R O C Z N I K I   F I L O Z O F I C Z N E
Tom XXXIX-XL, zeszyt 3 – 1991-1992

WIESŁAW WÓJCIK

IMRE LAKATOSA FILOZOFIA MATEMATYKI

1. OGÓLNY SCHEMAT FILOZOFII MATEMATYKI LAKATOSA

1. *Opozycja Lakatosa względem "dogmatyzmu"*

Filozofia matematyki była pierwszą dziedziną badań, jaką zajął się, znany ze swojej późniejszej koncepcji programów badawczych, węgierski filozof nauki Imre Lakatos[1]. Jego refleksje nad matematyką wyrastały z badań nad tym etapem historii matematyki, który przyczynił się do powstania nowych działów matematyki, co w pewnym okresie wiązało się z kryzysem w podstawach matematyki i z bezskuteczną próbą unifikacji matematyki[2]. Po wyjeździe z Węgier na Zachód w końcu lat pięćdziesiątych Lakatos pisze pracę doktorską poświęconą historycznej analizie dowodu hipotezy Eulera-Descartesa[3]. Nieco później uzupełnia te badania analizą powstania dowodu hipotezy Leibniza. Badania te zostały zamieszczone w wydanej w 1976 r. książce *Proofs and Refutations*.

Istotnym elementem tych analiz jest dostrzeżenie pojawienia się w XIX w. nowej metody badań. Metoda ta została nazwana przez Lakatosa metodą "dowodów i kontrprzykładów" (*proofs and refutations*). Dokonując analizy wskazanej metody Lakatos dochodzi do poglądów, w których przeciwstawia się wszelkiemu "dogmatyzmowi" w matematyce, tzn. uważa, iż rozwój dokonujący się w matematyce nie polega na ciągłym wzroście raz na zawsze ustalonych twierdzeń, lecz

[1] Pozycje, w których Lakatos przedstawił swoje poglądy na temat rozwoju matematyki, ograniczają się praktycznie do następujących: *Proofs and Refutations*. Cambridge I976. *Infinite Regress and Foundations of mathematics*. "Proceedings of Aristotelian Society" Supplementary Volume 34: 1962; *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*. "Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science" Amsterdam 1967 s. 199-202.

[2] Próby te przebiegały w duchu redukcjonistycznym i polegały najpierw na redukcji matematyki do logiki; następnie po klęsce tego programu pojawiły się próby sprowadzenia matematyki do teorii mnogości czy do teorii kategorii.

[3] Hipoteza ta ukazuje związek pomiędzy ilością ścian, wierzchołków i krawędzi dowolnego wielościanu: $m + n - p = 2$, gdzie m – ilość wierzchołków, n – ilość ścian, p – ilość krawędzi.

sprowadza się do ewolucji metod stosowanych w matematyce czy polega wręcz na pojawianiu się nowych metod badawczych. W matematyce nie ma więc twierdzeń – są tylko hipotezy, natomiast dowody tzw. twierdzeń pełnią rolę (wraz z kontrprzykładami) generatorów pojęć. Dowód nie ukazuje prawdziwości twierdzeń, lecz jest metodą wskazującą na istnienie pojęć.

Sądzę, że w tym ujęciu zawiera się całkowicie nowe spojrzenie na znaczenie matematyki i jej istotę. Widać przy tym, iż przeciwstawiając się dogmatyzmowi nie opowiada się Lakatos tym samym za sceptycyzmem. Wartość matematyki polega według niego na doskonaleniu metod badawczych oraz na odkrywaniu czy konstruowaniu nowych pojęć (w swoich rozważaniach Lakatos pomija kwestię sposobu istnienia pojęć matematycznych). Tym samym przeciwstawia się Lakatos trzem interpretacjom matematyki, które pojawiły się na przełomie XIX i XX w., tj. intuicjonizmowi, formalizmowi i logicyzmowi[4]. Opozycja względem tych kierunków filozoficznych idzie znacznie dalej, sięga poza elementy "dogmatyczne" zawarte w tych filozofiach. Kierunki te w sposób programowy odrzucały (w duchu pozytywistycznym[5]) wszelkie "głębsze" interpretacje filozoficzne dotyczące natury obiektów matematycznych, problemu prawdy itp. Również uznawały za nieistotne i niepotrzebne do zrozumienia matematyki badania nad historią matematyki. Według Lakatosa nie można rozdzielać historii i filozofii matematyki. Filozofia ukazuje funkcjonujące w matematyce metody, natomiast historia matematyki pozwala zobaczyć sposób funkcjonowania tych metod. Oczywiście sposób funkcjonowania metod badawczych ujawnia się również w pracy twórczej konkretnego matematyka, jednak badania historyczne pozwalają na szersze i bardziej obiektywne spojrzenie.

2. *Związek teorii Lakatosa z empiryzmem*

Koncepcja Lakatosa, która wyłania się w ramach opozycji przeciw dogmatyzmowi, mieści się w nurcie empirycznych filozofii matematyki reprezentowanych przykładowo przez Johna St. Milla czy Kalmara (por. przypis 17). Nie oznacza to jednak, iż w koncepcji tej pojęcia matematyczne czy metody stosowane w matematyce mają swą genezę w świecie empirycznym. Matematyka jest autonomiczna i ma charakter obiektywny. Autonomia matematyki oznacza, że powstające pojęcia i metody matematyczne są generowane przez samą matematykę, natomiast obiektywność polega na tym, iż płodność pracy danego matematyka zależy

[4] Twórcami tych kierunków filozofii matematyki byli matematycy: Bertrand Russell, Gotlob Frege (logicyzm), Arend Heyting, Luitzen E. J. Brouwer (intuicjonizm), Paul Bernays, David Hilberd (formalizm).

[5] Analizy Lakatosa są w głównej mierze atakiem na pozytywistyczne interpretacje matematyki. Ten antypozytywizm Lakatosa znalazł pełniejszy wyraz w jego późniejszej teorii programów badawczych.

od podporządkowania się jego umysłu "ideom" matematycznym. Sądzę, iż można umieścić poglądy Lakatosa "ponad" empiryzmem genetycznym oraz metodologicznym. Istota problemu zostaje przeniesiona na zupełnie inną płaszczyznę i sprowadza się do poszukiwania sposobu funkcjonowania mechanizmów, które prowadzą do pojawiania się nowych pojęć. Nazwę poglądy Lakatosa "empiryzmem metod", gdyż to właśnie autonomiczne metody tworzą świat matematyki, w ramach którego możemy dopiero mówić o sposobie i charakterze funkcjonowania tych metod.

Empiryzm Lakatosa objawia się poprzez:

1. indukcję w matematyce;

2. mechanizm testowania teorii matematycznych – polega on na tym, iż "rzeczywistością", która służy do testowania powstałych już teorii matematycznych, jest obszar twórczości matematyków. Tym samym w znaczny sposób zostaje dowartościowany indywidualny proces twórczy.

Sądzę, iż w indukcji, o której wspomina Lakatos, można wyróżnić dwa aspekty:

1. powstające nowe teorie przebudowują znaczenie i sens teorii już istniejących. Ten mechanizm nazwałbym "indukcją znaczenia"; nowe teorie jako "fakty" zostają "uogólnione" w nowe znaczenie już istniejących teorii;

2. wchodzące do matematyki nowe teorie nieformalne podlegają w trakcie rozwoju procesowi formalizacji. Ten mechanizm określiłbym jako "indukcję formalizacji" – nowo powstające teorie zostają uogólnione do teorii coraz bardziej abstrakcyjnych, dzięki czemu możliwe jest poddawanie ich w coraz większym stopniu pod rygor metodologii euklidesowej.

Dokładniejszą analizę testowania teorii matematycznych przedstawię w rozdziale drugim. Istotny będzie kontekst historyczny, poprzez który ukażę mechanizm generowania nowych pojęć. Natomiast mechanizm działania indukcji w matematyce przedstawię w rozdziale trzecim. Problematyka poruszana w tych rozdziałach jest jednak szersza od dwóch powyższych aspektów.

3. *Indukcjonizm Lakatosa a dedukcjonizm Poppera*

Najpierw chciałbym jednak skoncentrować się na tym, co w gruncie rzeczy oznacza indukcjonizm Lakatosa w odniesieniu do matematyki. Nie analizując na razie, jak działa sama indukcja, chciałbym pokazać, iż rola indukcji w matematyce jest analogiczna do roli dedukcji w koncepcji Karla Poppera. W tzw. dedukcjonizmie Poppera istotną rolę odgrywają hipotezy, które poddawane są ciągłym procesom falsyfikacji i weryfikacji (właściwie korroboracji). Hipotezy (a właściwie wnioski) dedukcyjnie wyprowadzane z hipotez konfrontowane są ze zdaniami bazowymi (są to proste czasowo–przestrzenne wyrażenia), które w dużym stopniu przyjmowane są w sposób konwencjonalny. Hipoteza, która zostaje sfalsyfikowana, jest odrzucana i zastępuje się ją nową hipotezą poddawaną tym samym procesom. Według Poppera w tym ciągłym procesie falsyfikacji zbliżamy się jednak do prawdy[6]. Pomijając różne kontrowersje i polemiki wokół koncepcji Poppera, chcę zwrócić uwagę na analogię mechanizmu rozwoju nauk empirycznych wskazanego przez Poppera, do tego mechanizmu, który ukazuje Lakatos w rozwoju matematyki.

Możemy przyjąć, iż rolę zdań bazowych pełnią teorie nieformalne, które wchodzą w konflikt z istniejącymi już częściowo sformalizowanymi teoriami. Sam proces formalizacji pełni analogiczną rolę, jak proces falsyfikacji. Jeśli formalizująca się teoria staje się nieczuła na wpływ ze strony nowych teorii nieformalnych, zostaje odrzucona (przestaje odgrywać istotne znaczenie). Teoria tym bardziej zbliża się do prawdy, im pełniej, posuwając się w procesie formalizacji, jest zdolna przyjmować nowe znaczenia ukazywane przez nowe teorie nieformalne.

2. METODA DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW

1. *Powstanie metody dowodów i kontrprzykładów*

W XIX w. została odkryta metoda, która dała duże wyniki, a do jej odkrycia przyczynili się Cauchy, Abel i Seidel. Lakatos poddaje analizie tę metodę, patrząc na jej "rodzenie się" w kontekście historycznym[7]. Nie analizuje natomiast tego, w jaki sposób metoda ta stała się częścią matematyki, wytwarzając nowy prąd myślowy[8]. Jest to właśnie metoda dowodów i kontrprzykładów.

Analizę odkrycia tej metody zacznę od przedstawienia prawa ciągłości Leibniza, które brzmi: "W każdym domniemanym przejściu, kończącym się na jakimś kresie, dozwolone jest ustanowienie pewnego ogólnego rozumowania, którym objąć można także końcowy kres"[9].

Prawo to jest jedną z podstawowych zasad filozoficznych, na których opierał się Leibniz, tworząc rachunek "nieskończenie małych". Z prawa tego wynika, iż

---

[6] Istotne jest zafascynowanie się Poppera definicją prawdy Alfreda Tarskiego i włączenie tej koncepcji do teorii rozwoju nauki.

[7] *Proofs and Refutations* dodatek 1 s. 127-134.

[8] Powstanie tego nowego prądu myślowego wiązało się z próbą artymetyzacji analizy rozpoczętą na początku XIX w. Próba ta miała na celu uściślenie pewnych pojęć analizy matematycznej takich, jak ciągłość, funkcja, całka, nieskończoność itp. i doprowadziła do powstania nowych działów matematyki np. topologii i teorii mnogości. Próba ta była analogiczna do programu Kartezjusza arytmetyzacji geometrii, który znalazł realizację w stworzonej przez niego geometrii analitycznej.

[9] G. W. L e i b n i z. *Early Mathematical Manuscripts*. Chicago 1920 s. 147.

np. pojęcie granicy jest zależne od pojęcia ciągłości (tzn. pojęcie granicy powinno być takie, aby ciągłość w przejściu granicznym była zachowana), a "nieskończenie mała" (różniczka) musi być liczbą, jako graniczny przypadek pewnej skończonej wielkości liczbowej. Cauchy natomiast odwrócił ten warunek uzależniając pojęcie ciągłości od pojęcia granicy. Poza tym, próbując nadać ścisłą postać analizie matematycznej, Cauchy definiuje pojęcie ciągłości i granicy oraz próbuje podać dowód tzw. hipotezy Leibniza, która stanowiła matematyczną wersję prawa ciągłości (granica ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą)[10].

Przez cały czas hipoteza ta uznawana była za niewątpliwie słuszną i nie wymagającą dowodu. I dopiero kiedy Cauchy podał definicję ciągłości okazało się, że istnieje jednak potrzeba dowodu hipotezy ciągłości. W kontekście definicji ciągłości Cauchy'ego (jak również definicji granicy i ustalenia pojęcia funkcji) hipoteza ciągłości wychodziła z gąszcza przedzałożeń filozoficznych, uzyskując konkretną matematyczną postać. Cauchy podał jej "błędny" dowód. Okazało się również, iż pewne funkcje Fouriera[11], reprezentowane przez szeregi trygonometryczne, są nieciągłe w sensie ciągłości Cauchy'ego, a więc stanowią kontrprzykłady do pierwotnej hipotezy. Dokładna analiza dowodu Cauchy'ego (dokonana przez Seidla[12]) wykryła lemat, który odpowiedzialny był za to, iż pozornie słuszne rozumowanie, oparte na prawdziwych założeniach, prowadzi do fałszywych wyników. Tym "winnym" lematem był pomysł jednostajnej zbieżności. Ta zbieżność nie występowała w przykładach Fouriera. Wystarczyło więc dołożyć do założeń wymaganie jednostajnej zbieżności i rozumowanie zachowywało ważność. Hipoteza ciągłości została więc zachowana, tylko uzyskała nowe znaczenie.

Można powiedzieć, że w dowodzie Cauchy'ego nie było błędu, lecz brak istotnego pojęcia. "Błąd" w dowodzie oznaczał więc, że to puste miejsce musi być czymś zapełnione, domagało się ono pojęcia jednostajnej zbieżności. "Błędne" dowody są więc generatorami pojęć w matematyce. Oczywiście, uznanie błędu zależy od przyznania danym przykładom statusu kontrprzykładów, a to z kolei zależy od właściwej precyzacji pojęć występujących w tzw. kontrprzykładach. A więc reasumując: dążność do sprecyzowania pewnych pojęć matematycznych rodzi dowody i kontrprzykłady, z których wyłaniają się nowe pojęcia. W powyższym przykładzie takim pojęciem stało się pojęcie jednostajnej zbieżności. Istotne w tym przykładzie jest to, iż według Lakatosa Seidel po raz pierwszy w

---

[10] Hipoteza ta w ramach wspomnianych ustaleń staje się początkiem nowego programu badawczego w sensie Lakatosa (gdy zastosujemy koncepcję programów badawczych do matematyki) i tworzy jądro tego programu.

[11] J. F o u r i e r. *Memeire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corpe Solides*. Paris 1808 s. 112--116.

[12] Odkrycia tego dokonał Seidel w 1847 r. Jednak pojęciem zbieżności jednostajnej posługuje się Weierstrass już w 1841 r. dla szeregów potęgowych.

sposób wyraźny zastosował w rozumowaniu metodę dowodów i kontrprzykładów w odróżnieniu od często wówczas stosowanej metody *exception-barring*[13]. Tak np. Abel po analizie dowodu Cauchy'ego (według niego poprawnego) oraz kontrprzykładów Fouriera, chcąc zachować czystość matematyki, proponował ograniczenie się tylko do przypadku szeregów potęgowych, których kontrprzykłady nie dotykały. Tym samym stosował metodę *exception-barring*. Metoda ta nie jest twórcza, chociaż pozwala zachować poprawność rozumowań i wniosków. Nie prowadzi jednak do nowych wyników, ograniczając czasami w sposób zbyt drastyczny pole badań. Natomiast w metodzie dowodów i kontrprzykładów nie ogranicza się pola zasięgu zaprzeczonego przez kontrprzykłady twierdzenia, lecz wzbogaca się warunkowe rozumowanie tego twierdzenia o nowe pojęcia. Stanowią one jakby nowe "cegły" zapełniające "luki" w budowli dowodu.

2. *Znaczenie metody dowodów i kontrprzykładów dla matematyki*

Metoda dowodów i kontrprzykładów jest szczególnie widoczna w momentach przełomowych, kryzysowych, bowiem wówczas metoda *exception-barring* ukazuje swą bezsilność. Jeśli uciec by się do pewnych biologicznych porównań, to wówczas metoda *exception-barring* jest odpowiednikiem mechanizmu funkcjonującego w procesie selekcji naturalnej, który dba o "czystość i siłę" gatunku. Jednak w przypadku, gdy zmiany w środowisku są zbyt duże, mechanizm wybierania jednostek silnych poprzez odrzucanie słabszych jest niewystarczający i może doprowadzić do zagłady całego gatunku. Podobnie jest w momentach kryzysowych w matematyce. Matematyka, natrafiając na nowe obszary badań, potrzebuje nowych metod i pojęć. Gdy ich nie ma, jej rozwój zaczyna się blokować i wręcz zatrzymuje się. Zadziałanie w tym momencie metody dowodów i kontrprzykładów jest gwarantem powstania nowych metod konkretnych badań. Metoda ta pełni analogiczną rolę jak mechanizm funkcjonujący przy wykorzystywaniu mutacji, który umożliwia przetrwanie gatunku, a często wytwarza całkiem nowe, które potrafią funkcjonować w zmienionym środowisku. Kiedy po "rewolucji" Cauchy'ego metoda dowodów i kontrprzykładów weszła stopniowo do matematyki, zaczęła wytwarzać nowe metody. Na bazie tych metod powstały nowe działy matematyki. Sądzę, iż w ramach tych metod powstała teoria miary, jak również topologia oraz teoria mnogości.

Istota tych metod sprowadza się do następującego określenia: definiujemy pewną matematyczną strukturę czy operację, następnie analizujemy, jaka powinna być natura obiektów, które umieszczamy w danej strukturze. Istotne staje się

[13] Metoda *exception-barring* (wyłączenie wyjątku) jest w dużej mierze stosowana w takich działach matematyki jak arytmetyka czy algebra.

"globalne" ujęcie danego obiektu matematycznego. Badając w ramach tej metody np. problem całkowalności funkcji, nie dokonujemy klasyfikacji funkcji poprzez wyszczególnienie pewnych klas funkcji całkowalnych (np. funkcji potęgowych, wymiernych), lecz analizujemy samą funkcję i jej własności (szukamy tych własności funkcji, które decydują o tym, że funkcja jest całkowalna). W ten sposób odnalezione własności wytwarzają najczęściej zupełnie nowe pojęcia. Tego rodzaju pojęć powstało w matematyce w tym okresie bardzo wiele (niewspółmiernie wiele wobec wcześniejszego okresu rozwoju matematyki).

Istnieje możliwość, iż metoda dowodów i kontrprzykładów może być rozumiana niewłaściwie. W swojej dość mocno uproszczonej formie jest ona uznawana przez matematyków za oczywistą. Nikt nie przeczy, że próby dowodu danej hipotezy składają się z różnych rozumowań, których poprawność kontrolowana jest przez kontrprzykłady. I nie to jest istotne w metodzie dowodów i kontrprzykładów. Kontrprzykłady nie obalają twierdzeń, lecz zmieniają znaczenia pojęć używanych w dowodzie. Natomiast to, czy dane przykłady zostaną uznane za kontrprzykłady, zależy od wcześniejszych ustaleń terminologicznych (a więc od tego, jakie znaczenie przypiszemy "niedopracowanym" pojęciom; każde pojęcie może stać się pojęciem niedopracowanym w kontekście nowo powstałej struktury matematycznej).

Istnieje więc ścisły związek pomiędzy kontrprzykładami a dowodem (i definicjami pojęć występujących w dowodzie), którego dotyczą. Ponieważ każdy "błędny" dowód może stać się "przodkiem" nowego pojęcia, więc istota tego nowo powstałego pojęcia w jakimś sensie zawiera się w kontrprzykładzie.

W metodzie dowodów i kontrprzykładów kontrprzykłady mają specyficzne znaczenie:

Po pierwsze, nie mają jednoznacznego statusu. Każdy kontrprzykład jest kontrprzykładem dopiero w kontekście jakiejś teorii czy struktury matematycznej. Więc kontrprzykład może wyznaczać nową teorię, nie obalając starych struktur, których dotyczył.

Po drugie, pewne "dziwaczne" konstrukcje uzyskują w matematyce dużą rangę. Poza metodą dowodów i kontrprzykładów konstrukcje te bywają traktowane wyłącznie jako ciekawostki, nie mające istotnego znaczenia dla matematyki (ewentualnie jako tylko "nieco" ograniczające zasięg twierdzeń). Natomiast w ramach metody dowodów i kontrprzykładów nawet jeden, najbardziej "dziwaczny" przykład jest najzupełniej wystarczający (nie do tego, aby obalić twierdzenie, lecz do tego, aby ukazać jego nowe znaczenie i tym samym wytworzyć niekiedy nową teorię). Przypuszczam, iż stąd wzięła się w końcu XIX w. oraz w wieku XX moda na kontrprzykłady "podważające" wiele wcześniej osiągniętych rezultatów. Nie wszystkie oczywiście pełniły rolę teoriotwórczą, lecz potencjalnie miały tę możliwość, a często ukazywały głębszy sens wcześniej bezkrytycznie przyjmowanych faktów[14].

3. *Podejście heurystyczne w matematyce*

W stylu dedukcyjnym, któremu Lakatos przeciwstawia styl heurystyczny, dokładna lista aksjomatów i zdefiniowanych pojęć w gruncie rzeczy zamyka całą teorię na nowe pomysły i autentyczną twórczość. Styl dedukcyjny realizuje ideał euklidesowy uprawiania matematyki[15]. Przez ponad dwa tysiące lat ten ideał był przypisywany matematyce. Nie zastanawiano się zbytnio nad tajemniczością tego, iż "komplikowanie" aksjomatów i pierwotnych pojęć (zapisywanie ich w bardziej zawiłej i mniej jasnej postaci) ma prowadzić do sukcesów matematyki, jako narzędzia ujmowania rzeczywistości.

Jednak widoczne jest, iż w twórczych i kryzysowych okresach rozwoju matematyki metoda "komplikowania" aksjomatów nie działa w kierunku postępu, lecz zaczyna blokować prawdziwie twórcze działania. To sugeruje, iż pod pozornie przewodnią metodą euklidesową tkwią inne metody, które rządzą rozwojem matematyki. Są to metody, które kierują zarazem procesem twórczym matematyka. W metodach tych umysł rozpoczyna pracę, mając uprzednio pełno idei, które kierują myśleniem, nadają sens przyjmowanym aksjomatom i pojęciom. Istotą tych metod jest styl heurystyczny, w którym wysuwa się śmiałe hipotezy, podaje kontrprzykłady, próbne dowody itd. Kontrprzykłady nie obalają hipotez, lecz walczą o swoje uznanie. W momencie, gdy zostaną uznane, zmieniają sens przyjmowanych hipotez, wręcz wytwarzają nowe teorie nieformalne. Celem działalności twórczej w stylu heurystycznym nie jest otrzymanie twierdzenia (w stylu heurystycznym nie ma twierdzeń, są tylko hipotezy), które wzbogaciłoby matematykę o następny nieomylny i niezbity fakt. Celem tej działalności jest ciągła ewolucja hipotez, które w trakcie rozwoju mogą wytwarzać nowe pojęcia i metody. W odróżnieniu od stylu dedukcyjnego, który nurty myślowe doprowadza do stagnacji po pewnym etapie rozwoju, styl heurystyczny "wychwytuje" szczególnie płodne kierunki badań i narzuca je sposobom myślenia. Powstała teoria matematyczna w swojej logicznej strukturze jest taka, jak "logiczna" struktura twórczo pracującego umysłu. Tę strukturę tworzą metody heurystyczne.

Wynika stąd, iż nie do utrzymania jest podział na kontekst odkrycia i kontekst uzasadnienia zupełnie wyczerpujący przestrzeń funkcjonowania działalności naukowej. "Heurystyka" nie jest umieszczona ani w jednym, ani w drugim konte-

[14] Jako przykład może służyć konstrukcja zbioru Cantora lub funkcji Weierstrassa ciągłej i nieróżniczkowanej w żadnym puncie.

[15] Por. *Proofs and Refutations* dodatek 2.

kście. Jest logicznym wzorem postępu nauki. Nie znaczy to jednak, że jednoznacznie i nieomylnie prowadzi ona do rezultatów (jednak będąc logiką postępu naukowego, często zmienia granicę między kontekstem odkrycia i kontekstem uzasadnienia np. poprzez włączanie sposobów myślenia do logiki).

Bardzo dobrze widać przewagę stylu heurystycznego nad dedukcyjnym przy analizie dowodu hipotezy ciągłości. Również przy tej analizie staje się widoczny mechanizm funkcjonowania tego stylu.

Ukazując mechanizm działania stylu heurystycznego, Lakatos używa języka heglowskiego. Hipoteza ciągłości Leibniza jest tezą, w której tkwią różne możliwości rozwoju, a zależą one od ustaleń terminologicznych. W momencie, gdy Cauchy ustala definicję ciągłości i postanawia jej nie zmieniać, mimo widocznych sprzeczności, jego definicja legalizuje kontrprzykłady Fouriera. Tak naprawdę dopiero w tym momencie przykłady Fouriera (w których pewne funkcje nieciągłe były przedstawiane za pomocą szeregu funkcji ciągłych) mogły stać się kontrprzykładami do hipotezy ciągłości. Gdy pojęcie ciągłości nie było jeszcze ustalone, można było próbować uzgodnić przykłady Fouriera z hipotezą np. w inny sposób interpretując ciągłość lub pojęcie funkcji[16]. Definicja ciągłości podniosła tezę (hipotezę ciągłości) na wyższy poziom, tworząc wraz z kontrprzykładami Fouriera "negatywne pole" antytezy. "Pozytywnym polem" antytezy był dowód Cauchy'ego. Dowód ten stał się "przodkiem" pojęcia jednostajnej zbieżności, które można określić mianem syntezy. Widoczne jest, iż samo pojęcie matematyczne określa kierunek rozwoju matematyki, a jego pojawienie się jest zdeterminowane mechanizmem, który powoduje rozwój matematyki.

Właśnie ten przykład ukazuje, iż pomiędzy kontekstami odkrycia i uzasadnienia istnieje trzecia odmienna sfera. Jest nią racjonalna sfera heurystyk, które kierują procesem twórczym matematyka, ujawniają się w historii matematyki oraz, tworząc nowe pojęcia, uniesprzeczniają samą matematykę.

3. KONCEPCJA PRAWDY W MATEMATYCE

1. *Znaczenie formalizacji dla matematyki*

W swoich rozumowaniach dotyczących filozofii matematyki Lakatos porusza głównie problemy metodologiczne. Ponieważ według niego metody funkcjonujące w matematyce są zależne od praw rządzących rozwojem matematyki, więc jego metodologia porusza zarazem problemy z epistemologii matematyki. Są to problemy związane z rozwojem teorii matematycznych oraz ze stosunkiem tych

[16] Por. cytowaną pracę J. Fouriera.

teorii do umysłu (czy do obiektywnych idei matematycznych). Tym samym pojawia się problem prawdy w matematyce. Prawda ta występuje w ramach związku pomiędzy teoriami formalnymi oraz nowo wprowadzonymi do matematyki teoriami nieformalnymi. Szkicowo zarysowany jest ten problem przez Lakatosa w referacie *Empiryzm we współczesnej filozofii matematyki*, wygłoszonym na konferencji dotyczącej filozofii nauk, która odbyła się w 1965 r. w Londynie (por. przypis 17).

Moim zdaniem najistotniejszym punktem referatu Lakatosa jest zarysowanie koncepcji prawdy zasadniczo odbiegającej od "klasycznych" ujęć tego problemu. Lakatos polemizuje ze stylem "euklidesowym", który uznawał, iż teorie euklidesowe wsparte na absolutnie pewnych (a przynajmniej prawdopodobnych) aksjomatach stanowią istotę matematyki. W teoriach euklidesowych prawda tkwi w aksjomatach i poprzez "kanały" reguł i zasad logicznych wniosków spływa w dół do twierdzeń matematyki (co najwyżej można w ramach stylu euklidesowego uznać, że matematyka jest grą logiczną wspartą na konwencjonalnie przyjętych aksjomatach i regułach wnioskowania, co jednak nie zmienia istoty rzeczy).

Aksjomaty w ramach stylu euklidesowego wyznaczają więc prawdziwość twierdzeń, tkwiąc na "szczycie" teorii matematycznych, i nie jest możliwe, aby sama matematyka mogła je zakwestionować. Zakwestionowanie lub uznanie aksjomatów za prawdziwe musi przyjść z zewnątrz ("spójność" i "płodność" danej dziedziny matematyki, wspartej na danym układzie aksjomatów, co najwyżej potwierdza sensowność przyjęcia tych aksjomatów).

Natomiast w koncepcji Lakatosa podstawową rolę pełnią tzw. wyrażenia bazowe (jest to zbiór twierdzeń teorii nieformalnych pełniących analogiczną rolę względem teorii sformalizowanych, jak "wyrażenia bazowe" będące prostymi czasowo-przestrzennymi wyrażeniami względem teorii empirycznych). Są one przyjmowane i uznawane na zasadzie czasowo ustalonych i zmieniających się kryteriów prawdy. Nie można więc powiedzieć, że twierdzenie matematyki nieformalnej jest prawdziwe – to tylko hipoteza, w której większą rolę odgrywa jej "fałszywość" (w kontekście całej teorii). Chodzi o to, że uznanie danej hipotezy za prawdziwą jest niekiedy decydujące, lecz nie jest w żadnej mierze istotne dla matematyki. Istotna dla matematyki jest "wygenerowana" przez strukturę samej matematyki "fałszywość" uznanej uprzednio hipotezy. "Fałszywość" ta wspina się krok po kroku do coraz wyżej (w sensie formalizacji) znajdujących się "twierdzeń" i nieraz całkowicie przebudowuje ich znaczenie lub wręcz je odrzuca. Ta transmisja "fałszu" jest wewnętrznym składnikiem matematyki; w istocie swej nie zależy ona od czynników zewnętrznych.

W toku rozwoju teorie nieformalne zmieniają się poprzez ciągłe udoskonalanie hipotez. Hipotezy są udoskonalane pod wpływem oddziaływań z "wyrażeniami bazowymi" (często bywa tak, że "siła" wyrażeń bazowych tkwi w tym, iż zawiera się w nich pewne "rozwiązanie" odwiecznych problemów filozoficznych; tak było np. z teorią Cauchy'ego, która "rozwiązywała" paradoksy ciągłości i granicy). W ciągu rozwoju teorie nieformalne coraz bardziej "uodparniają się" na wpływ wyrażeń bazowych. Ich granicznym przypadkiem są teorie euklidesowe, które są zupełnie nieczułe na oddziaływanie wyrażeń bazowych (w rzeczywistości istnieją co najwyżej teorie prawie-euklidesowe).

Gdzie tkwi więc prawda w matematyce i jaka jest jej istota? Może się zdarzyć, że świeży umysł nie usztywniony schematami myślenia stworzy nową, błyskotliwą teorię nieformalną. Proces myślenia prowadzący do otrzymania tej teorii (jak również sama teoria) zostanie wówczas uznany za błędny. Jednak jeśli pewne umysły zafascynują się tą teorią, włączy się ona w nurt matematyki i okaże się wówczas, że cała masa wcześniej uznawanych twierdzeń staje się "błędna". Nowa teoria niesie bowiem z sobą nowe sposoby myślenia, które formalizując się np. w mechanizmach dowodowych czy rozwojowych matematyki powodują, iż wcześniejsze procesy myślenia stają się "błędne", a wcześniejsze kierunki rozwoju mało interesujące.

Im więcej dana teoria nieformalna wytworzy "fałszu" we wcześniej uznawanych twierdzeniach, ukazując ich hipotetyczny charakter, im więcej zaneguje wymuszając powstanie nowych technik dowodowych, nowych hipotez, pojęć czy nowych metod, tym więcej niesie w sobie prawdy. Co więcej, wówczas potwierdza "prawdziwość" negowanych przez siebie teorii. Prawda tych teorii jest miarą ich wrażliwości na wpływ ze strony nowych nieformalnych teorii oraz miarą stopnia, w jakim zmieniają się pod wpływem oddziaływań z tymi teoriami (wyrażeniami bazowymi).

W miarę rozwoju, jak zauważyłem, teoria zmierza w kierunku poddania się pod rygor metodologii euklidesowej. Traci więc jakby prawdę, staje się coraz bardziej pusta, "bez znaczenia". W trakcie rozwoju prawda "przemieszcza się" w kierunku nowych teorii nieformalnych na tyle, na ile teorie te mają moc "zalać fałszem" wcześniejsze teorie, kostniejące w formalizmie. Jednak to "kostnienie" jest warunkiem niezbędnym możliwości ujawniania się prawdy (tylko hipotezy, które uznane są za niezbite twierdzenie, są czułe na "fałsz").

Reasumując: prawda ujawnia się poprzez oddziaływanie wyrażeń bazowych (teorii nieformalnych) na matematykę. Jednak warunkiem ujawniania się prawdy jest proces formalizacji, ciągle dokonujący się w matematyce. Sama prawda tkwi więc w metodach, w ramach których funkcjonuje mechanizm zmieniający "sposoby myślenia" i "drogi historii" teorii matematycznych na techniki, którymi dowodzone są twierdzenia i opracowywane czy ulepszane nowe teorie.

2. *Transmisja fałszu a generowanie nowych pojęć*

Przyjrzyjmy się obecnie, jak dokonuje się ta transmisja fałszu wewnątrz matematyki. Punktem wyjścia jest pewna hipoteza (dla zwrócenia uwagi możemy mieć na uwadze hipotezę Leibniza). Hipoteza ta posiada pewien dowód, który okazuje się błędny w kontekście pojawiającego się kontrprzykładu. Mamy więc następujący schemat:

$$(P_1 \text{ i } P_2 \text{ i } \ldots \text{ i } P_n) \rightarrow C,$$

gdzie P_1, P_2, ..., P_n są to lematy, na które został rozbity dowód hipotezy C. Kontrprzykład jest kontrprzykładem w stosunku do hipotezy C, natomiast nie jest nim dla lematów P_1, P_2, ... P_n[17].

Ten fakt wskazuje na wewnętrzną sprzeczność całego rozumowania. Aby przywrócić poprawność logiczną tego rozumowania formułuje się kolejny lemat P_{n+1}, który jest zaprzeczony przez kontrprzykład. W przypadku hipotezy Leibniza jest to lemat stwierdzający, iż ciąg $f_n(x)$ musi być zbieżny w pewien "specjalny" sposób; ten sposób zbieżności został nazwany zbieżnością jednostajną. Tym samym pojawia się kolejne rozumowanie:

$$P = (P_1 \text{ i } P_2 \text{ i } \ldots \text{ i } P_{n+1}) \rightarrow C.$$

W rozumowaniu tym zaprzeczona przez kontrprzykład jest zarówno przesłanka rozumowania P, jak i wniosek C. Tym samym rozumowanie zachowuje poprawność. W klasycznym podejściu dokonano by prób zmiany hipotezy (np. poprzez ograniczenie jej zasięgu, jak czynił to Abel), tak aby nie była zaprzeczona przez kontrprzykłady. W tym schemacie natomiast hipoteza nie jest pierwotnie zmieniana, lecz pozwala się, aby nowy lemat umieszczony w przesłankach rozumowania doprowadził do kolizji przesłanek z kontrprzykładami. Tym samym ulega zmianie sens całego rozumowania. W konsekwencji również zmienia się znaczenie i zasięg hipotezy, dzieje się to jednak w inny sposób (zakres ograniczeń zastosowania danej hipotezy może być znacznie mniejszy). Jak już wspomniałem rozumując w sposób klasyczny, proponował Abel ograniczenie hipotezy Leibniza tylko do szeregów potęgowych, których kontrprzykłady nie dotyczyły.

W tym nowym schemacie rozumowania (w którym ujawnia się metoda dowodów i kontrprzykładów) nie tylko szeregi potęgowe realizują ten schemat, lecz wszystkie funkcje, które są zbieżne jednostajnie. Pojawia się tym samym nowe pojęcie – jest nim "zbieżność jednostajna". Mówiąc językiem nieco metaforycznym, "fałsz" hipotezy C zostaje transmitowany do przesłanek rozumowania i powoduje wygenerowanie nowego pojęcia. Pojawienie się nowego pojęcia (przynajmniej w tym przypadku) nie byłoby możliwe przy klasycznym podejściu. Teo-

[17] Referat Lakatosa był głosem w dyskusji po referacie L. Kalmara (*Foundations of Mathematics – Whither now?* s. 187-194). Por. przypis 1, pozycja 3.

ria matematyczna potwierdza więc swą prawdziwość, gdy wchodząc w konflikt z nowymi teoriami nieformalnymi jest zdolna do wygenerowania nowych pojęć.

IMRE LAKATOS' PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

S u m m a r y

Lakatos' views on the developmet of mathematics are briefly presented. An important point of his conception is his attack on the formalistic philosophy of mathematics. In this way, informal features of mathematics are stressed out. Lakatos' views are a base of the author analysis on the structure of mathematics. The substantial element of these consideratioris is a showing of the new version of empiricism in mathematics. From this version it appears the new conception of truth as diverging from known "classical" schems.