

HENRYK PIERSA

Lublin

DYSKRETNE WIELKOŚCI FIZYCZNE W TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

W fizyce występują dwa rodzaje wielkości fizycznych: wielkości ciągłe i dyskretne. Wielkości ciągłe charakteryzują się tym, że dla danego układu mogą przyjmować dowolną wartość liczbową z określonego przedziału liczb rzeczywistych, podczas gdy wielkości dyskretne przyjmują dyskretny, przeważnie nieskończony zbiór wartości numerycznych. Wśród wielkości dyskretnych wyróżnia się wielkości nieskwantowane i skwantowane. Przykładem nieskwantowanych wielkości fizycznych jest zbiór częstości własnych różnego rodzaju układów drgających: zamocowanej na końcach struny o długości „l”:

$$\omega_n = n \frac{\pi v}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

zamocowanej na obrzeżu membrany prostokątnej o bokach „a” i „b”:

$$\omega_{nm} = \pi v \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

zamocowanej na obrzeżu membrany kołowej o promieniu „R”:

$$\omega_{nm} = v \frac{\mu_m^n}{R}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots. \quad (3)$$

We wzorach 1–3 „v” oznacza prędkość fali akustycznej, zaś μ_m^n – n-te miejsce zerowe funkcji Bessela rzędu „m”. Analogiczne do podanych wzory na dozwolone częstości drgań własnych znajduje się dla innych układów drgających: płyt, prętów, słupów gazu zamkniętych w różnych naczyniach (np. piszczałce, rezonatorze) itp.

Jako przykład wielkości skwantowanych wymienia się energię mikroobiektu (atom, molekuly, jądra atomowego), jego moment pędu (orbitalny, spinowy, całkowity), tzw. z-wą składową tego momentu, energię rotatora, oscylatora kwadratowego albo promieniowania.

Tytułem egzemplifikacji przytaczamy wzory na dozwolone wartości energii atomu wodoru (w przybliżeniu nierelatywistycznym):

$$E_n = - \frac{m e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

orbitalnego momentu pędu:

$$|\mathbf{I}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

i jego składowej z-wej:

$$I_z = \hbar m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l. \quad (6)$$

Jak wynika ze wzorów (4)–(6), dozwolone wartości tych wielkości wyrażają się stałymi uniwersalnymi: masą elektronu „m”, ładunkiem elektrycznym „e”, tzw. kreskowaną stałą Plancka $\hbar = h : 2\pi$ oraz określonymi wartościami numerycznymi liczb kwantowych: głównej „n”, pobocznej „l” i magnetycznej „m”. Dlatego też dla dowolnego atomu wodoru (a przy pewnej modyfikacji i atomu pierwiastka wodoropodobnego) przyjmują one stałe wartości liczbowe.

Należy zauważyć, że wśród wielkości uważanych za skwantowane występują i takie, których wartość liczbową może się zmieniać. Energia oscylatora czy promieniowania jest funkcją częstości.

Zwykle kwantową fizykę mikroobiektów przeciwstawia się niekwantowej fizyce obiektów makroskopowych. Jednakże wśród tych ostatnich można wskazać niemały zbiór układów drgających, których częstości są skwantowane w podobnym sensie, w jakim skwantowana jest energia oscylatora kwantowego czy promieniowania.

Warto także zauważyć, że w pewnym sensie można mówić o swoistej quasi-kwantyzacji energii makroskopowych układów drgających. Okazuje się, że energia zamocowanej na końcach struny o długości l , pobudzonej w miejscu $x = c \pm \delta$ do drgań przez nadanie prędkości początkowej v_0 (przez uderzenie młoteczką o szerokości 2δ , jak w przypadku struny fortepianu) wyraża się wzorem:

$$E_n = \frac{4mv_0}{\pi^2 n^2} \sin^2 n \frac{\pi c}{l} \sin^2 n \frac{\pi \delta}{l} \quad (7)$$

gdzie m oznacza masę struny.

¹ A. N. T i c h o n o w, A. A. S a m a r s k i j, *Urawnienia matematycznej fizyki*, Moskwa 1972, s. 140-142.

Z powyższego wzoru wynika, iż dla danej struny (stałe m i l), naciągniętej określoną siłą, która w miejscu $c \pm \delta$ uzyskuje daną prędkość początkową v_0 , dozwolone wartości energii poszczególnych alikwotów tworzą dyskretny zbiór wartości odwrotnie proporcjonalnych do kwadratu rzędu n alikwotu.

Zasadnicza różnica pomiędzy wzorami (4) i (7) polega na tym, że w przypadku pierwszym E_n wyraża się kombinacją algebraiczną stałych uniwersalnych, a w drugim – wielkości mogących przyjmować (z pewnego przedziału) wielkości zmienne. Nawet dla danej struny, naciągniętej daną siłą, zmieniając prędkość początkową (albo wychylenie początkowe) lub miejsce pobudzenia, otrzymujemy różne wartości na E_n (z określonego przedziału).

Jest zastanawiające, że występujące we wzorach (1)–(6) wskaźniki n , l , m , numerujące dozwolone poziomy energetyczne, dozwolone wartości momentu pędu, jego składowej z -wej i dozwolone częstotliwości, otrzymuje się w wyniku rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych, cząstkowych z określonymi warunkami brzegowymi. Zachowanie drgającej struny lub membrany opisuje równanie falowe, mikroobiekty – w przybliżeniu nierelatywistycznym – równanie Schrödingera. Są to cząstkowe równania różniczkowe liniowe II rzędu. Aby rozwiązanie któregoś z wymienionych (i innych) równań opisywało zachowanie określonego układu lub mikroukładu, oprócz warunków początkowych, trzeba podać jeszcze tzw. warunki brzegowe. Stanowią je pewne równości matematyczne charakteryzujące stan układu (mikroukładu) na jego brzegu. Na przykład, wychylenie zamocowanej na końcach struny czy zamocowanej na obrzeżu membrany musi wynosić „0” albo wartość funkcji falowej w nieskończoności musi być skończona.

W wielu ważnych dla fizyki przypadkach omawiane (i inne) równania cząstkowe rozwiązuje się metodą rozdzielania zmiennych, czyli metodą Fouriera. Istota tej metody polega na tym, że funkcję wielu zmiennych spełniającą dane równanie cząstkowe przedstawia się w postaci iloczynu nowych funkcji, z których każda zależy tylko od jednej zmiennej. W wyniku podstawienia tego iloczynu do rozwiązywanego równania i rozdzielania zmiennych otrzymuje się kilka równań zwyczajnych dla poszczególnych zmiennych. Zastosujemy tę metodę do najprostszego równania cząstkowego – równania falowego dla struny:

$$u''_{xx}(x, t) = v^{-2}u''_{tt}(x, t). \quad (8)$$

Do tego równania, rozwiązywanego dla zamocowanej na końcach struny o długości l , dodaje się następujące warunki brzegowe: $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ wyrażające ten fakt, że początek struny ($x = 0$) i jej koniec ($x = l$) w dowolnej chwili t nie mogą się wychylać z położenia równowagi.

W myśl powyższego stwierdzenia poszukujemy rozwiązania równania (8) w formie iloczynu:

$$u(x,t) = X(x) T(t). \quad (9)$$

Po podstawieniu drugich pochodnych z (9) po x i t do (8) oraz rozseparowaniu zmiennych, otrzymujemy układ równań zwyczajnych:

$$X''(x) + d^2X(x) = 0 \quad (10)$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \text{ gdzie } \omega = vd \quad (11)$$

z warunkami brzegowymi dla funkcji X :

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \quad (12)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (10) jest funkcja:

$$X(x) = A \cos dx + B \sin dx, \quad (13)$$

w której stałe A i B wyznacza się z warunków (12). Zastosowanie pierwszego z warunków (12) pozwala stwierdzić, iż $A = 0$. Aby przy zastosowaniu drugiego z warunków (12) otrzymać nietrywialne rozwiązanie, trzeba przyjąć, iż:

$$d_n l = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

W powyższej równości n oznacza n -te miejsce zerowe funkcji $\sin d_n l$. Wzór (1) otrzymuje się przez podstawienie d_n z (14) do równości $\omega_n = v d_n$; por. (11).

Jak wynika z przedstawionego rozumowania, dyskretne widmo częstości jest konsekwencją rodzaju funkcji $X(x)$, warunków brzegowych, które ona musi spełniać, jeżeli wraz z rozwiązaniem równania (11) ma opisywać drgania struny. Warto także zauważyć, iż nieskończony ciąg częstości własnych jest konsekwencją posiadania przez funkcję *sinus* nieskończonego zbioru miejsc zerowych.

Innym warunkiem fizycznym, pozwalającym otrzymać dyskretne widmo wartości własnych dla odpowiedniego równania różniczkowego, jest cecha jednoznaczności rozwiązania tego równania. Przy rozwiązywaniu równania falowego dla membrany kołowej, równania Schrödingera dla atomu wodoru oraz wielu innych równań, jedno z równań zwyczajnych (dla funkcji kąta φ) ma postać:

$$F''(\varphi) + v^2 F(\varphi) = 0, \quad (15)$$

identyczną z postacią równań (10), (11). Trzeba tylko dokonać odpowiedniej zmiany zmiennych. Rozwiązanie tego równania jest tego samego kształtu, co funkcja (13). Należy przy tym podkreślić, że tego kształtu rozwiązanie spełnia równanie (15), przy dowolnej wartości stałej $v \in R$. Jeżeli jednak omawiane rozwiązanie, odpowiednio fizykalnie zinterpretowane, ma opisywać konkretną sytuację fizyczną (np. wychylenie cząsteczek membrany, prawdopodobieństwo znalezienia elektronu itp.), należy na nie nałożyć warunek jednoznaczności: wartość omawianej funkcji nie może ulec zmianie, gdy jej argument zmieni się o kąt $\pm 2\pi$. Spełnienie tego żądania jest możliwe, gdy się przyjmie, że $v = m$, gdzie $m \in C$. W ten sposób wymóg jednoznaczności funkcji generuje różne sposoby drgań (tzn. *mody*) membrany, a pośrednio i jej częstotści; por. (3). Porównanie tej wartości stałej m z wartościami własnymi operatora z-wej składowej momentu pędu w atomie wodoru pozwala interpretować m jako magnetyczną liczbę kwantową o wartościach podanych przy równości (6).

Warunkiem matematycznym i fizycznym, generującym różne zbiory dyskretnych wartości własnych, jest określoność² rozwiązań pewnych równań różniczkowych. Wśród równań zwyczajnych otrzymywanych przy separacji zmiennych występują tzw. równania specjalne: Bessela, Legendre'a, Laguerre'a itp. Rozwiązań tego typu równań poszukuje się w postaci szeregów potęgowych. Aby odpowiednie szeregi można było traktować jako rozwiązania wymienionych równań, muszą one być jednostajnie zbieżne. Wymóg ten winny spełniać także szeregi otrzymane z pierwszych, dzięki różniczkowaniu po odpowiednich zmiennych. Tylko bowiem funkcje określone w danej dziedzinie mogą być różniczkowane względem swoich argumentów.

W praktyce określoność tego rodzaju rozwiązań uzyskujemy poprzez uwzględnienie tylko skończonej liczby składników (urwanie szeregu na n -tym wyrazie)³. Matematyczne warunki zapewniające urwanie szeregu prowadzą do żądania, aby występujące w rozwiązywanym równaniu stałe przyjmowały określone ciągi liczbowe. Na przykład w równaniu Legendre'a owa stała musi być równa $1(1+1)$, ($1 \in C^+$), w równaniu Laguerre'a – $n(n \in N)$.

Omawiane funkcje (wielomiany) występują w rozwiązaniach równań Legendre'a, Laguerre'a, Hermite'a, Bessela, a pośrednio w równaniach cząstkowych: Schrödingera czy falowym. Dozwolone wartości liczby n określają energię atomu, liczby l – jego orbitalny moment pędu. Należy podkreślić, że żądanie określoności rozwiązania równania mającego opisywać zachowanie konkretnego układu fizycznego jest także wymogiem fizycznym. Funkcja opisująca drgania

² W praktyce idzie tu nawet o ciągłość i różniczkowalność.

³ Por. np. H. M a r g e n a u, G. M. M u r p h y, *Matematyka w fizyce i chemii*, tłum. B. Borkowski i in., Warszawa 1962, s. 69-87.

membrany kołowej czy funkcja falowa określająca prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w określonym punkcie przestrzeni nie mogą być nieskończenie wielkie.

Dyskretne wartości własne różnych równań różniczkowych (czy odpowiednich operatorów) łączą się z metodą Fouriera rozwiązywania równań cząstkowych. W związku z tym rodzą się następujące pytania: a) o niezawodność metody rozdzielania zmiennych; b) o wpływ sytuacji fizycznej na wybór metody rozwiązania równania cząstkowego; c) o zakres stosowalności metody Fouriera; d) o to, czy metoda ta zawsze prowadzi do dyskretnego widma częstości własnych, a także e) czy dla danego zagadnienia trafnie ustalono odpowiednie równanie różniczkowe; f) czy jest ono ściśle czy tylko przybliżone; g) w jakim stopniu przybliżoność równania wpływa na przybliżoność jego rozwiązania?

Ad a) Przy prezentacji metody Fouriera mogła zrodzić się wątpliwość, czy proponowane przez nią wyrażenie jest właściwym rozwiązaniem danego równania. W teorii równań różniczkowych przeprowadza się rozumowania, których wynikiem jest twierdzenie głoszące, że znaleziona funkcja jest rozwiązaniem i to rozwiązaniem jedynym (twierdzenie o istnieniu i jedyności rozwiązania). W odniesieniu do metody Fouriera istnieją dwa alternatywne sposoby uzasadnienia tego twierdzenia⁴.

Ad b) W teorii równań cząstkowych funkcjonują różne metody ich rozwiązywania: metoda Fouriera, d'Alemberta, metoda funkcji Greena. Wybór jednej z nich zależy od rodzaju równania oraz sytuacji fizycznej, do której rozwiązywane równanie się odnosi. Idzie tutaj o to, czy układ fizyczny jest przestrzennie ograniczony, czy nieograniczony, a w związku z tym: czy dane równanie różniczkowe rozwiązuje się z warunkami brzegowymi (i początkowymi), czy bez warunków brzegowych. Dla układów przestrzennie nieograniczonych (nieskończenie długa struna, propagacja fali elektromagnetycznej w nieograniczonej przestrzeni) równanie falowe rozwiązuje się metodą d'Alemberta. Dla układów przestrzennie ograniczonych (struna o skończonej długości, membrana, przewodzący ciepło pręt o skończonej długości), wraz z określonymi warunkami na ich granicy, stosuje się metodę Fouriera.

Ad c) Najogólniej można powiedzieć, że metodę rozdzielania zmiennych można stosować do dowolnego równania cząstkowego, w którym dają się rozseparować zmienne. Poza równaniem falowym (typu hiperbolicznego) do tej klasy należą także równania typu parabolicznego (równanie przewodnictwa cieplnego, dyfuzji) i równania typu eliptycznego (równanie Laplace'a, Poissone'a, Helm-

⁴ I. P i e t r o w s k i, *Równania różniczkowe cząstkowe*, tłum. F. Barański, Warszawa 1955, s. 163 n.

holtza)⁵. Z powodzeniem omawianą metodę stosuje się do pewnych rodzajów równań cząstkowych czwartego rzędu (równanie poprzecznych drgań prętów, płyt).

Wspomniano już, że metodę Fouriera stosuje się do równań cząstkowych z określonymi warunkami brzegowymi (o pewnym wyjątku będzie mowa niżej). W związku z tym wyrażenie „zakres stosowalności...” należy odnieść również do warunków brzegowych. Rozróżnia się także tzw. jednorodne i niejednorodne warunki brzegowe. Pierwsze z nich charakteryzują się tym, że spełnia je też rozwiązanie trywialne, podczas gdy drugich to rozwiązanie nie spełnia⁶. Metodę Fouriera w zasadzie stosuje się do równań cząstkowych z jednorodnymi warunkami brzegowymi. Tylko w nielicznych przypadkach równań z niejednorodnymi warunkami brzegowymi (np. określającymi stałą różnicę temperatur na końcach przewodzącego ciepło pręta), dzięki odpowiedniemu przereformowaniu zagadnienia⁷, możliwe jest także zastosowanie omawianej metody.

Ad d) Nie zawsze stosowanie metody Fouriera wiedzie do dyskretnego widma wartości własnych. Klasycznym przykładem odstępstwa od tej prawidłowości jest przewodnictwo cieplne w nieskończenie długim pręcie. Brak warunków brzegowych dla tego zagadnienia powoduje, że zamiast dyskretnego pojawia się widmo ciągłe⁸. W związku z tym zamiast wyrażenia „rozwiązać równanie cząstkowe z danymi warunkami brzegowymi” w żargonie matematyków występuje zwrot „rozwiązać dane zagadnienie brzegowe”. Dla równania typu eliptycznego formułuje się je w postaci zagadnienia Stuma-Liouville’a: znaleźć zbiór wartości własnych λ_n , dla których równanie $\Delta u + \lambda_n u = 0$, z jednorodnymi warunkami brzegowymi $u_s = 0$, w obszarze D , ma nietrywialne rozwiązanie $u(P)$ dla $P \in D$.

Ad e) Większość, jeśli nie wszystkie, równań cząstkowych mających zastosowanie w różnych teoriach fizyki była ustalana na podstawie analizy konkretnego układu fizycznego i możliwości zachodzenia w nim określonego procesu. Nazwy „równanie falowe struny”, „równanie falowe membrany” czy „równanie przewodnictwa cieplnego” wskazują na fizyczną genezę tych równań. Zwykle się mówi, iż równanie Schrödingera czy Diraca jest przyjęte w formie postulatu. Przy poszukiwaniu któregoś z pierwszej grupy równań postulowano model układu fizycznego i zachodzącego w nim procesu. Modelem struny miała być cienka, idealnie sprężysta, jednorodna nić, modelem membrany – cienka,

⁵ Niezależne od czasu równanie Schrödingera jest równaniem typu równania Helmholtza.

⁶ T i c h o n o w, S a m a r s k i j, dz. cyt., 41.

⁷ I. G. A r a m a n o w i c z, W. I. L e w i n, *Urawnienia matematycznej fizyki*, Moskwa 1964, s. 173-186.

⁸ Tamże, s. 153 n.

jednorodna, idealnie sprężysta powierzchnia. Dla każdego z tych układów zakłada się ciągłość odpowiednich wielkości (np. gęstości). Tylko bowiem przy tym założeniu jest usprawiedliwione traktowanie wychylenia lub prędkości jako ciągłych funkcji położenia i czasu oraz jest dopuszczalne ich różniczkowanie odpowiednią liczbą razy po tych argumentach. Model zachodzącego w takim wyidealizowanym układzie procesu stanowią małe (o małej amplitudzie) niegasnące drgania cząstek odpowiedniego ośrodka. Uwzględniając wymienione cechy układu i procesu, przeprowadza się określone rozumowania matematyczne, których rezultatem jest dane równanie. W tych rozumowaniach wykorzystuje się jako przesłanki różne prawa fizyki (np. II prawo Newtona, zasadę d'Alemberta, zasadę zachowania energii).

Trzeba zauważyć, że równanie Schrödingera lub Diraca nie jest zupełnie dowolną formułą matematyczną. Można by sobie wymyślić wiele formalnie poprawnych takich równań. Przy poszukiwaniu omawianych równań brano pod uwagę fakt, że muszą one opisywać zjawiska kwantowe (obecność stałej Plancka), spełniać wymogi szczególnej teorii względności (równanie Diraca). W procedurze ustalającej postać analityczną równania odwoływano się do analogii (optyczno-mechanicznej w przypadku równania Schrödingera) oraz dokonano pewnych uogólnień (np. formy hamiltonianu w równaniu Diraca). Ponieważ wymienione czynności nie spełniają rygorów rozumowań niezawodnych, potraktowane są jako cenne wskazówki przy postulowaniu takiej, a nie innej formy równania.

Dla poprawności sformułowania przynajmniej niektórych z omawianych równań istotne znaczenie ma także fakt funkcjonowania alternatywnych sposobów ich wyprowadzania z wykorzystaniem praw o dużym stopniu ogólności i dostatecznie dobrze stwierdzonych empirycznie. Przykładem może być wyprowadzenie równania falowego i przewodnictwa cieplnego w ośrodkach ciągłych.

Ad f) W zasadzie wszystkie równania cząstkowe wykorzystywane w fizyce są równaniami przybliżonymi, choć stopień przybliżenia różnych równań jest różny. Przy wyprowadzaniu tych równań czyni się różne założenia upraszczające natury fizycznej, ale i matematycznej. Do pierwszych zaliczyć trzeba założenie o małości drgań i zaniedbywanie sił dyssypatywnych przy wyprowadzaniu równań falowych struny i membrany, pomijanie ściśliwości, lepkości, ruchów makroskopowych oraz zależności od temperatury przewodnictwa cieplnego, przy formułowaniu równania przewodnictwa cieplnego, efektów relatywistycznych w równaniu Schrödingera itp. Z uproszczeniami matematycznymi mamy do czynienia, gdy pomijamy zmiany długości struny lub powierzchni membrany podczas drgań albo gdy dla małych kątów przyjmujemy, że $\cos\alpha \approx 1$, a $\sin\alpha \approx 0$.

Ad g) Problem „przekazywania” przybliżoności z twierdzeń na ich konsekwencje w rozumowaniach wykorzystywanych w fizyce wymaga oddzielnego omówienia. Tutaj poruszamy go tylko w stopniu pozwalającym odpowiedzieć na postawione pytanie. Wydaje się, że można mówić przynajmniej w dwu znaczeniach o przybliżoności konsekwencji danego równania różniczkowego. Przy jednym z nich przybliżoność konsekwencji przejawia się w niewystępowaniu w niej określonej zależności jednej wielkości od innej (innych) wielkości. W drugim znaczeniu przybliżona konsekwencja to tyle, co przybliżona równość pomiędzy daną a inną wielkością. Przykładem konsekwencji przybliżonej w pierwszym znaczeniu jest niezależność wychylenia cząstek struny lub membrany od współczynnika tłumienia w rozwiązaniu równania falowego albo niewystępowanie liczby kwantowej l (lub j) w wyrażeniu na energię określonego poziomu energetycznego atomu.

Rozwiązania ogólne wielu równań cząstkowych (falowego, przewodnictwa cieplnego, dyfuzji, Schrödingera) stanowią odpowiednie szeregi. W praktyce uwzględnia się skończoną i to niewielką liczbę składników takiego szeregu. Tak rozumiane przybliżone konsekwencje występują w bardzo wielu przypadkach, z jakimi ma do czynienia fizyka. Jednakże tego rodzaju przybliżoność nie jest warunkowana przybliżonością równania, lecz postacią jego rozwiązania.

Reasumując powyższe uwagi wypada stwierdzić, iż konsekwencje równań cząstkowych są przybliżone głównie w pierwszym znaczeniu. Mimo to w wielu sytuacjach fizycznych równania i ich rozwiązania zadowalająco oddają zachodzące w badanych układach procesy. Jeżeli zaś zachodzi konieczność posłużenia się dokładniejszymi danymi o układzie (np. uwzględnienie wpływu sił dysypatywnych na zamieranie drgań lub zmianę ich częstości albo uwzględnienie efektów relatywistycznych w atomie), równania przybliżone zastępuje się równaniami dokładniejszymi (choć nadal przybliżonymi) i dla nich poszukuje się odpowiednich rozwiązań.

Na zakończenie tych rozważań wspominamy jeszcze o mającym podstawowe znaczenie dla fizyki atomu rozstrzygnięciu przez mechanikę kwantową Schrödingera odnośnie do pobocznej (zwanej także orbitalną) liczby kwantowej. W starszej teorii kwantów istniały racje pozwalające (przy danej liczbie „ n ”) przypisywać jej dwa nieco różne ciągi liczbowe. Z rozważań Bohra-Sommerfelda wynikało, że azymutalna liczba kwantowa n_ϕ powinna przyjmować wartości 1, 2, 3, ..., n . Systematyka widm atomowych wskazywała na to, że zamiast n_ϕ winno się wprowadzić $l = n_\phi - 1 = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Rozwiązanie równania Schrödingera dla atomu wodoru wskazywało, że należy wybrać drugą z możliwości; por. (5).