dokładnie atomami elementu a łącznie z atomami elementu b	2, 1
4.3 atomy związane relacją R z jakimkolwiek atomem elementu a+b są dokładnie tymi samymi atomami związanymi przez R z jakimkolwiek atomem elementu a łącznie z atomami związanymi przez R z jakimkolwiek atomem elementu b	4.2, def (ii)
4.4 $*(a+b)=*a+*b$	4.3, def (ii)
$*(a+b)=*a+*b$	$\begin{bmatrix} 1.1 \to 1.5 \\ 2.1 \to 2.5 \\ 3.1 \to 3.5 \\ 4.1 \to 4.4 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) 2.4 $*0=0$

Dowód:

$*0=0$	def (i)

Ad 3.

L2 $\langle K,-,\times,*\rangle$ i $\langle K,-,\times,R\rangle$ weryfikują dokładnie te same wyrażenia.

Dowód:

1. K, $-$, $\times$ są identyczne w obu algebrach	z.
2. $\sim$ i $\wedge$ będą reprezentowane w ten sam sposób w każdej z dwóch algebr	z.
3. $V(\alpha)=a$	z.
4. $V(M\alpha)=*a$ w T-algebrze	z.
5. $V(M\alpha)=(b^1+...+b^m)$ w T'-algebrze	z.
6. $*a=(b^1+...+b^m)$	1, 2, 3, 4, 5
T-algebra i T'-algebra weryfikują dokładnie te same wyrażenia	6

Wniosek:

Jeżeli wyrażenie poprawnie zbudowane α jest weryfikowane przez każdą T'-algebrę, czyli α jest ogólnie ważne (prawdziwe) w T, to α jest weryfikowane przez każdą T-algebrę, czyli α jest tezą T. (L1, L2)

Etapy dowodu T VI:

1. Mając daną strukturę $\langle K,-,\times,*\rangle$ jako T-algebrę, aby skonstruować algebrę $\langle K,-,\times,R\rangle$, trzeba określić relację R w terminach T-algebry.
2. Lemat 1. Jeżeli $\langle K,-,\times,*\rangle$ jest T-algebrą, to $\langle K,-,\times,R\rangle$ ze zdefiniowaną relacją R (w kroku 1) jest T´-algebrą.
3. Lemat 2. $\langle K,-,\times,*\rangle$ i $\langle K,-,\times,R\rangle$ weryfikują dokładnie te same wyrażenia.

Dowód:

Ad 1.
Definicja relacji R za pomocą terminu operacji $*$:
Dla jakiegokolwiek $a,b\in K$, bRa w.t.w. dla każdego atomu b^j elementu b istnieje jakiś atom a^i elementu a, taki, że $b^j\subset *a^i$.

Ad 2.
L1 Jeżeli $\langle K,-,\times,*\rangle$ jest T-algebrą, to $\langle K,-,\times,R\rangle$ ze zdefiniowaną relacją R jest T´-algebrą.
Dowód:

1. $\langle K,-,\times,*\rangle$ jest T-algebrą	z.
2. $a,b\in K$	z.
3. bRa w.t.w. dla każdego atomu b^j elementu b istnieje atom a^i elementu a, taki, że $b^j\subset *a^i$	def R
4. aRa w.t.w. dla każdego atomu a^j elementu a istnieje atom a^i elementu a, taki, że $a^j\subset *a^i$	3
5. a^i może być a^j dla jakiegokolwiek a^j	4
6. $a^j\subset *a^j$	5, 4, 1, war. 2.2 (jeśli $a^j\in K$, to $a^j\subset *a^j$)
7. R jest zwrotna w K (bo dla każdego $a\in K$ jest aRa)	2, 3, 4, 6
$\langle K,-,\times,R\rangle$ jest T´-algebrą	7

Ad 3.
L2 $\langle K,-,\times,*\rangle$ i $\langle K,-,\times,R\rangle$ weryfikują dokładnie te same wyrażenia.
Dowód:

1. K, $-$, $\times$ są identyczne w obu algebrach	z.
2. $a,b\in K$	z.
3. $V(\alpha)=a$	z.
4. $V(M\alpha)=*a$ w T-algebrze	z.
5. $V(M\alpha)=(b^1+...+b^m)$ w T´-algebrze, gdzie $b^1, ..., b^m$ są wszystkimi atomami z K związanymi relacją R z jakimkolwiek atomem elementu a	z.
6. każdy b^j z $b^1, ..., b^m$ jest zawarty w jednym	

z $*a^i$, gdzie poszczególne a^i są atomami elementu a	5, def R
7. każdy atom zawarty w $*a^i$ jest jednym z b^j, gdzie a^1, ..., a^k są wszystkimi atomami elementu a	5, def R
8. jeśli a^1, ..., a^k są wszystkimi atomami elementu a, to $(b^1+...+b^m)=(*a^1 +...+ *a^k)$	3, 6, 7, def atomu
9. $(b^1 +...+b^m) = *(a^1 +...+ a^k)$	8, war. 2.3
10. $(b^1 +...+b^m) = *a$[45]	9, B23, 7
11. wyrażenia zawierające M są oszacowane w ten sam sposób w obydwu algebrach	10
T-algebra i T´-algebra weryfikują dokładnie te same wyrażenia	11

Wniosek:
L1 i L2 dowodzą T VI.

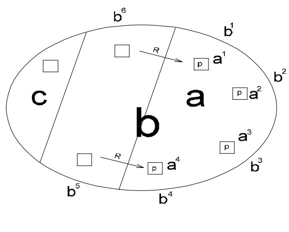
T V i T VI dotyczą, jak już wcześniej wspomniano, również systemów S4 i S5. Znaczy to, że – podobnie jak T – systemy owe posiadają własność pełności. Twierdzenia o pełności przybierają dla nich następującą postać:

T V Jeżeli ⟨K,–,×,R⟩ jest S4´-algebrą (S5´-algebrą), to istnieje S4-algebra (S5-algebra) ⟨K,–,×,∗⟩, która weryfikuje dokładnie te same wyrażenia co S4´-algebra (S5´-algebra).

T VI Jeżeli ⟨K,–,×,∗⟩ jest S4-algebrą (S5-algebrą), to istnieje S4´-algebra (S5´-algebra) ⟨K,–,×,R⟩, która weryfikuje dokładnie te same wyrażenia co S4-algebra (S5-algebra).

Dowody tych twierdzeń ulegają niewielkim modyfikacjom w stosunku do poprzednich. Dla przykładu ukaże się te modyfikacje dla T V. Występują one tylko w drugim etapie dowodu, albowiem trzeba tu dodatkowo udowodnić, że

[45] Łatwiej można uchwycić sens odnośnych zależności analizując poniższy schemat:



$V(p)=a^1+a^2+a^3+a^4$
$V(Mp)=b^1+b^2+b^3+b^4+b^5+b^6$
Ale warto zauważyć, że $b^1 \subset *a^1$, ..., $b^4 \subset *a^4$, $b^5 \subset *a^4$, $b^6 \subset *a^1$, stąd
$V(Mp)=*a^1+*a^2+*a^3+*a^4=*(a^1+a^2+a^3+a^4)=*a$.

spełnione są postulaty 3.1 dla S4-algebry i 3.2 dla S5-algebry. Innymi słowy, należy dołożyć do przedstawionego wcześniej dowodu dla T dowody brakujących postulatów:

e) 3.1 Jeśli $a \in K$, to $*a = **a$ (dla S4-algebry)

Dowód:

1. $\langle K, -, \times \rangle$ jest algebrą Boole'a	z.
2. $a \in K$	z.
3. $a=0 \vee a \neq 0$	2, 1
1.1 $a=0$	z.d.
1.2 $*0=0$	def (i)
1.3 $**0=*0=0$	def (i)
1.4 $*0=**0$	1.2, 1.3
1.5 $*a=**a$	1.4, 1.1
2.1 $a \neq 0$	z.d.
2.2 $*a=(b^1 + ... + b^m)$, gdzie $b^1, ..., b^m$ są wszystkimi atomami związanymi relacją R z jakimkolwiek atomem elementu a	def (ii), 2, 2.1
2.3 $**a=(c^1 + ... + c^n)$, gdzie $c^1, ..., c^n$ są wszystkimi atomami związanymi relacją R z jakimkolwiek atomem $b^1, ..., b^m$	def (ii), 2, 2.1, 2.2
2.4 $c^1, ..., c^n$ są same powiązane relacją R z atomami elementu a	przechodniość R,2.2,2.3
2.5 $(b^1 + ... + b^m) = (c^1 + ... + c^n)$	2.2, 2.3, 2.4
2.6 $*a=**a$	2.2, 2.3, 2.5
$*a=**a$	$\begin{bmatrix} 1.1 \rightarrow 1.5 \\ 2.1 \rightarrow 2.6 \\ 3 \end{bmatrix}$

f) 3.2 Jeśli $a \in K$, to $*a=1$, o ile $a \neq 0$ (dla S5-algebry)

Dowód:

1. $\langle K, -, \times \rangle$ jest algebrą Boole'a	z.
2. $a \in K$	z.
3. $a=0 \vee a \neq 0$	2, 1
1.1 $a=0$	z.d.
1.2 $*0=0$	def (i)
2.1 $a \neq 0$	z.d.
2.2 $*a=(b^1 + ... + b^m)$, gdzie $b^1, ..., b^m$ są wszystkimi atomami związanymi relacją R	

z jakimkolwiek atomem elementu a	def (ii), 2, 2.1
2.3 $b^1, \ldots, b^m$ są wszystkimi atomami z K	równoważnościowość R, 2.2
2.4 $(b^1 + \ldots + b^m)=1$	B22, 2.3
2.5 $*a=1$	2.4, 2.2
jeśli a=0, to $*a=0$	
jeśli a=1, to $*a=1$	$\begin{bmatrix} 1.1 & \to & 1.2 \\ 2.1 & \to & 2.5 \\ 3 & & \end{bmatrix}$

Podsumowując zawartość treściową artykułu, można powiedzieć, że najwięcej uwagi poświęcono algebraicznemu ujęciu syntaktyki i semantyki kilku podstawowych systemów współczesnej logiki modalnej. Jednakże głównie wyeksponowano semantykę tych systemów, którą przedstawia się niekiedy w literaturze jako doniosłą filozoficznie. Przeprowadzone zostały również, jak się wydaje, wyczerpujące analizy metalogiczne i ściśle logiczne, ukazujące związki zachodzące między modelami teoriomnogościowymi występującymi w semantyce S. Kripkego a odpowiednimi modelami algebraicznymi.

ON THE RELATIONS BETWEEN S. KRIPKE'S
SIMPLIFIED SEMANTICS FOR THE SYSTEMS OF MODAL LOGIC
AND AN ALGEBRAIC APPROACH TO THE SYNTAX OF THESE SYSTEMS
AND THEIR SEMANTICS

S u m m a r y

The first part of this paper presents the syntax of several most important systems of contemporary modal propositional logic. The presentation is given in two versions: typical and algebraical. The second part deals with the semantics of the systems in question. Here one highlights especially this semantics which is often regarded in texts as philosophically crucial. The paper seeks to give, as it seems, exhaustive metalogical and strictly logical analyses, which show the relations between the models of set theory, which occur in S. Kripke's semantics, and appropriate algebraic models. The formalization of the algebraic theorems which deal with the completeness of the systems under analysis is the central aim of the third part of this paper.

Translated by Jan Kłos