ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLI, zeszyt 3 – 1993

EWA RYDZYŃSKA
Warszawa

O ISTNIENIU ŚWIATA PRZEDMIOTÓW MATEMATYKI

Idea świata myśli pochodzi od twórcy filozofii analitycznej Gottloba Fregego. W 1918 r. w studium logicznym *Myśl* Frege zauważa, że wolno dopuścić, iż myśl jest czymś ode mnie niezależnym, co równie dobrze może być ujmowane przez innych, jak przeze mnie. Wolno też dopuścić wspólną wszystkim naukę.

Myśląc, nie wytwarzamy myśli, lecz je tylko ujmujemy. Toteż prawda nie może powstawać dopiero wraz z jej odkryciem[1]. Dalej już zupełnie wyraźnie sugeruje on istnienie trzech oddzielnych światów: świata rzeczy realnych, świata wrażeń i świata myśli, przy czym świat myśli istniałby niezależnie od człowieka.

Dzięki takiemu rozwiązaniu znikał problem natury prawdy i istnienia logiki. Nic też dziwnego, że wydał on się wielce atrakcyjny licznym filozofom nauki i samym matematykom. Do dziś jest on dość rozpowszechniony w tych kręgach.

Wielu autorów pisało o świecie myśli, nazywając go także „trzecim królestwem”[2], „światem 3”[3], „przestrzenią logiczną”[4], „polem absolutnym”[5], „logosferą”[6] lub po prostu „Matematyką”[7]. Opisywano go w różny sposób, lecz

---

[1] G. F r e g e, *Myśl. Studium logiczne*, [w:] G. F r e g e, *Pisma semantyczne*, PWN, Warszawa 1977, s. 124-125.

[2] Jak u Fregego (dz. cyt.).

[3] Jak np.: K. R. P o p p e r, *Objective Knowledge – An Evolutionary Approach*, Clarendon Press, Oxford 1972.

[4] Na przykład L. W i t t g e n s t e i n, *Tractatus Logico-Philosophicus*, PWN, Warszawa 1970.

[5] Jak np. J. L a d r i è r e, *Langage théologique et philosophie analitique*, Archivo di Filosofia, Roma 1974.

[6] Jak np.. M. H e l l e r, J. Ż y c i ń s k i, *Wszechświat i filozofia*, Polskie Towarzystwo Teologiczne, Kraków 1986.

przeważnie chodziło tu o świat pojęć i prawd dedukcyjnych, a dokładniej o świat pojęć, którymi zajmuje się lub mogłaby zajmować się matematyka, czyli po prostu o świat przedmiotów matematyki. Zwłaszcza ostatnia nazwa wskazuje, że mamy tu właśnie na myśli matematykę rozumianą w pewnym specyficznym sensie. Chodzi tu bowiem o tzw. Całą Matematykę, która obejmuje i te fragmenty Matematyki, które już zostały odkryte i które nazywamy zazwyczaj matematyką; i te jej fragmenty, które zostaną kiedyś odkryte, i te nieskończone obszary, które dla ludzkiego umysłu na zawsze pozostaną w stanie czystej możności lub – na skutek ograniczonych zdolności naszego umysłu – w stanie faktycznej niemożności[8]. Wszystko, co istnieje i może zaistnieć, podlega Matematyce; gdyby coś sprzeciwiało się Matematyce, to – jako sprzeczne – nie mogłoby istnieć, nawet w sferze możliwości[9]. Ta zaś (dostępna nam) matematyka przez małe „m” to część Matematyki przez duże „M”, którą my odkrywamy[10]. Odbywa się to w ten sposób, że w długim historycznym procesie formułujemy aksjomaty, dochodzimy do tez, budujemy i ulepszamy dowody i w ten sposób tworzymy matematykę[11]. Tworzenie jej to odkrywanie (odtwarzanie, zapisywanie) Matematyki (czyli świata myśli), a „wszystko, co byłoby z nią sprzeczne, nie może istnieć”[12].

To ostatnie stwierdzenie jest głęboką prawdą o istocie Matematyki, czyli świata myśli. Postaramy się w tym artykule wyciągnąć pewne wnioski z tej prawdy.

I. SPOSÓB ISTNIENIA PRZEDMIOTÓW MATEMATYKI

Podstawowym zagadnieniem filozofii matematyki jest problem sposobu istnienia obiektów badanych w matematyce. O ile zgodzimy się na fundamentalną rolę teorii mnogości w matematyce współczesnej i na możność zdefiniowania wszystkich pojęć matematycznych w terminach teorii mnogości, to zagadnienie to da się sformułować jako pytanie: czy istnieją i w jaki sposób istnieją zbiory?[13] A już na pewno, niezależnie od tego, co napisaliśmy w poprzednim zda-

[7] Tamże.
[8] Tamże, s. 142.
[9] Tamże, s. 128.
[10] Tamże, s. 127.
[11] Tamże, s. 128.
[12] Tamże, s. 127.
[13] *Mała encyklopedia logiki*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław–Warszawa–Kraków–Gdańsk–Łódź 1988, s. 148.

niu, dotyczy to kwestii istnienia jednego zbioru – mianowicie właśnie zbioru przedmiotów matematyki, zwanego także światem myśli.

Przedstawimy tu współczesne stanowiska dotyczące tej sprawy.

1. Jednym ze sposobów ujmowania tego zagadnienia jest przypisywanie tym przedmiotom istnienia w sensie pochodnym względem materii. Istniałyby one więc w takim sensie, w jakim mówimy o cechach materii, czyli w sensie przypadłościowym. Tak właśnie współczesny realista umiarkowany, stwierdzając ścisłą odpowiedniość między własnością a wyznaczonym przez nią zbiorem, traktuje zbiory jako własności (cechy, atrybuty). Zbiory istniałyby wtedy, tak jak istnieją atrybuty, w sposób niesamodzielny względem rzeczy, których są atrybutami[14]. Także empiryzm kwestię istnienia obietów matematycznych redukuje do analogicznego problemu dla obiektów konkretnych, dostępnych w doświadczeniu zmysłowym. Empiryści twierdzą, że matematyka zajmuje się bądź wprost rzeczami realnymi rozpatrywanymi pod pewnymi aspektami, jak np. J. St. Mill, bądź pewnymi abstraktami z rzeczy dostępnych w doświadczeniu zmysłowym[15].

2. Istnienie w sensie najbardziej autentycznym i samoistnym przyporządkowują przedmiotom matematycznym platoniści. Najczęściej platonista przypisuje zbiorom idealny sposób istnienia, taki jak ideom Platońskim, ewentualnie sposób istnienia właściwy abstraktom, wierząc w ich istnienie w nie mniejszym stopniu niż w istnienie obiektów konkretnych.

Gödel pisał: „[...] przyjęcie istnienia takich przedmiotów, jak zbiory jest równie uprawnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych i jest równie wiele racji do wiary w ich istnienie". Zwykle platonista nie twierdzi, że zbiory istnieją tak, jak przedmioty realne, twierdzi jedynie, że istnieją one w pewien szczególny sposób. Jako kryterium istnienia przedmiotów matematycznych podaje platonista najczęściej jedynie ich niesprzeczność[16], ale czasami przyjmuje się także inne kryteria. Wszystkie one zostaną omówione w tym rozdziale.

3. Istnieje wiele podobnych koncepcji reprezentujących różne możliwe podejścia do tej sprawy. Na przykład konstruktywiści traktują zbiory jako wytwory procesów konstruowania. Wszystkie pojęcia matematyczne konstruujemy za pomocą pewnych elementarnych, dobrze określonych operacji. Zbiory istnieją tylko wtedy, gdy można je skonstruować ze zbiorów podstawowych, akceptowanych ze względu na ich prostotę bądź oczywistość lub ze zbiorów, które zostały poprzednio skonstruowane. Konstruktywiści za kryterium istnienia

[14] Tamże.

[15] Tamże, s. 149.

[16] Tamże, s. 148.

przedmiotów matematycznych przyjmują ich konstruowalność[17], a więc według nich istnieje wszystko, co da się za pomocą pewnych z góry określonych operacji skonstruować. Przy czym konstruktywizm w wersji obiektywistycznej traktuje konstrukcje jako twory istniejące niezależnie od podmiotu[18].

4. Trochę szersze kryterium istnienia obiektów matematycznych stanowi cecha definiowalności. Są bowiem i tacy matematycy oraz filozofowie, którzy uważają, że istnieje wszystko to, co można zdefiniować. Oczywiście chodzi tu o definicję poprawną, czyli niesprzeczną.

5. I tu dochodzimy do kryterium jeszcze szerszego, a przy tym bardzo często używanego w praktyce przez matematyków, które wiąże się właśnie z pojęciem niesprzeczności. Niektórzy uważają bowiem, że problem istnienia obiektów matematycznych jest źle postawiony. Twierdzą, że matematyka nie tyle zajmuje się opisem pewnych specyficznych obiektów, ile opisem wszystkich obiektów spełniających pewne ogólne formalno-strukturalne warunki. Przedmioty matematyki badane są z „dokładnością do izomorfizmu”, tzn. z taką dokładnością, na jaką pozwala używany język, jego aparat pojęciowy. Tak więc pytanie, czy istnieją pewne specjalne obiekty matematyczne, należy zastąpić pytaniem, czy istnieją obiekty spełniające pewne ogólne warunki; a z kolei to pytanie – kwestią, czy pewien zespół warunków może być jednocześnie spełniony, czyli czy zespół ten jest niesprzeczny[19]. Postulują więc oni istnienie wszystkiego, co jest niesprzeczne z prawami logiki.

6. Jeszcze szersze znaczenie przypisuje istnieniu przedmiotów matematycznych pewien odłam nominalizmu, który traktuje matematykę wyższą jako niezinterpretowany rachunek, jako wygodną „fikcję”[20]. Trochę podobnie uważają konceptualiści; ich zdaniem, zbiory istnieją w sposób właściwy tworom myślowym, tj. w sposób intencjonalny[21]. Wspólne obu tym kierunkom jest to, że według nich istnieje wszystko to, co można sobie przedstawić, pomyśleć. Nazwiemy to istnieniem w sensie fikcyjnym lub intencjonalnym. To rozumienie istnienia jest najbliższe nazwie „świat myśli”, przez nas używanej.

Wymienione sposoby istnienia przypisywane są, jak wspomnieliśmy, nie tylko pojedynczym przedmiotom Matematyki, ale także równoważnie i zbiorom. Toteż oczywiste jest, że także tylko te zbiory istnienia mogą dotyczyć zbiorów przedmiotów Matematyki, a więc i domniemanego zbioru wszystkich przedmiotów Matematyki. Będziemy je więc w następnym rozdziale kolejno rozważać.

[17] Tamże, s. 148-149.
[18] Tamże, s. 149.
[19] Tamże.
[20] Tamże.
[21] Tamże, s. 148.

Tu zwrócimy jeszcze uwagę, że wszystkie wymienione spojrzenia – oprócz dwóch pierwszych – nie są w zasadzie dokładnie koncepcjami istnienia „świata myśli” w jakiś konkretny sposób, lecz jedynie pewnymi sposobami rozumienia matematyki, z których wynika pewien sposób istnienia obiektów matematycznych i „świata myśli”, jeśli założy się, że w ogóle ten „świat myśli” jako taki istnieje. Są to bowiem te wspomniane kryteria istnienia obiektów matematycznych, których używa między innymi platonizm, ale mogą one być użyte również przez inne – wręcz przeciwstawne – kierunki filozofii matematyki. Wspomnieć tu należy na przykład to, że istnieje odłam konstruktywizmu zwany mentalistycznym, w którym konstrukcje uważane są za wytwory aktów myślowych osób uprawiających matematykę[22], czyli fakt, że traktowanie istnienia zbiorów w sposób intencjonalny związane jest między innymi z intuicjonizmem[23], który głosi przecież, że matematycy tworzą badane przez siebie obiekty, a nie – jak głosi platonizm – odkrywają je. Przedmioty matematyczne są skonstruowane, ich istnienie oznacza konstrukcję w aktach tworzącego matematykę umysłu[24].

My postaramy się przedyskutować tylko sprawę istnienia lub nieistnienia „świata myśli”, czyli Matematyki jako takiej. Oczywiście pomocne będzie w tym powyższe wyszczególnienie wszystkich dopuszczalnych sposobów istnienia obiektów matematycznych. Lecz nawet gdybyśmy rozważany problem rozstrzygnęli na korzyść któregokolwiek spojrzenia, czyli rozstrzygnęli, czy świat myśli istnieje czy nie, czy może istnieć czy nie, to jednak bynajmniej nie mamy zamiaru rozstrzygać, która koncepcja istnienia jest prawdziwa. Tę kwestię pozostawimy na boku, o ile to nie będzie potrzebne w naszych rozważaniach.

II. MOŻLIWOŚCI ISTNIENIA ŚWIATA MYŚLI W WYMIENIONYCH STANOWISKACH

Rozpatrzmy w tym rozdziale kilka twierdzeń matematyki współczesnej. Oczywiście jako twierdzenia matematyki są to także prawdy Matematyki.

1. Oto pierwsze z tych twierdzeń:

T w i e r d z e n i e 1. Dla każdej rodziny zupełnych probabilistycznych algebr pseudoboolowskich $\{U_i, P_i\}_{i\in I}$ istnieje jej produkt zupełny (F, p), gdzie

[22] Tamże, s. 149.

[23] Tamże, s. 148.

[24] Tamże, s. 75.

F jest zupełną algebrą pseudoboolowską, a p jest prawdopodobieństwem zupełnie addytywnym określonym na niej[25].

Prostą konsekwencją twierdzenia 1 jest następujący wniosek:

W n i o s e k 2. Istnieje dowolnie liczna rodzina niezależnych zmiennych losowych o dowolnym rozkładzie na dowolnej zupełnej algebrze pseudoboolowskiej[26].

Z powyższego płynie pewien filozoficzny wniosek. Lecz aby go przedstawić, należy dokonać następującej konstrukcji. Załóżmy, że istnieje zbiór wszystkich myśli M. Określmy p – prawdopodobieństwo, czyli miarę probabilistyczną na przestrzeni podzbiorów zbioru M, czyli na 2^M. Jeśli przyjmiemy, że właściwą logiką świata myśli jest logika intuicjonistyczna, to 2^M będzie algebrą pseudoboolowską. Jeśli założymy, że logiką świata myśli jest logika klasyczna, to 2^M będzie algebrą Boole'a, która jest szczególnym przypadkiem algebry pseudoboolowskiej. Tak więc w każdym z tych przypadków 2^M jest jakąś algebrą pseudoboolowską. Oczywiście teraz można już wykorzystać wniosek 2, który mówi, że na tej algebrze można określić dowolnie liczną rodzinę niezależnych zmiennych losowych o dowolnym rozkładzie. Zmienna losowa jest w tym przypadku dowolną funkcją określoną na zbiorach myśli o wartościach rzeczywistych[27]. W szczególnym przypadku zmienna losowa $X_i : 2^M \to R$ może oznaczać przyporządkowanie danej myśli (lub danemu zbiorowi myśli) osoby, która pojmuje tę myśl w jakimś i–tym aspekcie. Oczywiście ludzie muszą być ponumerowani liczbami rzeczywistymi, ale to jest łatwe do spełnienia, albowiem na pewno zbiór ludzi nie jest bardziej liczny niż zbiór liczb rzeczywistych, jest więc równoliczny z R lub z jego podzbiorem. To twierdzenie wynika zaś prosto z faktu, że czas może być przedstawiony za pomocą osi liczbowej, więc chwil czasowych nie jest więcej niż liczb rzeczywistych. Ponieważ w każdej chwili istnieje skończona liczba ludzi, a więc i rodzić się może tylko skończona liczba ludzi, więc z teorii liczności zbiorów wynika, że zbiór wszystkich ludzi nie jest liczniejszy niż R. Toteż dowolna zmienna losowa $X_i : 2^M \to R$, przypisująca danemu zbiorowi myśli osobę, która zna tę myśl w i–tym aspekcie, jest zawsze dobrze określona. Oczywiście z wniosku 2 wynika, że możemy na 2^M określić także prawdopodobieństwo p i wtedy $p(X_i\ (N) \in A)$ jest miarą (wartością) tych myśli, które w i–tym aspekcie pojęły osoby należące do zbioru

[25] Jest to proste uogólnienie twierdzenia 14 w pracy: E. R y d z y ń s k a, *Probability Heyting Algebras*, „Demonstratio Mathematica", 19(1986), s. 573-589.

[26] Ten wniosek jest uogólnieniem (na podstawie poprzedniego twierdzenia) wniosku 4.30 w pracy: E. R y d z y ń s k a, *Random Variables on Boolean and Heyting Algebras and their Numerical Characteristics*, Dissertationes Mathematicae CCXCVII, PWN, Warszawa 1990.

[27] Por. R y d z y ń s k a, *Probability*, s. 5.

A, a $p(X_i\ (N) \in A,\ i \in I_o)$ jest miarą tych idei, które w aspektach ze zbioru I_o posiadły osoby ze zbioru A. Zwłaszcza wtedy, gdy $A = \{\alpha\}$, chodzi o jedną osobę α. Wiemy więc z wniosku 2, że można określić taką miarę, a więc biorąc $A = \{\alpha\}$ można w szczególności określić miarę tych idei, które dany człowiek ma w danych aspektach. Intencje i myśli człowieka świadczą o jego wartości, toteż za pomocą określonej wyżej miary probabilistycznej można mierzyć wartość ludzi pod dowolnymi aspektami. Przy tym można to czynić w dowolnie wybrany sposób, gdyż rozkład zmiennych losowych może być dowolnie ustalony. W ten sposób moglibyśmy dokonać na przykład uszeregowania ludzi od najgorszego do najlepszego.

Wynik wydaje nam się absurdalny. Dotychczas nikomu nie udało się tego uczynić ani nikt nawet nie proponował, żeby to zrobić. Nikt jeszcze nie wymyślił obiektywnego kryterium oceniającego ludzi (ich charakteru i wartości – szczególnie duchowych) choćby pod względem tylko jednej cechy lub jakiegoś zespołu cech ani jako całość. Wydaje się nawet, że próba uszeregowania ludzi od najgorszego do najlepszego jest nieludzka, sprzeczna z pojęciem człowieka, a tym bardziej bezsensowna staje się, gdy przyjmiemy światopogląd chrześcijański, tzn. gdy wierzymy, że tylko jeden Bóg może właściwie ocenić człowieka.

Stwierdziliśmy więc, że połączenie założenia o istnieniu świata myśli wraz z przyjęciem wniosku 2, który jest jedną z prawd tego świata, daje w sumie absurd. Toteż któreś z naszych założeń było fałszywe. Stąd: albo nie istnieje świat myśli, albo myśli nie mają żadnych aspektów, albo ludzie nie mogą tych myśli pojąć pod żadnymi aspektami, albo wreszcie nie ma ludzi. Najrozsądniejszym rozwiązaniem zdaje się być przyjęcie nieistnienia świata myśli. Nie istnieje więc świat myśli w sensie cech, przypadłości, bo nie można tych myśli ocenić, zmierzyć, uszeregować, nawet w wybranym aspekcie i w wybrany sposób.

2. Istnienie świata myśli w sensie platonistycznym musimy rozpatrzyć, uwzględniając wszystkie możliwe kryteria i uczynimy to w następnych punktach.

3. Skorzystamy tu z innych wyników matematyki, a mianowicie z pewnych twierdzeń teorii zbiorów[28]. Wiemy bowiem z teorii mnogości, że przyjęcie aksjomatu: „dla każdej formuły istnieje zbiór wszystkich elementów spełniających tę formułę i tylko tych” – prowadzi do sprzeczności. Każda prawda jest zdaniem mówiącym, że jakieś elementy spełniają jakąś formułę. Także zdanie określające zbiór wszystkich elementów spełniających daną formułę jest prawdą. Tak więc przyjęcie istnienia świata wszystkich prawd prowadzi do sprzeczności.

---

[28] Wyniki te pochodzą z książki: K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, PWN, Warszawa 1978, s. 68, 73.

Wiemy przy tym, że przyjęcie trochę innego aksjomatu: „dla każdego zbioru A i dowolnej formuły Φ istnieje zbiór złożony z wszystkich elementów zbioru A, które spełniają formułę Φ i tylko z tych” – nie prowadzi do sprzeczności i nie jest sprzeczne także z innymi oczywistymi aksjomatami. Ale taki aksjomat pozwala tylko na wypowiadanie prawdy, gdy już mamy określony zbiór elementów, które będą brane pod uwagę oraz jakąś własność i tylko sprawdzamy, czy te elementy mają tę własność lub wydobywamy na światło dzienne trudno dostrzegalne konsekwencje tej własności. Prawdy nie egzystują więc samodzielnie, lecz powstają w związku z wymyśleniem zbioru A i formuły Φ. Nie istnieje więc świat wszystkich prawd w tym sensie, że nie możemy go skonstruować.

4. Mamy także następujące twierdzenie w teorii liczb kardynalnych, czyli w teorii dotyczącej liczności zbiorów:

T w i e r d z e n i e 3. Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów[29].

Świat myśli niektórzy[30] określają także jako świat systemów dedukcyjnych. Toteż świat prawd matematycznych istnieje w zależności od świata aksjomatów. Rozważmy ten związek!

Każda prawda matematyczna wynika z jakiegoś zestawu aksjomatów. Toteż dla istnienia zbioru myśli nieodzowne jest istnienie świata zestawów aksjomatów. Jednocześnie każdemu zestawowi aksjomatów można przyporządkować prawdę: „ten zestaw aksjomatów jest niesprzeczny” lub prawdę: „ten zestaw aksjomatów jest sprzeczny”. Dlatego też zbiór prawd jest nie mniej liczny niż zbiór zestawów aksjomatów.

Aksjomatem jest zaś dowolne zdanie mówiące, że „istnieje jakiś byt” albowiem każde zdanie orzekające o własności jakiegoś obiektu można sformułować jako stwierdzenie o istnieniu tego bytu. Na przykład aksjomat głoszący, że „funkcja f ma własność X” można zapisać w formie: „istnieje dana funkcja f o własności X” i w tym zdaniu wspomnianym bytem jest funkcja f. Może to być zresztą zupełnie dowolny byt. W związku z tym możemy każdy zestaw aksjomatów uważać za izomorficzny z pewnym zbiorem bytów, którym przypisujemy istnienie (w danej teorii). Tak więc zbiór wszystkich możliwych aksjomatów jest równoliczny ze zbiorem wszystkich zbiorów.

Ponieważ, jak wykazaliśmy poprzednio, zbiór prawd jest nie mniej liczny niż zbiór wszystkich zestawów aksjomatów, który jest równoliczny ze zbiorem wszystkich zbiorów, a jednocześnie oczywiście nie może przecież być bardziej liczny właśnie od tego zbioru wszystkich zbiorów, więc zbiór prawd musi być dokładnie równoliczny ze zbiorem wszystkich zbiorów.

---

[29] Tamże, s. 183.

[30] H e l l e r, Ż y c i ń s k i, dz. cyt., s. 142.

Jeśli teraz przypomnimy sobie twierdzenie 3, to łatwo zauważymy, że tak jak nie może istnieć zbiór wszystkich zbiorów, tak nie może istnieć żaden równoliczny z nim zbiór, a więc właśnie zbiór wszystkich prawd. Nie istnieje on w sensie możliwości zdefiniowania, bo jego definicja nie jest poprawna, tak jak nie jest poprawna definicja zbioru wszystkich zbiorów.

5. Mamy w matematyce, a więc i w Matematyce, także następujące twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 4. Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych[31].

T w i e r d z e n i e 5. Dla dowolnej liczby porządkowej α: jeśli C jest zbiorem o liczbie porządkowej α, to zbiór wszystkich liczb porządkowych mniejszych od α jest izoformiczny ze zbiorem C[32].

Przypomnijmy teraz, że świat myśli jest inaczej określany jako zbiór wszystkich związków formalnych albo – jak kto woli – system wszystkich systemów dedukcyjnych[33] lub po prostu zbiór wszystkich możliwych wynikań[34].

Załóżmy teraz, że świat myśli, czyli zbiór wszystkich możliwych wynikań A, istnieje i weźmy jego podzbiór B wynikań typu: „jeśli C jest zbiorem o liczbie porządkowej α, to zbiór wszystkich liczb porządkowych mniejszych od α jest izomorficzny z C", przy czym dla danego konkretnego wynikania α jest ustalone, a B składa się z wszystkich prawdziwych wynikań tego typu dla wszystkich możliwych α. Oczywiście na podstawie twierdzenia 5 wiemy, że wszystkie takie wynikania są prawdziwe (dla wszystkich liczb porządkowych α). Tak więc wynikań ze zbioru B jest tyle, co liczb porządkowych α, a dokładnie wyrażając się: zbiór B jest równoliczny ze zbiorem liczb porządkowych. Jako taki, zgodnie z twierdzeniem 4, zbiór B nie istnieje.

Jednocześnie zbiór B, jako podzbiór istniejącego z założenia zbioru A, musi istnieć. A to jest sprzeczne z otrzymaną wyżej tezą. Dlatego nasze założenie jest sprzeczne; zbiór A nie może istnieć. Toteż świat myśli nie istnieje nawet w sensie tylko niesprzeczności logicznej.

6. Ostatnie stanowisko wymienione w poprzednim rozdziale nie wymaga krytyki. Wystarczy bowiem zauważyć, że opisane tam postawy jednoznacznie wskazują na nietraktowanie myśli jako samodzielnych bytów. Konceptualiści uważają bowiem zbiory za wytwory procesów myślowych[35]. Stanowisko intuicjonizmu było już opisywane i wyraża ono mniej więcej ten sam stosunek do

---

[31] K u r a t o w s k i, M o s t o w s k i, dz. cyt., s. 233.

[32] Tamże, s. 232.

[33] H e l l e r, Ż y c i ń s k i, dz. cyt., s. 142.

[34] Tamże, s. 127.

[35] *Mała encyklopedia logiki*, s. 148.

myśli. Zdaniem nominalistów zaś, zbiory w ogóle nie istnieją, matematyka jest fikcją[36], a więc też czymś wymyślonym. Te stanowiska zaprzeczają samodzielnemu istnieniu świata myśli.

*

Rozpatrzyliśmy wszystkie współcześnie rozważane sposoby istnienia przedmiotów matematyki, a więc i wiążące się z tym wszystkie możliwe sposoby istnienia świata myśli (które były wymienione i opisane w rozdziale drugim). Dowiedliśmy, że żaden z tych sposobów istnienia świata myśli nie jest możliwy. Świat myśli nie może więc istnieć:

1) ani w sensie pochodnym względem materii, w sensie przypadłościowym;

2) ani w sposób samoistny (na kształt idei Platońskich) w żadnym z następujących sensów:

3) ani jako coś, co można skonstruować,

4) ani jako coś, co można zdefiniować,

5) ani jako coś, co jest po prostu tylko niesprzeczne,

6) z zasady nie może on też istnieć w sensie fikcyjnym czy intencjonalnym.

Stąd można wyciągnąć prosty wniosek, że samodzielne istnienie świata myśli, czyli Matematyki przez duże M, nie jest w ogóle możliwe, gdyż idea ta prowadzi do absurdów, do sprzeczności. Doszliśmy bowiem czterokrotnie do wniosku, że założenie istnienia Matematyki jest sprzeczne z wynikami matematyki. Ponieważ zaś matematyka jest, jak pisaliśmy w rodziale I, częścią Matematyki, więc pojęcie Matematyki jest wewnętrznie sprzeczne. Inaczej mówiąc, Matematyka jest sprzeczna sama z sobą. Zgodnie zaś z definicją Matematyki, czyli z założeniem, że „wszystko, co byłoby z nią (tzn. z Matematyką) sprzeczne, nie może istnieć”[37]; taka Matematyka, czyli świat myśli, nie może istnieć.

Ten wniosek powinien skłonić nas do uznania myśli za twory intelektu człowieka nie istniejące samodzielnie, choć oczywiście związane w pewien sposób ze światem bytów realnych, zewnętrznych względem człowieka. W związku z tym uważamy, że twierdzeń matematycznych się nie odkrywa, lecz wymyśla się je, i że matematyki się nie odtwarza, lecz tworzy. Dlatego też matematyka trzeba uznać za takiego samego twórcę, jak na przykład artystę.

---

[36] Tamże, s. 149.

[37] H e l l e r, Ż y c i ń s k i, dz. cyt., s. 127.

ABOUT EXISTENCE
OF THE WORLD OF OBJECTS OF MATHEMATICS

S u m m a r y

In this paper, a possibility of existence of „the world of ideas” is considered. There are described all known kinds of possibilities of existence of mathematical objects. Every one is compared with mathematical theorems, and we make conclusions from these comparisions.