ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLI, zeszyt 3 – 1993

HENRYK PIERSA
Lublin

NIEZMIENNIKI W FIZYCE I ICH FUNKCJA POZNAWCZA*

Jednym z podstawowych zadań każdej nauki jest dochodzenie do takich rezultatów poznawczych, które musi uznać każdy odpowiednio przygotowany podmiot poznający. Wyłączając pewne zagadnienia kontrowersyjne, jakie mogą wystąpić w okresie tworzenia danej nauki lub teorii naukowej, wymóg ten starają się spełniać wszystkie nauki. W tym sensie niezmienniczy charakter mają składniki każdej nauki, również fizyki.

W odniesieniu do fizyki zwykło się *explicite* bądź *implicite* mówić o innym rodzaju niezmienniczości uogólnień indukcyjnych[1], praw, a nawet określonych teorii naukowych. Przedmiotem rozważań niniejszego artykułu są tego rodzaju niezmienniki.

Jego pierwsza, przedmiotowa, część jest poświęcona omówieniu niezmienników różnego rodzaju przekształceń, poczynając od tak oczywistych, że niemal trywialnych (niezmienniki wyników obserwacji względem operacji zmiany obserwatora lub przyrządu), poprzez niezmienniczość praw–równań fizyki względem operacji zmiany jednostek, zmiany skali, przekształceń Galileusza i Lorentza, operacji zastąpienia jednej teorii inną, niezmienniki generowane przez symetrie czasu i przestrzeni, niezmienniki przekształceń kanonicznych i unitarnych.

Druga, metaprzedmiotowa, część traktuje o takich zagadnieniach, jak: niezmienniki podstawą zdobywania informacji o układach fizycznych (na podstawie analogii, operacji zmiany skali, dzięki całkowaniu równań różniczkowych i niezmienników przekształceń unitarnych) oraz niezmienniki podstawą do formułowania praw i teorii fizykalnych.

---

* Artykuł finansowany przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.

[1] Dla fizyka nie każde uogólnienie indukcyjne jest prawem. Zdanie głoszące, że „gęstość miedzi wynosi tyle a tyle kg/m^3" tego wymogu nie spełnia.

Należy zaznaczyć, że zadaniem artykułu nie jest epistemologiczna ocena wartości rezultatów poznania uzykanych dzięki niezmiennikom (prawdziwość, pewność, prawomocność uzasadnienia itp.), ale sposób ich zdobywania.

Ze względu na fakt, że w artykule będzie wielokrotnie mowa o niezmienniczości praw–równań fizyki względem różnego rodzaju przekształceń, poświęcimy nieco uwagi samym prawom–równaniom fizyki.

W fizyce funkcjonują przynajmniej trzy sposoby rozumienia wyrażenia „prawo–równanie”. W pierwszym, dosłownym znaczeniu, prawo–równanie fizyki wyraża określony związek ilościowy pomiędzy występującymi w nim zmiennymi symbolizującymi odpowiednie wielkości fizyczne. Przykładem tak rozumianych praw–równań może być prawo Coulomba, prawo grawitacji Newtona albo prawo Sneliusa. W celu zastosowania tak rozumianego prawa–równania do konkretnego przypadku wystarczy za występujące w nim zmienne podstawić określone wartości liczbowe (ładunki, masy, odległości, kąty), aby móc obliczyć wartości numeryczne pozostałych wielkości (siły albo współczynnika załamania).

Przykładem drugiego rozumienia omawianego wyrażenia może być prawo ruchu Newtona, elektrostatyczne albo magnetyczne prawo Gaussa. W sytuacjach najprostszych (gdy na ciało działa jedna siła, pole jest wytworzone przez jeden ładunek punktowy), podobnie jak w pierwszym znaczeniu, poszczególne zmienne dobrze określają odpowiednie wielkości fizyczne. W sytuacjach bardziej złożonych (gdy na daną masę działa kilka sił, pola wytworzonego przez wiele ładunków punktowych) niektóre występujące w równaniu zmienne określają pewne kombinacje posiadających ten sam wymiar wielkości fizycznych. Można powiedzieć, że w tym przypadku prawo–równanie zawiera n a d t o przepis, jak znajdować „wypadkowe” wielkości fizyczne: siłę, natężenie pól, ładunki itp.

Przykład trzeciego sposobu rozumienia wyrażenia „prawo–równanie” mogą stanowić Lagrange’a II rodzaju albo Hamiltona prawa ruchu. Właściwie równania te stanowią wyrażone w formie matematycznej przepisy na układanie równań ruchu dla konkretnych układów fizycznych, nie zaś same równania. Przykładowo: w celu ułożenia równań ruchu dla układu mechanicznego, w którym czynne są siły potencjalne, należy znaleźć postać analityczną funkcji Lagrange’a, wziąć z niej pochodną cząstkową po uogólnionej prędkości, zróżniczkować ją po czasie, od otrzymanego wyrażenia odjąć pochodną z omawianej funkcji po odpowiadającej tej prędkości uogólnionej współrzędnej i tę różnicę przyrównywać do zera. Opisaną czynność powtórzyć dla każdej współrzędnej uogólnionej.

W świetle tych uwag niektóre prawa–równania fizyki w pierwszym znaczeniu mogą być uważane jako konksekwencje równań w trzecim znaczeniu.

W metodologii nauk zwykło się mówić, że sformułowane w formie matematycznej prawo fizyki wyraża określoną prawidłowość zachodzącą w danym fragmencie przyrody nieożywionej. Weyssenhoff[2] utrzymuje, iż prawo–równanie fizyki jest traktowane przez większość fizyków jako równość między wielkościami (czy oznaczającymi je symbolami), a nie jako równość pomiędzy wartościami liczbowymi tych wielkości. Zdaniem tego autora, dopiero po odpowiednim przeinterpretowaniu prawo–równanie fizyki mogłoby oznaczać także równość między wartościami liczbowymi.

Wydaje się, że każde prawo–równanie fizyki wyraża zarazem obydwa rodzaje równości. Podobnie jak równość matematyczna, prawo–równanie fizyki musi oznaczać równość pomiędzy liczbami otrzymanymi w wyniku przeprowadzonych operacji matematycznych na podstawionych za zmienne liczbach. W przypadku przeciwnym w formule matematycznej prawa nie wolno byłoby postawić znaku równości. Zgodnie z żądaniem jednorodności wymiarowej, równość ta musi odnosić się także do wymiarów przyrównywanych wielkości.

Powyższe rozważania uzupełnimy następującą uwagą. Oprócz omawianej równości każde prawo–równanie wyraża także określony rodzaj zależności pomiędzy występującymi w nim wielkościami. W II prawie Newtona działająca na ciało siła jest wprost proporcjonalna do nadanego mu przyśpieszenia, w prawie Coulomba – działająca pomiędzy ładunkami punktowymi siła jest wprost proporcjonalna do iloczynu ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi, w I prawie Maxwella rotacja wektora natężenia pola elektrycznego jest proporcjonalna do wziętej ze znakiem minus pochodnej cząstkowej po czasie z wektora indukcji magnetycznej itd. Można zaryzykować twierdzenie, że ów rodzaj zależności jest dla fizyka najistotniejszą cechą prawa. Jeżeli przy formułowaniu prawa–równania uda się w jakikolwiek sposób (w postaci analitycznej, graficznej lub innej) ustalić ów rodzaj zależności, fizyk utrzymuje, że uzyskał już bardzo cenne informacje o związku między badanymi wielkościami.

[2] J. Weyssenhoff, *Zasady elektromagnetyki i optyki klasycznej*, Warszawa 1957, s. 559.

I. WAŻNIEJSZE NIEZMIENNIKI W FIZYCE

1. *Niezmienniczość wyniku obserwacji względem operacji zmiany obserwatora lub przyrządu*

Zanim sformułujemy odpowiednie twierdzenia odnoszące się do omawianych niezmienniczości, ustalimy sposób rozumienia wyrażeń „wynik obserwacji", „przyrząd" i „obserwator".

Zwrot „wynik obserwacji" będziemy rozumieli w tym artykule szerzej niż w powszechnym użyciu, a mianowicie jako równoznacznik wyrażeń „stwierdzenie określonego zjawiska" bądź jako „wynik pomiaru danej wielkości fizycznej". Wynikiem obserwacji będzie więc stwierdzenie załamania światła, polaryzacji dielektryka, jak i odczytanie położenia wskazówki jakiegoś przyrządu na jego skali.

Termin „przyrząd" będzie używany zarówno w odniesieniu do pojedynczego urządzenia pomiarowego (spektrometru, sonometru, polarymetru), jak i zespołu mierników niezbędnych do ustalenia określonego zjawiska albo wartości liczbowej mierzonej wielkości (np. amperomierza i woltomierza do pomiaru oporu). O tak rozumianym przyrządzie będziemy zakładali, że ma wszystkie cechy konieczne do wypełnienia swej funkcji (np. dokładność, stałość wskazań).

Wreszcie terminu „obserwator" będziemy używali na oznaczenie osoby (fizyka) odpowiednio przygotowanej do korzystania z przyrządu. Zakładamy, że dysponuje ona normalnie funkcjonującymi władzami poznawczymi (w tym i zmysłami), niezbędnymi do wykonania określonych czynności w celu uzyskania oczekiwanego rezultatu oraz że posiada odpowiednie przygotowanie do obsługi danego przyrządu. Przygotowanie to winno dotyczyć funkcjonowania przyrządu, ewentualnego wpływu otoczenia na jego wskazania i – gdy jest to konieczne – zasady działania przyrządu oraz techniki uzyskiwania danych, minimalizowania błędu odczytu, jak również umiejętności matematycznego opracowania wyników pomiaru.

Dokonawszy powyższych ustaleń terminologicznych, formułujemy zapowiadane twierdzenia:

a) Przy zastosowaniu danego przyrządu fizycznego (w granicach błędu pomiarowego) wynik obserwacji nie ulegnie zmianie, gdy jednego obserwatora zastąpimy dowolnym innym obserwatorem albo – wynik obserwacji dokonany za pomocą danego przyrządu nie zależy od wyboru obserwatora.

b) Wynik obserwacji dokonanej przez danego obserwatora nie ulegnie zmianie, gdy jeden przyrząd zastąpi się dowolnym innym albo – wynik obserwacji uzyskany przez danego obserwatora nie zależy od wyboru przystosowanego do niej przyrządu pomiarowego.

Wyrażenia „dowolny inny” i „przystosowanego do niej” występujące w tych sformułowaniach należy rozumieć w ten sposób, że może to być dowolny egzemplarz danego przyrządu, wykonanego zarówno przez tę samą, jak i inną firmę, działający na tej samej lub różnej zasadzie, byleby służył do przeprowadzenia danej obserwacji.

2. *Niezmienniczość praw fizyki względem operacji zmiany układu jednostek*

Do niedawna oficjalnie, a właściwie także i obecnie, obowiązuje w fizyce kilka układów jednostek. W mechanice i dyscyplinach na niej opartych używany jest układ SI, cgs i ciężarowy; w elektrodynamice – układy: elektrostatyczny, elektromagnetyczny, Gaussa i SI. Mimo pewnych zastrzeżeń natury formalnej (zwłaszcza w odniesieniu do tych ostatnich) w zasadzie wszystkie one równie dobrze nadają się do wyrażania w formie matematycznej praw fizyki. Niezmienniczość tych praw względem operacji przejścia od jednego do innego układu jednostek znaczy tyle, co zachowanie formy analitycznej prawa: sposób zależności pomiędzy odpowiednimi wielkościami, a nawet równość pomiędzy ich kombinacjami matematycznymi zostaje zachowana, gdy jeden układ jednostek zastąpimy innym.

Wśród praw–równań fizyki można wyróżnić takie, w których: a) przy przejściu od jednego do innego układu jednostek wszystkie występujące w nich wielkości fizyczne zachowują swój wymiar (np. II prawo Newtona, prawo grawitacji); b) pewne wielkości zmieniają swój wymiar, a pozostałe go zachowują (np. prawo Biota–Savarta, Coulomba); c) wszystkie wielkości fizyczne zmieniają swój wymiar (np. prawa Maxwella) oraz d) prawa bezwymiarowe.

W pierwszym przypadku niezmienniczość wymiaru przy zamianie jednego układu jednostek na inny jest zapewniona automatycznie, w drugim – zmianie wymiaru pewnych wielkości towarzyszy wprowadzenie mającego wymiar współczynnika tak dobranego, aby dzięki tej procedurze wymiar kombinacji wielkości fizycznych wraz z owym współczynnikiem nie uległ zmianie. W przypadku trzecim, dzięki odpowiedniemu współczynnikowi, obydwie strony prawa–równania zmieniają się tak samo.

A więc w każdym z omawianych przypadków, przy przejściu od jednego do innego układu jednostek, pozostaje zachowana równość wymiarowa prawa–równania. Dzięki odpowiedniemu doborowi współczynników proporcjonalności przy omawianej procedurze jest zachowana także równość numeryczna praw–równań.

3. *Niezmienniczość charakteru zjawisk i praw względem operacji zmiany skali*

W pewnym sensie z omawianą wyżej niezmienniczością łączy się niezmienniczość charakteru zjawisk i praw nimi rządzących względem operacji zmiany skali. Z tym rodzajem niezmienniczości mamy do czynienia przy badaniu charakteru opływu przez ciecze i gazy przeszkód o podobnych kształtach, lecz różnych rozmiarach liniowych[3].

Opływ ciała stałego charakteryzuje ilościowo zespół określonych wymiarowych lub bezwymiarowych wielkości fizycznych. Wśród wielkości bezwymiarowych podstawowe znaczenie odgrywają tzw. liczby (parametry) bezwymiarowe, które są kombinacją matematyczną wielkości wymiarowych. Przykładem liczb bezwymiarowych jest liczba Reynoldsa(Re), Macha(M), Prandtla(Pr) itp. Liczbę Reynoldsa określa się jako stosunek iloczynu prędkości płynu v i rozmiarów liniowych przeszkody l do lepkości kinematycznej płynu ν; liczbę Macha – jako stosunek prędkości płynu v do prędkości propagacji w nim fali głosowej c; liczbę Prandtla – jako stosunek lepkości kinematycznej do współczynnika dyfuzji ciepła α.

W technicznych zagadnieniach naukowych ważną rolę odgrywają tzw. przepływy (opływy) fizycznie podobne. Rozumie się przez nie takie przepływy, które mają takie same wartości odpowiednich liczb bezwymiarowych. Przepływy fizycznie podobne można również określić jako takie przepływy, dla których, na podstawie znajomości wartości liczbowych pewnych wielkości fizycznych w jednym opływie, dzięki prostym przeliczeniom, można otrzymać wartości liczbowe tych wielkości w innym opływie[4]. Aby te przeliczenia były możliwe, muszą być znane skale przejścia, czyli związki pomiędzy wyjściowymi i przekształconymi jednostkami wszystkich istotnych dla danego opływu wielkości fizycznych. Dowodzi się twierdzenia, według którego dla dwu opływów podobnych prawa–równania fizyki (np. Navier-Stokesa, równanie ciągłości) zachowują taką samą postać analityczną. Innymi słowy, prawa–równania fizyki są niezmiennicze wobec operacji zmiany skali[5].

Przez niezmienniczość charakteru zjawiska względem omawianej operacji rozumie się ten fakt, iż wielkości fizyczne określające dany przepływ, a więc

[3] L. I. S i e d o w, *Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice*, tłum. St. Massel i in., Warszawa 1968, s. 58 n; G. H. A. C o l e, *Dynamika płynów*, tłum. J. Mączyński, Warszawa 1964, s. 165 n.

[4] S i e d o w, dz. cyt., s. 59.

[5] C o l e, dz. cyt., s. 139-141; B. Ś r e d n i a w a, *Hydrodynamika i teoria sprężystości*, Warszawa 1977, s. 302-303.

prędkości, ciśnienia, temperatury, gęstości, są dla obydwu opływów takimi samymi funkcjami miejsca i czasu. Innymi słowy: charakterystyki liczbowe dwu opływów podobnych mogą być uważane za charakterystyki jednego opływu w dwu różnych jednostkach odpowiednich skal.

4. *Niezmienniki operacji przejścia od jednego do innego układu inercjalnego*

W fizyce podstawowe znaczenie przypisuje się niezmiennikom transformacji związanych z przejściem od jednego do innego układu inercjalnego. Stanowią je prawa fizyki lub niektórych teorii fizykalnych oraz określone wielkości fizyczne.

Historycznie najwcześniej stwierdzono niezmienniczość praw mechaniki klasycznej i niektórych wielkości fizycznych względem przekształceń Galileusza. Galileuszowską niezmienniczość praw mechaniki wyraża zasada względności mechaniki klasycznej: prawa–równania mechaniki są niezmiennicze względem transformacji Galileusza. Niezmienniczymi wielkościami tych przekształceń są m.in. przyśpieszenie, siła, a także masa i czas.

W stosunku do omówionych, przekształceniami ogólniejszymi są transformacje Lorentza. Niezmienniczość Lorentza (relatywistyczna) odnosi się do wszystkich praw fizyki i jest wyrażana w postaci zasady względności szczególnej teorii względności: prawa fizyki są niezmiennikami transformacji Lorentza. Spośród wielkości fizycznych niezmiennikami relatywistycznymi są: prędkość światła w próżni, przedział przestrzennoczasowy, czas własny (czas związany z układem, w którym zegar spoczywa), zaś z wielkości elektrodynamicznych – wyrażenia $H^2 - E^2$ i $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$.

5. *Niezmienniczość formy analitycznej prawa względem operacji zmiany teorii fizykalnej*

Omawiany rodzaj niezmienniczości może dotyczyć dwu sytuacji: a) gdy się bierze pod uwagę te same zjawiska dwu lub większej liczby teorii oraz b) rozpatruje się różne zjawiska dwu teorii.

Ad a) Różne dyscypliny fizyki traktują o takich samych zjawiskach. Drgania stwierdza się w układach mechanicznych, elektrycznych lub akustycznych; zjawisko rezonansu (określonej wielkości fizycznej) może wystąpić w układzie mechanicznym, elektrycznym albo akustycznym; interferencji czy dyfrakcji podlegają fale akustyczne, elektromagnetyczne i fale materii.

Charakterystyka ilościowa danego zjawiska *implicite* jest zawarta w równaniu różniczkowym, a *explicite* – w jego rozwiązaniu. Drganie harmoniczne tłumione w układzie liniowym opisuje jednorodne równanie różniczkowe

$x'' + 2bx' + cx = 0$; drgania wymuszone w układach dyssypatywnych – niejednorodne równanie $x'' + 2bx' + cx = f \cos\omega t$; propagację fali – równanie falowe $\Delta u = c^{-2} u_{tt}$, zjawisko dysfrakcji fal – wzór całkowy Kirchhoffa itd.

W celu dostosowania danego równania do charakterystyki określonego zjawiska w danym układzie fizycznym dokonuje się tylko odpowiedniego dostosowania poszczególnych symboli lub zmiany ich interpretacji. Na przykład w przypadku opisu ruchu tłumionego wahadła sprężynowego różniczkowań dokonuje się po czasie *t*, zaś pozostałe symbole przytoczonego równania interpretuje się następująco: x – wychylenie, x'– prędkość, x'' – przyśpieszenie, $\omega = (k/m)^{1/2}$ – częstość kołowa, $2b = \gamma$, gdzie k, m, γ odpowiednio oznaczają: współczynnik sprężystości, masę i współczynnik tarcia. Gdy chcemy zastosować omawiane równanie do opisu drgań tłumionych w obwodzie elektrycznym, symbole x, x', x'' należy zastąpić natężeniem prądu I oraz jego I i II pochodną po czasie, natomiast litery k, m i γ – odpowiednio: odwrotnością pojemności kondensatora „c", współczynnikiem indukcji własnej „L" i oporem ohmowym „R".

Dokonując podobnej zmiany symboli lub ich reinterpretacji w równaniu falowym albo we wzorze Kirchhoffa, można je dostosować do opisu propagacji lub dyfrakcji fal akustycznych, elektromagnetycznych czy fal materii.

W omawianym przypadku można więc mówić o niezmienniczości formy analitycznej równań czy wzorów wyrażających różne prawa fizyki względem operacji przechodzenia od jednej teorii do innej teorii.

Ad b) Oprócz sytuacji omówionej wyżej spotyka się i taką, gdzie teorie odnoszą się do różnych zjawisk, pomiędzy którymi zachodzi określona analogia. Przykładem może być teoria przewodnictwa cieplnego i dyfuzji albo mechanika i elektrodynamika ośrodków ciągłych.

Jednowymiarowy przepływ cząstek cieczy lub gazów oraz „przepływ" temperatury w jednorodnym i izotropowym ośrodku opisuje ten sam typ równania $u_t = a^2 u_{xx}$[6]. W celu przystosowania tego równania do opisu przewodnictwa cieplnego lub dyfuzji wystarczy tylko występujące w nim symbole zinterpretować: u jako temperaturę T (lub stężenie molekularne roztworu c), a^2 – jako współczynnik przewodzenia temperatury $\varkappa$ (albo współczynnik dyfuzji D).

6. *Niezmienniczości generowane przez symetrie czasu i przestrzeni*

Ze względu na konsekwencje, fundamentalne znaczenie mają niezmienniczości w przebiegu zjawisk, praw i całych teorii warunkowane symetriami czasu

[6] Por. np. I. G. A b r a m o w i c z, W. I. L e w i n, *Uprawnienija matiematiczeskoj fizyki*, Moskwa 1964, s. 153 n., 216 n.

i przestrzeni: jednorodnością czasu i przestrzeni fizycznej, izotropowością, a w mikrofizyce – inwersją przestrzeni.

Chodzi tutaj o niezmienność przebiegu zjawisk w układach fizycznych, rządzących tymi zjawiskami praw, a także teorii fizykalnych, względem operacji przesunięcia układu fizycznego w czasie o wielkość dt (jednorodność czasu fizycznego), w przestrzeni o wektor d**r** (jednorodność przestrzeni fizycznej), obrotu w przestrzeni o kąt dφ (izotropowość przestrzeni fizycznej) oraz – w mikrofizyce – o zastąpienie przestrzeni jej obrazem inwersyjnym (inwersja przestrzeni fizycznej)[7].

Omawiane niezmienniczości stanowią – podniesiony przez Augustynka[8] do roli zasad inwariancji – wyraz dobrze znanych właściwości zjawisk fizycznych polegających na tym, że ich charakter nie ulegnie zmianie, gdy się je bada (przy niezmienionych pozostałych warunkach) w danej chwili, teoretycznie po roku czy stuleciu, albo gdy się układ przeniesie z Lublina w inne miejsce czy wreszcie się go obróci w przestrzeni o pewien kąt dφ. Podobnie większość zjawisk fizycznych zachodzących w mikroświecie (z wyjątkiem zjawisk, za które są odpowiedzialne tzw. oddziaływania słabe) nie zmieni się, gdy zamiast w danej przestrzeni obserwuje się je w jej obrazie inwersyjnym. Na podstawie faktu niezmienniczości przebiegu zjawisk wnioskuje się o niezmienniczości rządzących nimi praw i całych teorii fizykalnych względem wymienionych operacji.

7. *Niezmienniki przekształceń kanonicznych*

Przekształceniem kanonicznym nazywa się takie nieosobliwe przekształcenie współrzędnych q_i, p_i przestrzeni fazowej[9] na współrzędne Q_i, P_i tejże przestrzeni, przy których nie ulegają zmianie hamiltonowskie równania ruchu:

$$\dot{q}_i = \frac{\vartheta H}{\vartheta p_i} \qquad \dot{p}_i = - \frac{\vartheta H}{\vartheta q_i} \ .$$

Wyłączając nieliczne przypadki, przy tych przekształceniach ulega zmianie postać analityczna funkcji Hamiltona $H(q_i, p_i, t)$.

[7] H. P i e r s a, *Symetria i jej funkcja poznawcza w fizyce*, Lublin 1990, s. 19 n; t e n ż e, *Symetrie ciągłe czasu i przestrzeni a zasady zachowania w fizyce*, „Roczniki Filozoficzne", 33(1985), z. 3, s. 8-103.

[8] Z. A u g u s t y n e k, *Własności czasu*, Warszawa 1970, s. 136 n.

[9] 2f-wymiarową przestrzenią fazową nazywamy iloczyn kartezjański f-wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej i f-wymiarowej przestrzeni pędów.

Niezmiennikami przekształceń kanonicznych są: równania ruchu (na podstawie definicji), tzw. nawiasy Poissone'a oraz objętość przestrzeni fazowej.

Nawiasami Poissone'a z funkcji $f_1(q_i, p_i, t)$, $f_2(q_i, p_i, t)$ klasy C^1 nazywa się wyrażenie:

$$(f_1, f_2) \stackrel{df}{=} \frac{\vartheta f_1}{\vartheta q_i} \frac{\vartheta f_2}{\vartheta p_i} - \frac{\vartheta f_1}{\vartheta p_i} \frac{\vartheta f_2}{\vartheta q_i} .$$

Gdy się przyjmie $f_1 = q_i$, $f_2 = q_j$; $f_1 = p_i$, $f_2 = p_j$; $f_1 = q_i$, $f_2 = p_j$ w zmiennych wyjściowych i $f_1 = Q_k$, $f_2 = Q_l$; $f_1 = P_k$, $f_2 = P_l$; $f_1 = Q_k$, $f_2 = P_l$ w zmiennych przekształconych, to spełnione są następujące relacje:

$$(q_i, q_j) = (p_i, p_j) = 0 \qquad (Q_k, Q_l) = (P_k, P_l) = 0,$$

$$(q_i, p_j) = \delta_{ij} \qquad (Q_k, P_l) = \delta_{kl},$$

gdzie $\delta_{\alpha\beta}$ jest deltą Kroneckera [= 0 dla $\alpha \neq \beta$ i 1 dla $\alpha = \beta$]. Niektórzy autorzy powyższe związki traktują jako warunki konieczne i dostateczne przekształceń kanonicznych[10].

Objętość ograniczonego obszaru przestrzeni fazowej Γ określa całka $\int dq_i dp_i$, gdzie i = 1, 2, 3 .... N (N – połowa wymiaru przestrzeni). W mechanice uzasadnia się twierdzenie, według którego wartość tej całki jest niezmiennikiem przekształceń kanonicznych[11].

8. *Niezmienniki przekształceń unitarnych*

W matematycznym opisie stanów mikroukładów oraz zachodzących w nich procesów wykorzystuje się różne reprezentacje (przedstawienia): położeniową, pędową, energetyczną. Nieraz zachodzi konieczność przejścia od jednej do innej reprezentacji. Omawiane przejścia matematycznie dokonywane są za pomocą przekształceń unitarnych. Przekształceniem unitarnym nazywa się taką transformację, przy której nie ulega zmianie kwadrat modułu wektora. W omawianym przypadku tym wektorem jest wektor stanu w przestrzeni Hilberta (ψ). Przekształceniu unitarnemu w mechanice kwantowej odpowiada formalny obrót wektora stanu w przestrzeni Hilberta.

[10] Por. L. L a n d a u, E. L i f s z i c, *Mechanika*, tłum. St. Bażański, Warszawa 1961, s. 194; G. B i a ł k o w s k i, *Mechanika klasyczna*, Warszawa 1975, s. 449.

[11] W. W e i z e l, *Fizyka teoretyczna*, t. I, cz. I, tłum. A. Teske, W. Staszewski, Warszawa 1985, s. 152-154.

Przez wyrażenie „niezmienniki przekształceń unitarnych" będziemy rozumieć te własności i wielkości wyrażeń kwantowomechanicznych, które nie ulegają zmianie przy transformacji unitarnej[12]. Należą do nich: a) hermitowskość operatora (macierzy); b) widmo wartości własnych operatora; c) iloczyn wewnętrzny i ortogonalność funkcji własnych operatora; d) całka typu $\int \psi^x \hat{A} \phi dx$ i wartość średnia; e) własność komutowania (antykomutowania) operatorów oraz podstawowe działania na operatorach (macierzach), ślad i wyznacznik macierzy.

Ad a) Każdemu operatorowi określonemu w danej przestrzeni liniowej odpowiada zbiór funkcji własnych f_n i wartości własnych a_n, tj. wielkości spełniających równanie operatorowe $\hat{A}f_n = a_n f_n$. Wśród operatorów liniowych ważną klasę stanowią tzw. operatory hermitowskie charakteryzujące się tym, że zbiór ich wartości własnych stanowią liczby rzeczywiste. Niezmienniczość hermitowskości operatora liniowego względem przekształceń unitarnych wyraża więc zachowanie własności „zbiór wartości własnych a_n operatora $\hat{A}$ stanowią liczby rzeczywiste" w dowolnej reprezentacji.

Ad b) Zbiór wartości własnych operatora nazywamy jego widmem. W zależności od tego, czy dany zbiór jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych, czy rzeczywistych, mówi się o widmie dyskretnym albo ciągłym określonego operatora. Wyrażenie „widmo operatora hermitowskiego jest niezmiennikiem przekształceń unitarnych" może być podwójnie rozumiane. W rozumieniu słabszym znaczy ono tyle, co: przy transformacji unitarnej widmo dyskretne pozostaje widmem dyskretnym, a widmo ciągłe – ciągłym. W rozumieniu silniejszym należy je interpretować następująco: wartości liczbowe poszczególnych składowych widma nie ulegają zmianie przy omawianym przekształceniu. Wspomniane wyrażenie należy brać w silniejszym rozumieniu.

Ad c) Iloczynem wewnętrznym (skalarnym) dwu wektorów stanu nazywamy iloczyn wektora stanu f_n i wektora stanu z nim sprzężonego f_n^x. Szczególnym przypadkiem tego iloczynu jest kwadrat modułu (norma) wektora stanu. Ważnymi własnościami iloczynu wewnętrznego są ortogonalność i unormowanie (ortonormalność) wektorów stanu. Ortogonalność orzeka, że dwa dowolne wektory stanu danego operatora hermitowskiego „są do siebie prostopadłe", czyli że $(f_n, f_m) = 0$, zaś unormowanie, że $(f_n, f_n^x) = 1$.

Ad d) Przyjmując w przytoczonym wzorze, że $\phi = \psi$, otrzymujemy wyrażenie na wartość średnią obserwabli A odpowiadającej operatorowi hermitowskiemu $\hat{A}$: $\int \psi^x \hat{A} \psi dx$.

Ad e) Wynik działania dwu operatorów $\hat{A}$ i $\hat{B}$ (także hermitowskich) na funkcję f(x) jest na ogół nieprzemienny, to znaczy, że $\hat{A}\hat{B}f$ nie jest równe $\hat{B}\hat{A}f$.

[12] L. W. T a r a s o w, *Podstawy mechaniki kwantowej*, tłum. W. Zielicz, Warszawa 1984, s. 173.

Tylko w niektórych przypadkach działania te dają ten sam wynik. W pierwszym przypadku mówi się, że operatory $\hat{A}$ i $\hat{B}$ ze sobą nie komutują (antykomutują), w drugim zaś – że komutują. W ostatnim przypadku wprowadza się pojęcie komutatora operatorów $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$. Komutowanie i antykomutowanie dwu operatorów hermitowskich jest cechą niezmienniczą przekształceń unitarnych.

II. FUNKCJA POZNAWCZA NIEZMIENNIKÓW

Znaczenie niezmienników omówionych w I części przekształceń można dostrzec przynajmniej w następujących procedurach poznawczych: przy opisie, ustalaniu wymogów dla poprawnie sformułowanych praw–równań fizyki oraz przy tworzeniu niektórych teorii fizykalnych. Oczywiście w różnych spośród wymienionych procedurach rola różnych rodzajów niezmienników ujawni się też w różnym stopniu.

Zwykle przez opis rozumie się czynność zmierzającą do gromadzenia danych odnośnie do opisywanego przedmiotu lub wynik tej czynności. W opisie fizykalnym chodzi głównie o dane ilościowe (charakterystyki ilościowe) dotyczące badanego układu fizycznego albo zachodzących w nim procesów.

Jednakże w fizyce funkcjonuje także inny sposób rozumienia wyrażenia „opis". Mówi się, że dane równanie różniczkowe, a także jego rozwiązanie, czyli określona funkcja matematyczna fizykalnie zinterpretowana, opisuje dany proces. O ile więc do opisu stanu układu wystarczy posiadanie zbioru charakteryzujących go jednoznacznie wielkości fizycznych, o tyle do opisu procesu należy wykorzystać funkcję przedstawiającą sposób zależności jakiejś wielkości od innych wielkości traktowanych jako zmienne niezależne. Są nimi bardzo często: czas, współrzędne przestrzenne, ale także i inne wielkości, np. napięcie, od którego zależy natężenie płynącego w obwodzie prądu elektrycznego.

Opis procesu fizycznego jest więc realizowany za pomocą pojęcia funkcji. Wyrażenie „równanie różniczkowe opisuje..." jest rozumiane w ten sposób, że „dany proces opisuje stanowiąca rozwiązanie tego równania odpowiednia funkcja".

Należy zauważyć, że opis za pomocą funkcji może służyć także do opisu stanu, przez który „przechodzi" układ podlegający określonej przemianie. W tym celu za występujące w funkcji zmienne niezależne trzeba podstawić charakteryzujące stan układu wartości stałe i wyznaczyć inną wielkość fizyczną (funkcję) dla układu w tym stanie.

W wielu przypadkach technicznych i fizycznych sama znajomość charakterystyk ilościowych układu albo zachodzących w nim zmian już stanowi poszukiwany rezultat poznania. Z sytuacjami takimi spotykamy się przy określaniu siły nośnej skrzydła albo oporu właściwego jakiegoś półprzewodnika. Uzyskanie pierwszej z tych informacji w badaniach modelowych jest możliwe dzięki przekształceniu skali.

Dla uzyskania charakterystyk ilościowych w postaci funkcji bardzo ważne znaczenie ma umiejętność rozwiązywania równań różniczkowych (także całkowych). W tym celu wykorzystuje się różne techniki rachunkowe wypracowane przez matematyków. Na przykład metoda Fouriera lub d'Alemberta rozwiązywania równania falowego, wybór rodzaju układu współrzędnych dostosowanego do symetrii układu itp.

Uwaga ta dotyczy także rozwiązywania hamiltonowskich równań ruchu. Rozwiązywanie tych równań dla danego układu materialnego przedstawia zadanie o różnym, nieraz nawet dużym, stopniu trudności. Dzięki przekształceniom kanonicznym można wybrać takie współrzędne uogólnione i odpowiadające im pędy uogólnione, w których omawiane równania są całkowalne możliwie najprościej. Należy jednak podkreślić, że dla danej sytuacji fizycznej niezmienniczość kanoniczna dopuszcza więcej niż jedno przekształcenie zachowujące równania Hamiltona. W związku z tym można otrzymać więcej niż jeden układ równań przekształconych. Stopień trudności rozwiązania tych układów bywa różny, nieraz wcale nie mniejszy od stopnia trudności równań wyjściowych. Wybór przekształceń wiodących do równań najłatwiej całkowalnych zależy od rozwiązującego, jego wprawy w rozwiązywaniu tego rodzaju zagadnień, często intuicji. Celowe jest na przykład poszukiwanie przekształceń prowadzących do hamiltonianu z dużą liczbą tzw. współrzędnych cyklicznych. Całki wielkości kanonicznie sprzężonych z takimi współrzędnymi są bowiem wielkościami stałymi.

Przy wypowiedzianych zastrzeżeniach przekształcenia kanoniczne ułatwiają procedurę całkowania równań ruchu. W praktyce okazało się, że zamiast rozwiązywania równań przekształconych te same informacje o badanym układzie można uzyskać w wyniku scałkowania innego równania (Hamiltona-Jacobiego), które otrzymuje się dzięki przekształceniom kanonicznym.

Dla dyskutowanego zagadnienia duże znaczenie ma niezmienniczość formy analitycznej równania względem operacji zmiany teorii fizykalnej. W świetle uwag wypowiedzianych w I części artykułu idzie tu o analogię fizyczną, a nawet o strukturalną identyczność równań należących do różnych teorii fizykalnych (izoformizm nomologiczny)[13].

---

[13] O izomorfizmie nomologicznym zob.: Z. H a j d u k, *Pojęcie i funkcja modelu*, „Roczniki Filozoficzne", 20(1972), z. 3, s. 77-124.

Dzięki faktowi, że to samo zjawisko lub różne zjawiska opisuje tego samego kształtu równanie różniczkowe, wystarczy znaleźć jego rozwiązanie, szczegółowo je przebadać dla jednego zjawiska, aby uzyskane informacje móc stosować do tego samego zjawiska albo innego zjawiska w nowej dziedzinie badań. Stwierdzenie to wymaga dodatkowych komentarzy.

Aby móc ustalić odpowiedniość pomiędzy odpowiednimi prawami, powinny w zasadzie istnieć teorie dotyczące tych dziedzin badań. Istnienie teorii nie oznacza jednak, iż wszystkie twierdzenia teorii są znane, a wszystkie zjawiska opisane i wyjaśnione. Nawet dojrzałe teorie uważane za klasyczne nie są teoriami zupełnymi. Są one otwarte zarówno ze względu na zbiór twierdzeń, jak i opisywanych czy wyjaśnianych zjawisk. W takich dyscyplinach istnieją zawsze różne zagadnienia szczegółowe, nieraz techniczne, wymagające zbadania. Przykładem może być zagadnienie propagacji fali akustycznej w skomplikowanym falowodzie albo opływ ciała dowolnego kształtu przez zmienny w czasie strumień gazu.

Poza tym, żeby próbować badać jakieś zjawisko na podstawie informacji uzyskanych o nim w innej dziedzinie badań, niekoniecznie trzeba dysponować pełną analogią, ustaloną między dyscyplinami mającymi odpowiednie teorie. Nieraz pożyteczna okazuje się analogia częściowa uwzględniająca podobieństwo pod pewnymi tylko względami.

Ograniczeniem w stosowaniu analogii mechaniczno-elektryczno-akustycznej wadaje się być niejednoznaczność odpowiedniości pomiędzy wielkościami fizycznymi charakteryzującymi takie same procesy zachodzące w układach mechanicznym, elektrycznym i akustycznym. Wyrazem omawianej niejednoznaczności są dwa rodzaje tej analogii: analogia I rodzaju (analogia siła–napięcie–ciśnienie) i II rodzaju (analogia siła–natężenie–ciśnienie)[14]. W każdym z tych dwu przypadków ma miejsce inne przyporządkowanie odpowiednich wielkości[15]. Ograniczenia te są jednak pozorne. W każdym z wymienionych rodzajów analogii, tego samego kształtu równania różniczkowe są spełniane przez inne zbiory zmiennych: mechanicznych, elektrycznych i akustycznych. Skutkiem tego, rozwiązując odpowiednie równania, otrzymujemy inne charakterystyki ilościowe. Należy zaznaczyć, iż w praktyce badawczej stosuje się zawsze konsekwentnie jedną z analogii. Możliwość wyboru jednej z nich należy traktować jako dwa alternatywne sposoby badania określonego zjawiska w interesującym nas układzie.

---

[14] Por. np. M. K w i e k, A. Ś l i w i ń s k i, E. H o j a n, *Akustyka laboratoryjna*, cz. II, Warszawa–Poznań 1971, s. 33; R. W. B. S t e p h e n s, A. E. B a t e, *Wave Motion and Sound*, London 1950, s. 314 n.

[15] K w i e k, Ś l i w i ń s k i, H o j a n, dz. cyt., s. 33-34.

W technice i fizyce (mechanika *continuum*, akustyka, astrofizyka) w interesującym nas aspekcie trudno przecenić doniosłość poznawczą przekształceń podobieństwa i ich niezmienników. Gdy znane są odpowiednie prawa–równania (np. ciągłości, Navier–Stokesa) i mają one rozwiązania, stanowią alternatywny sposób zdobywania informacji o układzie bądź zachodzących w nim procesach fizycznych. Istnieją jednak takie sytuacje, w których – ze względu na zbyt duże rozmiary obiektów (skrzydło samolotu, kadłub okrętu) lub ich rozmiary bardzo małe – bezpośrednie badanie doświadczalne procesów i uzyskiwanie potrzebnych danych jest niewykonalne. W takich przypadkach, na podstawie zasady prawdopodobieństwa, konstruuje się odpowiednio zmniejszone albo powiększone modele mechaniczne (inercyjne, Reynoldsa lub inne) tych obiektów. Na owych modelach, już w warunkach laboratoryjnych (np. tunelach aerodynamicznych), przeprowadza się określone czynności poznawcze. Uzyskane w nich wyniki, po odpowiednich przeliczeniach, stosuje się do samych obiektów (skrzydeł, kadłubów). Trzeba też dodać, że w celu zachowania niezmienionymi odpowiednich liczb bezwymiarowych nieraz zachodzi konieczność zastąpienia danego płynu w warunkach naturalnych innym płynem o specjalnie dobranych własnościach fizycznych (gęstości, lepkości, przewodnictwie cieplnym) w modelu.

Ponieważ uzasadnienie zasady podobieństwa jest dokonywane przy bardzo ogólnych założeniach (np. płyn stanowi *continuum* fizyczne), na ogół dokładność charakterystyk ilościowych dotyczących obiektu jest taka sama, jak w warunkach modelu. Jeżeli zaś w pewnych przypadkach założenia te są spełnione tylko w przybliżeniu, zachodzi konieczność wprowadzania różnych korekt. Opisana procedura zawodzi w zasadzie dopiero wtedy, gdy zachodzi potrzeba uwzględnienia molekularnej struktury płynu.

Problem znaczenia niezmienników unitarnych dla opisu kwantowego omówimy w kontekście schematu pojęciowego mechaniki kwantowej.

Należy zauważyć, że chociaż – podobnie jak w fizyce klasycznej – charakterystyka ilościowa mikroobiektu w danym stanie kwantowym ogranicza się także do podania wartości liczbowych określonych wielkości fizycznych, to jednak – w porównaniu z opisem makroskopowym – występują tutaj istotne różnice. Jak wiadomo, podstawowe pojęcie mechaniki kwantowej – funkcja falowa ψ (lub wektor stanu w przestrzeni Hilberta) jest tym obiektem, który dostarcza wszystkich informacji o stanie, a także procesie, jakiemu ten mikroobiekt podlega. Tytułem wyjaśnienia dodajmy, że stan mikroukładu określa niezależna od czasu funkcja falowa, zaś proces – jakiemu ten mikroukład podlega – zależna od czasu funkcja falowa. Za pomocą funkcji falowej określa się różne wielkości ilościowe charakteryzujące ten mikroobiekt.

Trzeba jednak podkreślić, że z powodu niemożności wyznaczenia takich wielkości, jak klasycznie rozumiana prędkość, przyśpieszenie czy pojęcie toru, w mikrofizyce te charakterystyki tracą sens fizyczny. Poza tym, oprócz wielkości klasycznych (pęd, moment pędu, energia), do opisu mikroobiektu wykorzystuje się specyficzne charakterystyki kwantowe, jak spin, hiperładunek, parzystość, dziwność. Jak wiadomo, zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga, nie wszystkie wymienione charakterystyki kwantowe dla układu w danym stanie mogą być jednocześnie wyznaczone. Z tego powodu, dla opisu kwantowego podstawowe znaczenie mają maksymalne zbiory wielkości jednocześnie mierzalnych (tzw. układy zupełne wielkości). Dla swobodnego elektronu stanowią go: trzy współrzędne pędowe i spin, dla fotonu – liczba falowa i polaryzacja.

Aparatem matematycznym mechaniki kwantowej jest rachunek operatorów hermitowskich[16]. Zgodnie z postulatami mechaniki kwantowej, każdej wielkości fizycznej (zwanej zmienną dynamiczną lub obserwablą) przyporządkowany jest odpowiedni operator hermitowski, natomiast wynik pomiaru tej wielkości winien być tożsamy z jedną z wartości własnych tego operatora.

W świetle tych ustaleń unitarną niezmienniczość hermitowskości operatora należy rozumieć w ten sposób, że własność „wynik pomiaru danej obserwabli jest liczbą rzeczywistą” pozostaje obowiązująca w dowolnej reprezentacji. Jest to wyraźne dookreślenie rezultatu pomiaru: wynik pomiaru dowolnej obserwabli musi być liczbą rzeczywistą w dowolnej reprezentacji. W fizyce klasycznej takie rozumienie wyniku pomiaru było oczywiste. W mechanice kwantowej, gdzie operatory mają także zespolone wartości własne, powyższe żądanie było powodem wyboru operatorów hermitowskich spośród dużego zbioru operatorów liniowych. Pośrednio – omawiany rodzaj niezmienniczości stanowi jeden z ważkich argumentów za poprawnością interpretacji wartości własnych operatora hermitowskiego jako rezultatów pomiaru odpowiadającej mu obserwabli. Niespełnienie tego warunku czyniłoby bezpodstawnymi dalsze elementy interpretacji fizycznej pojęć mikrofizyki.

Niezmienniczość widma wartości własnych operatora hermitowskiego względem przekształceń unitarnych w mocniejszym rozumieniu oznacza, że zbiór dozwolonych wartości liczbowych, jakie może przyjąć zmienna dynamiczna dla danego mikroukładu w jego określonym stanie kwantowym, nie może zależeć od wyboru reprezentacji. Wartości liczbowe obserwabli zależą od rodzaju mi-

[16] O operatorach hermitowskich zob.: B. Średniawa, *Mechanika kwantowa*, Warszawa 1981, s. 44; F. W. Byron, R. W. Fuller, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, t. I, tłum. M. Krawczyk, Z. Rek, Warszawa 1973, s. 146-147.

kroobiektu i jego stanu kwantowego, nie zaś od rodzaju formalizmu, w którym są wyrażone.

W mikrofizyce nie można pominąć zakłócenia badanego mikroobiektu przez przyrząd pomiarowy. Jeżeli rozpatruje się dwie procedury pomiarowe przeprowadzone na jednym mikroobiekcie, to na ogół jego stan końcowy zależy od kolejności, w jakiej przeprowadzono te pomiary. Tylko w przypadku wyznaczania wielkości jednocześnie mierzalnych kolejność poszczególnych pomiarów nie ma wpływu na stan końcowy mikroobiektu. A różny stan mikroobiektu charakteryzują różne wartości określonych wielkości fizycznych. Powyższej własności przeprowadzania pomiarów złożonych w rachunku operatorów odpowiada antykomutowanie i komutowanie dwu operatorów. Według omawianej odpowiedniości, unitarna niezmienniczość komutowania lub antykomutowania dwu operatorów hermitowskich wyraża ten fakt, że jeżeli dwie zmienne dynamiczne są jednocześnie mierzalne albo niemierzalne w jednej reprezentacji, to pozostają nimi w każdej innej reprezentacji.

Komutującym operatorom odpowiada wspólny zbiór funkcji własnych. Jak każda funkcja falowa w ogóle, tak i funkcja własna charakteryzuje jeden z możliwych stanów mikroukładu. Unitarna niezmienniczość własności „bycia wspólnym zbiorem funkcji własnych” znaczy więc tyle samo, co konkretny stan kwantowy mikroukładu nie zależy od wyboru reprezentacji.

W mechanice kwantowej całka $\int \psi^x \hat{A} \psi dx$ określa wartość średnią obserwabli A odpowiadającej operatorowi $\hat{A}$. Unitarna niezmienniczość omawianej całki wyraża sąd, że wartość średnia, jaką może przyjąć dana obserwabla, jest taka sama w dowolnej reprezentacji.

Oprócz różnych wymogów, jakie winny spełniać prawa fizyki (sprawdzalność, systemowość, predyktywność) domagamy się, aby każde – sformułowane w postaci równości matematycznej, pretendujące do roli prawa – wyrażenie było niezależne od wszelkich warunków, w których jest sformułowane bądź stosowane. W ten sposób rozumiane są wyrażenia „bezwzględność” lub „niezmienniczość” prawa. Z tego powodu uwagi wypowiedziane w I części artykułu mogą posłużyć do wyeksponowania tych cech praw–równań fizyki, na które metodologowie nie zawsze zwracają należytą uwagę albo je w ogóle pomijają.

Od wszystkich praw–równań fizyki podlegających sprawdzeniu w doświadczeniu żąda się, aby – oprócz innych niezmienniczości – odznaczały się niezmienniczością względem operacji zmiany przyrządu lub obserwatora. *Implicite* ten rodzaj niezmienniczości jest postulowany przez fizyków i metodologów fizyki, *explicite* nie jest podkreślany zarówno przez jednych, jak i drugich.

Galileuszowska niezmienniczość jest tą cechą, która przysługuje wszystkim prawom mechaniki klasycznej i teorii na niej zbudowanych. Niezmienniczość galileuszowska praw–równań jest niezmienniczością przybliżoną w tym sensie, że z dobrym przybliżeniem odnosi się tylko do małych (w porównaniu z c) prędkości układu.

Do dzisiaj utrzymuje się, że niezmienniczością ścisłą jest niezmienniczość relatywistyczna wszystkich praw–równań fizyki. Wymóg ten spełniają prawa–równania fizyki klasycznej. Przy formułowaniu praw fizyki współczesnej żądanie niezmienniczości relatywistycznej jest jednym z podstawowych wymogów, jakie musi spełniać każde nowe prawo–równanie fizyki. Przykładem takiej sytuacji może być ustalenie formuły analitycznej dla hamiltonianu oddziaływań słabych, gdzie oprócz takich żądań, jak hermitowskość wymaga się, aby był on relatywistycznie niezmienniczy. W odniesieniu do niezmienników relatywistycznych obowiązuje wymóg, aby prawo–równanie było pod względem matematycznym odpowiednio sformułowane. Drugie prawo Newtona w formie $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ jest relatywistycznie niezmiennicze, natomiast w postaci $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ tego warunku nie spełnia.

Od niezmienniczości relatywistycznej nie mniejsze znaczenie ma niezmienniczość prawa–równania względem operacji przejścia od jednego do innego układu jednostek. Przedyskutujemy zagadnienie zakresu obowiązywania omawianej niezmienniczości. Problem ten może być rozumiany na dwa różne sposoby. Może w nim chodzić o pytanie, do jakich teorii fizykalnych mają należeć prawa–równania fizyki, które są niezmiennicze w omawianym sensie albo jakie dodatkowe warunki fizyczne muszą być nałożone na układ materialny, aby obowiązujące w nim prawa–równania pozostawały niezmiennicze względem operacji zmiany układu jednostek?

W pierwszej części artykułu ustalono, że prawa fizyki niekwantowej są niezmiennicze względem operacji przejścia od jednego do innego układu jednostek. Okazuje się, że w sposób zupełnie analogiczny można wykazać, iż dyskutowana niezmienniczość przysługuje także prawom mechaniki kwantowej. Jakkolwiek funkcja falowa jest wielkością bezwymiarową, to najważniejsze operatory kantowomechaniczne (z wyjątkiem operatora parzystości, odwrócenia czasu, sprzężenia ładunkowego oraz operatorów z nich złożonych) są obdarzone odpowiednimi wymiarami. Na ogół „stosunkowo proste" wymiary mają utworzone z tych obiektów formuły matematyczne. Przykładowo: równania Schrödingera mają wymiar energii. Z tego powodu okazywanie interesującej nas niezmienniczości jest stosunkowo łatwe.

Odpowiadając na drugie pytanie należy stwierdzić, iż na omawianą niezmienniczość nie mogą być nałożone żadne ograniczenia w rodzaju warunku, jaki musi spełniać niezmienniczość galileuszowska praw–równań fizyki. Innymi słowy: niezmienniczość prawa–równania fizyki względem operacji zmiany układu jednostek jest niezmienniczością ścisłą. Dopóki warunki zewnętrzne nałożone na układ materialny dopuszczają stosowanie określonego prawa–równania, dopóty jest ono ściśle niezmiennicze w dyskutowanym sensie.

Dla poprawnie sformułowanego prawa–równania fizyki niemałe znaczenie ma jego niezmienniczość względem operacji zmiany skali. Oprócz dyskutowanej już możliwości stosowania określonych praw–równań do opisu zjawisk zachodzących w układach fizycznych o krańcowo różnych rozmiarach liniowych – wraz z tzw. analizą wymiarową – omawiana niezmienniczość pozwala badać i ustalać poznawczo ważne cechy zjawisk w różnych dyscyplinach fizyki: mechaniki punktów materialnych, akustyki, termodynamiki, a nawet astrofizyki. Przykładowo wymieńmy takie rezultaty, jak widmowy rozkład gęstości energii w promieniowaniu ciała doskonale czarnego czy ustalenie warunków równowagi gwiazd i ruchu gazu modelującego gwiazdę.

Z powyższych stwierdzeń można wnosić, iż nie tylko prawa mechaniki ośrodków ciągłych są niezmiennicze względem dyskutowanej operacji. Przez dobór odpowiednich jednostek miary w zasadzie można wykazać niezmienniczość względem operacji zmiany skali prawa–równania należącego do dowolnej teorii fizykalnej.

Wypowiedziane w punkcie 5 pierwszej części artykułu uwagi pozwalają sądzić, że niezmienniczość względem operacji zmiany teorii fizykalnej (analogia fizyczna) przysługuje stosunkowo nielicznemu zbiorowi praw–równań fizyki. Innymi słowy: omawiana niezmienniczość jest własnością nie każdego prawa–równania fizyki.

Jednakże jako uzupełnienie tej niezmienniczości (analogii dosłownej) można wskazać niezbyt liczne, ale poznawczo bardzo ważne, przykłady analogii swobodniejszej. Idzie tu o podobieństwo struktur i własności pewnych formuł matematycznych charakteryzujące się tym, że do przejścia od jednej z nich do drugiej nie wystarcza zmiana symboli zmiennych lub ich reinterpretacja fizyczna.

Przykładem takich formuł mogą być: wyrażenie na pochodną zupełną dowolnej zmiennej dynamicznej i takąż pochodną dla operatora (w obrazie Heisenberga) albo nawiasy Poissone'a i komutatory. Przejście od jednej do innej formuły jest w tym wypadku możliwe, gdy się zamieni zmienną dynamiczną na operator hermitowski, a nawiasy Poissone'a na odpowiedni komutator lub odwrotnie.

O wadze tego rodzaju podobieństwa świadczy fakt, że – według opinii ogółu fizyków – kwantowanie polega na zastąpieniu zmiennych dynamicznych odpowiadającymi im operatorami, a nawiasów Poissone'a z dwu takich zmiennych – komutatorami z odpowiadających tym zmiennym operatorów hermitowskich[17].

---

[17] Por. np. Ś r e d n i a w a, *Mechanika kwantowa*, s. 150-151; L. I. S c h i f f, *Mechanika kwantowa*, tłum. Z. Rek, Z. Rek, Warszawa 1977, s. 162-163.

Na podstawie informacji podanych w punkcie 7 pierwszej części artykułu widzimy, że kanoniczna niezmienniczość hamiltonowskich równań ruchu dotyczy praw–równań fizyki w trzecim znaczeniu uwag wstępnych. Znaczy to, że postać analityczna praw–równań fizyki dla konkretnego układu mechanicznego ulega zmianie przy przekształceniach kanonicznych, zachowany natomiast pozostaje przepis na ich układanie. Uświadomienie sobie tego faktu jest ważne także i z tego powodu, że poza mechaniką formalizm kanoniczny jest stosowany również w elektrodynamice kwantowej.

Przy formułowaniu dowolnego prawa–równania fizyki fundamentalne znaczenie ma ich niezmienniczość względem operacji przesunięcia w czasie i przestrzeni oraz obrotu w przestrzeni układu fizycznego. Z faktu tej niezmienniczości (albo symetrii czasu i przestrzeni), na podstawie twierdzenia Noether lub metod alternatywnych, wyprowadza się zasady zachowania energii, pędu i momentu pędu. Ponieważ zasady te obowiązują we wszystkich dotychczas znanych teoriach, konieczne jest, aby wymóg omawianej niezmienniczości spełniały wszystkie prawa–równania tych teorii. Dokładniejsze rozważania wskazują na to, że wszystkie prawa–równania fizyki klasycznej i kwantowej czynią zadość temu żądaniu[18].

Przy tworzeniu dowolnej teorii fizykalnej, oprócz przyjęcia innych komponentów teorii (aparatura pojęciowa, aparat matematyczny), przyjmowane są określone twierdzenia o możliwie dużym stopniu ogólności (nazywane przez fizyków zasadami, postulatami lub prawami). Przykładem takich ogólnych praw mogą być zasady wariacyjne mechaniki, prawa Maxwella w elektrodynamice, równania Schrödingera czy Diraca, odpowiednio w nierelatywistycznej i relatywistycznej mechanice kwantowej.

Wśród owych ogólnych twierdzeń określonych teorii występują niezmiennicze względem pewnych przekształceń zasady. Klasycznym przykładem może być zasada stałości prędkości światła. Jak wiadomo, wszystkie twierdzenia szczególnej teorii względności są bezpośrednimi lub pośrednimi konsekwencjami transformacji Lorentza. Przy różnych sposobach wyprowadzenia tych przekształceń *explicite* lub *implicite* wykorzystywana jest ta zasada. Nadto stanowi ona rację uzasadniającą dla relatywistycznego rozróżniania czasów trwania danego zdarzenia w dwu różnych układach inercjalnych oraz przy postulowaniu twierdzenia o relatywistycznej niezmienniczości przedziału przestrzenno-czasowego.

Do niezmienników pewnych przekształceń stanowiących podstawę dla formułowania teorii fizykalnych trzeba zaliczyć kanoniczną niezmienniczość objętości

[18] P i e r s a, *Symetria i jej funkcja*, s. 71 n.; t e n ż e, *Nieciągłe symetrie przestrzeni i czasu*, „Roczniki Filozoficzne”, 34(1986), z. 3, s. 127-160.

przestrzeni fazowej oraz niezmienniczość formy analitycznej prawa–równania względem operacji zmiany teorii.

Kanoniczna niezmienniczość objętości przestrzeni fazowej jest podstawą do zbudowania fizyki statystycznej. W tej teorii każdemu stanowi, w jakim może znaleźć się dany układ fizyczny, przyporządkowany jest w przestrzeni fazowej jeden punkt–obraz. Dzięki takiej odpowiedniości, olbrzymiej liczbie wszelkich możliwych stanów mikroskopowych badanego układu fizycznego odpowiada taka sama liczba punktów–obrazów w omawianej przestrzeni (objętość przestrzeni fazowej). Niezmienniczość objętości przestrzeni fazowej względem przekształceń kanonicznych wyraża fizycznie oczywisty fakt, że omawiana liczba mikrostanów układu nie może zależeć od wyboru współrzędnych, użytych do opisu mikroskopowego danego układu fizycznego. Warto zauważyć, że kanoniczna niezmienniczość nie przysługuje iloczynowi kartezjańskiemu przestrzeni konfiguracyjnej i przestrzeni prędkości. Z podanej wyżej racji przestrzeń taka, choć teoretycznie możliwa, nie interesuje fizyków. W odpowiedniej dla danego układu objętości przestrzeni fazowej uzasadnia się tzw. rozkłady kanoniczne stanowiące podstawę do wyprowadzenia wszystkich twierdzeń teorii.

Przy poszukiwaniu formy analitycznej dla podstawowego prawa mikrofizyki wykorzystywano analogię optyczno-mechaniczną oraz relacje pomiędzy optyką geometryczną i optyką falową[19].

W roku 1824 Hamilton dostrzegł analogię pomiędzy równaniem eikonału w optyce geometrycznej i równaniem Hamiltona–Jacobiego w mechanice. Wiadome było również, że optyka geometryczna stanowi przybliżenie optyki falowej z równaniem falowym jako podstawowym prawem tej teorii. Biorąc pod uwagę relacje pomiędzy omawianymi teoriami, de Broglie poszukiwał równania będącego analogonem równania falowego, którego klasycznym przybliżeniem byłoby równanie Hamiltona–Jacobiego. Równanie to sformułował w 1926 r. Schrödinger.

*

Historia fizyki i techniki dostarcza wielu przykładów wykorzystania niezmienników różnego rodzaju przekształceń w innych procedurach poznawczych, a zwłaszcza w wyjaśnianiu i przewidywaniu nowych zjawisk. W naszych rozważaniach ograniczyliśmy się do najbardziej reprezentatywnych.

[19] H. P i e r s a, *Geneza mechaniki kwantowej*, „Summarium", 25(1976), s. 135-142.

THE INVARIANCES IN PHYSICS AND THEIR FUNCTION IN THE PHYSICAL COGNIZANCE

S u m m a r y

The paper presents the invariances of the most important physical transformation and their meaning for the cognizance in physics.

In the first part are discussed the invariances the physical laws with respect to a change of the system of units, physical theory (physical analogy), Galileo's and Loretz's transformations, the inavariances generated by the symmetry of space and time, canonical and unitary transformations.

The second part is focussed on the meaning of these invariances for the description in physics, as well as, for the forming of physical laws and theories.