ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLVIII, zeszyt 1 – 2000

BOŻENA CZERNECKA
Lublin

JANA ŁUKASIEWICZA UJĘCIE INTUICJONISTYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ

Jan Łukasiewicz poświęcił logice intuicjonistycznej dwie prace: *Die Logik und das Grundlagenproblem* z 1938 r.[1] oraz *O intuicjonistycznym rachunku zdań* z 1952 r.[2] Przedstawimy pokrótce wyniki pierwszej z nich, aby zatrzymać się szerzej nad drugą, zawierającą oryginalne pomysły polskiego logika w tej sprawie.

Tak więc we wcześniejszej pracy Łukasiewicza znajdujemy następującą aksjomatykę intuicjonistycznego rachunku zdań:

$A^{Ł}1$	CpCqp
$A^{Ł}2$	CCpCpqCpq
$A^{Ł}3$	CCpqCCqrCpr
$A^{Ł}4$	CKpqp
$A^{Ł}5$	CKpqq
$A^{Ł}6$	CCpqCCprCpKqr
$A^{Ł}7$	CpApq
$A^{Ł}8$	CqApq
$A^{Ł}9$	CCprCCqrCApqr
$A^{Ł}10$	CCpNqCqNp
$A^{Ł}11$	CNpCpq

[1] Po raz pierwszy praca ta została opublikowana w: *Les entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques 86*, Zürich 1941, s. 82-100. Korzystamy tu z jej angielskiego przekładu: *Logic and the Problem of the Foundations of Mathematics*, [w:] J. Łukasiewicz, *Selected Works*, pod red. L. Borkowskiego, Warszawa 1970, s. 278-294.

[2] Praca ta została zamieszczona w: J. Łukasiewicz, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, pod red. J. Słupeckiego. Warszawa 1961, s. 261-274.

Regułami dowodzenia są, podobnie jak w ujęciu Heytinga, reguła podstawiania i reguła odrywania[3]. Można udowodnić, że aksjomatyka powyższa jest równoważna z aksjomatyką Heytinga.

Tak określona intuicjonistyczna logika zdań jest częścią właściwą klasycznego rachunku zdań i dlatego jest istotnie słabsza od niego: istnieją tezy rachunku klasycznego, które nie są tezami rachunku intuicjonistycznego, lecz nie odwrotnie. Dodając do aksjomatów $A^{\text{Ł}}1$ - $A^{\text{Ł}}11$ aksjomat:

$A^{\text{Ł}}12$ CCCpNpqCCpqq

otrzymuje się w rezultacie klasyczny rachunek zdań.

Łukasiewicz rozważa dalej (w omawianym artykule) kwestię matrycowej charakterystyki zdaniowej logiki intuicjonistycznej. Stwierdza, iż żaden system istotnie słabszy od klasycznego rachunku zdań nie może mieć adekwatnej, normalnej matrycy dwuwartościowej, lecz matryca taka musi być wielowartościowa[4]. Istotnie matryca podana przez Heytinga dla logiki intuicjonistycznej była trójwartościowa, chociaż i ona okazała się później nieadekwatna.

W artykule z 1952 r. Łukasiewicz zajmuje całkowicie odmienne stanowisko od zarysowanego powyżej. Intuicjonistyczny rachunek zdań, według niego, zawiera jako swoją część właściwą klasyczny rachunek zdań. Ta programowa teza polskiego logika jest osobliwa: odbiega radykalnie nie tylko od jego wcześniejszego poglądu, lecz także od powszechnej opinii, wedle której skoro w logice intuicjonistycznej odpadają niektóre klasyczne prawa, to musi być ona pewnym zawężeniem logiki klasycznej, a nie jej rozszerzeniem. Prześledzimy zatem argumentację Łukasiewicza za tak osobliwą tezą.

Polski autor w artykule *O intuicjonistycznym* [...] wprowadza odmienne symbole na oznaczenie funktorów implikacji, koniunkcji i alternatywy w rachunku klasycznym i w rachunku intuicjonistycznym. Posługuje się swoją beznawiasową notacją; na oznaczenie funktorów implikacji klasycznej i intuicjonistycznej wprowadza odpowiednio symbole C i F, na oznaczenie koniunkcji klasycznej i intuicjonistycznej – symbole K i T, alternatywy klasycznej i intuicjonistycznej – A i O, negacji zarówno klasycznej, jak i intuicjonistycznej – N[5].

Łukasiewicz przyjmuje następujące wzory jako aksjomaty intuicjonistycznego rachunku zdań:

$A_{\text{Ł}}1$ FqFpq

[3] Ł u k a s i e w i c z, *Logic and the Problem* [...], s. 281 n.

[4] Tamże, s. 285 n.

[5] Ł u k a s i e w i c z, *O intuicjonistycznym* [...], s. 261.

$A_Ł2$ FFpFqrFFpqFpr
$A_Ł3$ FTpqp
$A_Ł4$ FTpqq
$A_Ł5$ FpFqTpq
$A_Ł6$ FpOpq
$A_Ł7$ FqOpq
$A_Ł8$ FFprFFqrFOpqr
$A_Ł9$ FFpNqFqNp
$A_Ł10$ FpFNpq

Powyższe aksjomaty, dedukcyjnie równoważne z układem aksjomatów podanym przez Heytinga, można pogrupować na takie, w których:

(1) jedynym funktorem jest funktor implikacji: $A_Ł1$ i $A_Ł2$,

(2) występują jedynie funktory implikacji i koniunkcji: $A_Ł3$, $A_Ł4$ i $A_Ł5$,

(3) występują jedynie funktory implikacji i alternatywy: $A_Ł6$, $A_Ł7$ i $A_Ł8$,

(4) występują jedynie funktory implikacji i negacji: $A_Ł9$ i $A_Ł10$.

Wszystkie tezy logiki intuicjonistycznej można wyprowadzić z tych dziesięciu za pomocą dwóch reguł wnioskowania:

(a) Reguła podstawiania: jeśli Φ jest uznane i Ψ jest podstawieniem Φ, to Ψ musi być uznane.

(b) Reguła odrywania: jeśli FΦΨ jest uznane i Φ jest uznane, to Ψ musi być uznane[6].

Wszystkie tezy rachunku intuicjonistycznego, w których jedynym funktorem jest funktor implikacji, dadzą się wyprowadzić tylko z dwóch aksjomatów implikacyjnych (zaliczonych wyżej do grupy (1)), czyli tego fragmentu rachunku Heytinga, który Hilbert i Bernays nazywają „logiką pozytywną". Z kolei wszystkie tezy zawierające jedynie funktory implikacji i negacji można wyprowadzić z dwóch aksjomatów implikacyjnych oraz aksjomatów implikacyjno-negacyjnych (grupy (1) i (4)) itd.[7]

Tak więc wyrażeniami sensownymi intuicjonistycznego rachunku zdań są zmienne zdaniowe oraz wyrażenia z nich utworzone za pomocą funktorów: N, F, T i O, a także wyrażenia wprowadzone przez skróty definicyjne. Wyrażenia uznane tego rachunku to jego tezy.

Zaksjomatyzowany zbiór tez, w których nie występują żadne inne funktory pierwotne z wyjątkiem T i N, nazywa Łukasiewicz „systemem koniunkcyjno-

[6] Tamże, s. 262.

[7] Mówi o tym tzw. twierdzenie o separowalności dla intuicjonistycznego rachunku zdań.

-negacyjnym". Regułami wnioskowania tego systemu są reguła podstawiania (a), ograniczona do wyrażeń sensownych rachunku, oraz reguła odrywania, stwierdzająca, że

c) jeśli NTΦNΨ jest uznane i Φ jest uznane, to Ψ musi być uznane.

Z aksjomatów $A_Ł$1-5 i 9 rachunku intuicjonistycznego można wyprowadzić trzy następujące tezy, które Łukasiewicz oznacza następująco:

58. NTNTNpNpNp

59. NTpNNTNpNq

60. NTNTpNqNNTNTqNrNNTpNr

Powyższe tezy przyjęte jako aksjomaty wraz z regułami (a) i (c) tworzą częściowy system koniunkcyjno-negacyjny. Łukasiewicz dowodzi, że nie wystarczają one jednak do zbudowania całego systemu koniunkcyjno-negacyjnego logiki intuicjonistycznej. Tworzy w tym celu matrycę M_1

T	1	2	3	N
1*	1	1	3	3
2	2	2	3	1
3	3	3	3	1

która sprawdza wzory 58-60, lecz nie sprawdza następującej tezy tego systemu:

61. NTNpp.

gdyż dla p = 2 otrzymujemy: NTN22 = NT12 = N1 = 3. Zdaniem Łukasiewicza ten częściowy system koniunkcyjno-negacyjny zawiera jako swoją część właściwą klasyczny rachunek zdań.

Funktor klasycznej implikacji wprowadza Łukasiewicz do systemu intuicjonistycznego za pomocą definicyjnego skrótu sformułowanego jako implikacja

63. FδNTpNqδCpq, gdzie δ jest zmienną przebiegającą funktory.

Wprowadzona przez polskiego logika reguła podstawiania za zmienne funktorowe pozwala na zapisywanie definicji w postaci implikacji[8], oprócz

[8] W prototetyce Leśniewskiego obowiązuje prawo ekstensjonalności 11. CEpqCδpδq. Oznaczamy przez P i Q dwa wyrażenia zdaniowe, z których jedno jest definiendum, a drugie definiensem. Zakładamy, iż żadna z nich nie zawiera δ. Ponieważ poprawnie zbudowane definicje można uważać za zdania prawdziwe, przyjmujemy zdanie 12. EPQ. Dokonując podstawienia w 11. p/P, q/Q, otrzymujemy CEPQCδPδQ. Z tego i 12 za pomocą reguły odrywania mamy: 13. CδPδQ. To ostatnie wyrażenie jest równoważne z EPQ, z 13 bowiem otrzymujemy z powrotem 12 na podstawie prawa tożsamości 14. Epp. Stosując podstawienie w tej ostatniej tezie p/P, mamy 15. EPP. Ponownie podstawiając, tym razem w 13. δ/EP' (w miejsce ' należy

tego służy do dowodzenia twierdzeń. A zatem powyższa definicja pozwala wyeliminować wyrażenie NTpNq, zastępując je przez Cpq i odwrotnie.

Funktor C wprowadzony przez definicję 63 ma wszystkie własności klasycznej implikacji. Łukasiewicz dowodzi tej tezy następująco. Definicja 63 pozwala na otrzymanie z tez 58-60 wzorów:

65. CCNppp prawo Claviusa
67. CpCNpq prawo Dunsa Szkota
72. CCpqCCqrCpr prawo sylogizmu warunkowego

Prawa te wraz z regułami podstawiania i odrywania o postaci:

(d) jeśli CΦΨ jest uznane i Φ jest uznane, to Ψ musi być uznane

wystarczają do zbudowania całego klasycznego rachunku zdań[9].

Reguła (d) nie jest ważna w wypadku, gdy przyjmiemy, że Φ i Ψ są dowolnymi sensownymi wyrażeniami logiki intuicjonistycznej. Polski logik wykazuje to za pomocą prostego przykładu. Następujące wzory:

87. CNNOpNpOpNp
86. NNOpNp,

które mają postać CΦΨ i Φ, można udowodnić w systemie intuicjonistycznym, natomiast Ψ, tj. OpNp, nie da się w nim dowieść. Trójwartościowa matryca M_2 Heytinga

F	1	2	3	N
1	1	2	3	3
2	1	1	3	3
3	1	1	1	1

T	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

O	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

wstawić argument δ), otrzymujemy CEPPEPQ. Z kolei z ostatniej implikacji i 15 za pomocą reguły odrywania uzyskujemy 12. EPQ. A zatem zamiast pisać definicje jako równoważności możemy użyć do tego celu implikacji 13, mającej zmienną funktorową przed definiensem i przed definiendum. Ponieważ implikacja jest, zdaniem Łukasiewicza, najdogodniejszym terminem pierwotnym dowolnego rachunku zdań, wprowadzenie definicji w postaci wzoru 13 nie zwiększa liczby terminów pierwotnych. Ponadto użycie zmiennych funktorowych pozwala na bezpośrednie przekształcanie definiensa na definiendum i odwrotnie. Wyżej przedstawiona metoda notowania definicji jest ważna dla każdego funktora implikacyjnego. Por. J. Ł u k a s i e w i c z, *O zmiennych funktorach od argumentów zdaniowych*, w: t e n ż e, *Z zagadnień* [...], s. 253 n.

[9] Te trzy ostatnie formuły to dobrze znane aksjomaty implikacyjno-negacyjnego klasycznego rachunku zdań Łukasiewicza.

która sprawdza regułę odrywania (b) oraz wszystkie aksjomaty $\text{A}_{\text{Ł}}$1-10, nie sprawdza OpNp, gdyż dla p = 2 otrzymujemy: O2N2 = O23 = 2.

Reguła (d) jednak obowiązuje w częściowym systemie implikacyjno-negacyjnym. Aby to wykazać, wystarczy udowodnić, że reguła ta jest ważna, gdy Φ i Ψ są wyrażeniami sensownymi, w których nie występują żadne inne funktory pierwotne oprócz C i N. Każde wyrażenie sensowne rachunku implikacyjno-negacyjnego jest bądź

(I) zmienną zdaniową, bądź

(II) negacją (czyli wyrażeniem, w którym głównym funktorem jest funktor negacji), bądź

(III) implikacją.

W dowodzie korzysta się z trzech tez:

73. FCpqFpNNq
75. FCpNqFpNq
77. FCpCqrFpCqr,

które dadzą się wyprowadzić z aksjomatów $\text{A}_{\text{Ł}}$1-5 i 9 za pomocą definicji 63[10].

Ad (II). Jeśli uznane są $C\Phi\Psi$ i Φ oraz Ψ jest postaci NX (tj. głównym funktorem jest w nim negacja), pytamy, czy uznane jest N. Dokonujemy podstawienia w tezie 75. p/Φ, q/X, otrzymując:

$$\begin{array}{ll}
\vdash FC\Phi NXF\Phi NX & \text{teza} \\
\vdash C\Phi NX & \text{założenie} \\
\hline
\vdash F\Phi NX & \text{reguła (b)} \\
\vdash \Phi & \text{założenie} \\
\hline
\vdash NX & \text{reguła (b)}
\end{array}$$

NX jest uznane, zatem dla wyrażeń mających postać negacji reguła (d) została udowodniona.

Ad (III). Jeśli uznane są $C\Phi\Psi$ i Φ oraz Ψ jest postaci $CX\Omega$, pytamy, czy $CX\Omega$ jest uznane. Korzystamy z odpowiedniego podstawienia tezy 77.

$$\begin{array}{ll}
\vdash FC\Phi CX\Omega F\Phi CX\Omega & \text{teza} \\
\vdash C\Phi CX\Omega & \text{założenie} \\
\hline
\vdash F\Phi CX\Omega & \text{reguła (b)} \\
\vdash \Phi & \text{założenie} \\
\hline
\vdash CX\Omega & \text{reguła (b)}
\end{array}$$

[10] Ł u k a s i e w i c z, *O intuicjonistycznym* [...], s. 264.

CXΩ jest uznana, a wiec reguła (d) obowiązuje również dla wyrażeń implikacyjnych.

Ad (I). Jeśli uznane są CΦΨ i Φ oraz Ψ jest zmienną zdaniową, to nie zmniejszając ogólności rozważań, można przyjąć, że Φ jest q. Lecz CΦq i Φ nie mogą być oba uznane, gdyż w przeciwnym razie otrzymalibyśmy z tezy 73 wyrażenie NNq:

⊢ FCΦqFΦNNq	teza
⊢ CΦq	założenie
⊢ FΦNNq	reguła (b)
⊢ Φ	założenie
⊢ NNq	reguła (b),

a stąd przez podstawienie musielibyśmy uznać również NNNq. W wyniku podstawienia p/NNq w aksjomacie $A_Ł10$ mielibyśmy:

⊢ FNNqFNNNqq	teza
⊢ NNq	
⊢ FNNNqq	reguła (b)
⊢ NNNq	
⊢ q	reguła (b)

Reguła (d) byłaby znowu spełniona, lecz oczywiście nie można by jej zastosować w tym przypadku. Ważność reguły odrywania dla klasycznej implikacji jest w ten sposób udowodniona dla wszystkich wyrażeń sensownych rachunku implikacyjno-negacyjnego. To z kolei kończy dowód, że intuicjonistyczny rachunek zdań zawiera jako swoją część właściwą klasyczny rachunek zdań.

Łukasiewicz zauważa, że rola aksjomatu $A_Ł10$ jest w powyższym rozumowaniu istotna, stąd np. w rachunku minimalnym Johanssona nie można udowodnić reguły odrywania dla klasycznej implikacji[11].

System implikacyjno-negacyjny Łukasiewicz wzbogaca wprowadzając do niego zwykłe definicje koniunkcji i alternatywy:

93. FδNCpNqδKpq

90. FδCNpqδApq;

otrzymuje w ten sposób wszystkie klasyczne tezy zawierające funktory K i A. Ponadto pomiędzy funktorami klasycznymi: C, K i A a odpowiadającymi im funktorami intuicjonistycznymi: F, T i O zachodzi, zdaniem Łukasiewicza, prosty związek logiczny: wszystkie funktory klasyczne są słabsze niż odpo-

[11] Tamże.

wiadające im funktory intuicjonistyczne. I tak implikacja klasyczna jest słabsza niż intuicjonistyczna, gdyż implikacja

78. FFpqCpq

jest ważna w systemie intuicjonistycznym, natomiast jej odwrotności, czyli implikacji FCpqFpq, nie da się w nim dowieść. Podobnie funktor koniunkcji K jest słabszy niż T, gdyż tezę

94. FTpqKpq

da się dowieść w logice intuicjonistycznej, lecz jej odwrotności FKpqTpq nie można w niej udowodnić. Podobnie alternatywa A jest słabsza niż O, można bowiem udowodnić implikację

91. FOpqApq,

lecz jej odwrócenia FApqOpq nie można dowieść. Wyrażenia odwrotne do implikacji 78, 94 i 91 można obalić, jeśli do matrycy M_2 dołączymy matrycę M_3 dla C, K i A, skonstruowaną na podstawie M_2 za pomocą definicji 63, 93 i 90.

C	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	3
3	1	1	1

K	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	3
3	3	3	3

A	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	3

Matryce M_2 i M_3 nie sprawdzają wyrażenia FCpqFpq, gdyż dla p = 1, q = 2 mamy: FC12F12 = F12 = 2; podobnie nie sprawdzają ani FKpqTpq, ani FApqOpq, dla p = 2 i q = 2 bowiem otrzymujemy w pierwszym wypadku FK22T22 = F12 = 2, w drugim FA22O22 = F12 = 2.

Z powyższych rozważań Łukasiewicz wyciąga wniosek następujący: wszystkie tezy zawierające F, T lub O pozostają prawdziwe, jeśli zastąpimy te silniejsze funktory przez odpowiednie słabsze, natomiast nie zawsze teza zawierająca C, K lub A pozostaje prawdziwa, jeśli zastąpimy te słabsze funktory przez odpowiednie silniejsze. I tak np. „silne" prawo Claviusa FFNppp, „silne" prawo podwójnej negacji (jako implikacja) FNNpp, „silne" prawo wyłączonego środka OpNp nie są tezami w logice intuicjonistycznej, podczas gdy odpowiednie słabsze tezy:

65. CCNppp

80. CNNpp

92. ApNp

można udowodnić w rachunku intuicjonistycznym[12].

Odnośnie do wyżej zaprezentowanej pracy Łukasiewicza (z 1952 r.) wypowiemy teraz kilka uwag. Przede wszystkim wydaje się, że Łukasiewicz nie uzasadnił właściwie swoich tez programowych (wypowiedzianych na początku artykułu), a zwłaszcza tej naczelnej, która głosi, iż klasyczny rachunek zdań można potraktować jako podsystem intuicjonistycznego rachunku zdań. Taka zależność zachodzi dopiero wtedy, gdy poszerzymy ten ostatni rachunek o definicję 63. Można wobec tego zapytać, czy uprawnione jest takie postępowanie. Czy wraz z dołączeniem do rachunku intuicjonistycznego definicji 63 nie zmienia się równocześnie sens owej definicji w stosunku do analogicznej na gruncie logiki klasycznej?

Wydaje się, iż taka zmiana faktycznie ma miejsce, gdyż za zmienną funktorową we wspomnianej definicji można podstawiać, zgodnie z intencją S. Leśniewskiego, od którego Łukasiewicz przejął ten sposób definiowania, wyłącznie funktory prawdziwościowe. Włączając zatem powyższą definicję do logiki intuicjonistycznej, rozszerzamy tym samym zakres zmiennej funktorowej δ w taki sposób, że można za nią podstawiać również funktory tej logiki. Zdaniem S. Körnera analiza funktorów logiki intuicjonistycznej zdaje się wskazywać, iż nie są to funktory prawdziwościowe[13].

Definicję 63 można także zapisać w postaci:

$Cpq =_{Df} NTpNq$,

czyli można na jej podstawie wyrazić klasyczną implikację za pomocą intuicjonistycznej koniunkcji i negacji. Zauważmy, że powyższa formuła jako równoważność ECpqNKpNq obowiązuje dla klasycznie rozumianych funktorów – jest to normalny sposób definiowania implikacji za pomocą koniunkcji (i negacji) na gruncie logiki klasycznej. Natomiast analogiczna formuła nie obowiązuje przy intuicjonistycznym rozumieniu funktorów (wyrażenie FNTpNqFpq nie jest tezą intuicjonistycznego rachunku zdań). Definicja 63 nie spełnia więc postulatu nietwórczości[14].

---

[12] Tamże, s. 265 n.

[13] S. K ö r n e r, *What is Philosophy? One Philosopher's Answer*, London 1969, s. 65. Podstawę do wysunięcia takiej tezy daje semantyka formalna dla intuicjonistycznego rachunku zdaniowego skonstruowana przez Kripkego. Zob. S. K r i p k e, *Semantical Analysis of Intuitionistic Logic* I, [w:] *Formal Systems and Recursive Functions*, ed. J. N. Crossley, M. Dummett, Amsterdam 1965, s. 92-130.

[14] Definicja D jest twórcza w systemie S wtedy i tylko wtedy, gdy w systemie S istnieją tezy zapisane za pomocą terminów pierwotnych, dowodzone na podstawie definicji D, których nie można udowodnić w S bez odwoływania się do definicji D. Zob. L. B o r k o w s k i,

Włączenie definicji 63 do rachunku intuicjonistycznego dało naszemu logikowi jakąś możliwość przekładu, a przynajmniej porównania funktorów obu logik. Łukasiewicz porównuje je pod względem mocy (siły), wypowiadając ostatecznie niewiele pod względem merytorycznym wnoszącą tezę, że wszystkie funktory intuicjonistyczne są mocniejsze niż odpowiednie funktory klasyczne. Nie jest tu jednak naszym celem wyprowadzanie dalszych konsekwencji z definicji 63 ani analiza samej tej definicji, stwierdzamy tylko tyle, że ma ona decydujące znaczenie dla głównej tezy Łukasiewicza zawartej w omawianym artykule. Mając bowiem zdefiniowaną implikację klasyczną na gruncie rachunku intuicjonistycznego, możemy za jej pomocą zdefiniować pozostałe funktory klasyczne, co faktycznie polski logik czyni, a wobec tego nie może dziwić jego na pierwszy rzut oka osobliwa teza. Co więcej, bez pomocy definicji 63 nie byłoby możliwe mówienie o tak prostej zależności między logiką klasyczną a logiką intuicjonistyczną.

Podsumowując powyższe wywody, można stwierdzić, iż wszystko wskazuje na to, że przy „mechanicznym" porównywaniu zewnętrznych kształtów tez logiki klasycznej i intuicjonistycznej Łukasiewicz (z 1952 r.) nie ujął prawidłowo relacji między nimi. W aspekcie kształtów (wzorów formalnych) „mniej" (nieskończenie wiele) jest bowiem tez w logice intuicjonistycznej. W ten sposób relację między dwiema interesującymi nas tu logikami scharakteryzował uczeń twórcy intuicjonizmu Arend Heyting. Fakt, iż zbiór tez logiki intuicjonistycznej zawiera się w zbiorze tez logiki klasycznej, gdy rozpatrujemy tylko zewnętrzne kształty tych tez, nie oznacza, że te same wzory w obu logikach muszą posiadać taki sam sens.

Łukasiewicz kończy swoje rozważania na temat intuicjonistycznego rachunku zdań pewnymi uwagami dotyczącymi prawa wyłączonego środka jako że jest ono, jego zdaniem, najbardziej znaną tezą nie przyjmowaną przez intuicjonistów. Uważa on, że prawo to jest oczywiste, jeśli podajemy przykłady typu „Pada teraz tutaj lub nie pada teraz tutaj"; lecz ogólnego wzoru „*p* lub nie-*p*" nie można opierać na przykładach. Musi się go przyjąć jako aksjomat lub udowodnić na podstawie innych praw, czyli prawo to musi należeć do systemu logicznego. Czy wobec tego należy ono do systemu skonstruowanego przez Łukasiewicza? Wcześniej odnotowaliśmy, że formuła 92. ApNp jest tezą logiki intuicjonistycznej, a więc klasyczne prawo wyłączonego środ-

Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości. Lublin 1991, s. 394.

ka w niej obowiązuje. Natomiast intuicjonistyczny odpowiednik tego prawa, czyli formuła OpNp, nie może zostać udowodniona.

Łukasiewicz opisuje następnie system, w którym obowiązuje prawo wyłączonego środka. Stwierdza, iż w prawie tym występują dwa funktory – alternatywy i negacji i dwa oczywiste twierdzenia są z nimi związane:

(1) Alternatywa „p lub q" jest prawdziwa, jeśli przynajmniej jeden z jej członów jest prawdziwy.

(2) Negacja zdania fałszywego jest prawdziwa.

Twierdzenia te są przyjmowane zarówno przez intuicjonistów, jak i logików klasycznych. Jeśli do (1) i (2) zostanie dołączona zasada dwuwartościowości:

(3) Każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe[15],

to, zdaniem polskiego logika, otrzyma się prawo wyłączonego środka w jego ogólnej postaci. Albo *p* bowiem jest prawdziwe i wtedy prawo „*p* lub nie-*p*" jest prawdziwe na mocy (1), albo *p* jest fałszywe i wtedy prawo to jest prawdziwe na mocy (1), ponieważ nie-*p* jest prawdziwe na mocy (2).

Jednakże zasada dwuwartościowości nie może stosować się do logiki intuicjonistycznej z uwagi na jej, jak sądził Łukasiewicz, wielowartościowość (w 1932 r. Gödel udowodnił, iż adekwatna matryca tej logiki jest nieskończenie wielowartościowa). Niemniej, zdaniem Łukasiewicza, klasyczne prawo wyłączonego środka można udowodnić w intuicjonistycznym rachunku zdań, jako że – dodajmy, po dołączeniu definicji 63 – cały klasyczny rachunek zdań jest w nim zawarty.

Łukasiewicz podkreśla także, iż znaczenie omawianego prawa zależy od znaczenia alternatywy i negacji, których istotne własności wyrażają twierdzenia (1) i (2), spełnione zarówno w klasycznym, jak i intuicjonistycznym rachunku. Z tego powodu jesteśmy uprawnieni do nazywania ich w obu systemach „alternatywą" i „negacją". Jednak polski logik zauważa, że nie wszystkie własności alternatywy są takie same w obu systemach[16], co usprawiedliwia wprowadzenie różnych symboli na oznaczenie alternatywy klasycznej i alternatywy intuicjonistycznej. Nie ma więc w fakcie obowiązywalności klasycznego prawa wyłączonego środka w rachunku intuicjonistycznym żadnej

---

[15] Ł u k a s i e w i c z, *O intuicjonistycznym* [...], s. 266. Zasada dwuwartościowości jest przez Łukasiewicza wyrażona następująco: „Każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe", jednakże właściwsze wydaje się jej sformułowanie w postaci alternatywy rozłącznej.

[16] Tamże, s. 267.

sprzeczności, skoro nie ma sprzeczności pomiędzy dwoma różnymi wzorami: ApNp oraz OpNp. Pierwszy z nich trzeba przyjąć, a drugi odrzucić.

Można by się zastanowić, jakie to własności alternatywy intuicjonistycznej, których nie ma alternatywa klasyczna (lub odwrotnie), miał na myśli Łukasiewicz. Wcześniej odnotowaliśmy, że alternatywa intuicjonistyczna jest silniejsza niż alternatywa klasyczna. Polski uczony wyjaśnia to w ten sposób: jeśli prawdziwe jest zdanie alternatywne, w którym funktor alternatywy jest rozumiany intuicjonistycznie, to prawdziwe jest również odpowiednie zdanie alternatywne, przy czym funktor alternatywy rozumiany jest w sposób klasyczny, lecz nie odwrotnie, chociaż Łukasiewicz nie eksplikuje znaczenia ani jednego, ani drugiego funktora alternatywy. Znaczenie tych funktorów jest wyznaczone jedynie przez kontekst, w którym one występują, czyli przez aksjomaty i reguły systemu. Zdanie „*p* lub nie-*p*" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwy jest przynajmniej jeden ze składników (przy tym nie musimy wiedzieć, który z nich). Taka jest klasyczna interpretacja zdania alternatywnego. Natomiast za K. Gödlem Łukasiewicz sugeruje intuicjonistyczną interpretację zdania „*p* lub nie-*p* jest prawdziwe" jako „jeden ze składników alternatywy jest prawdziwy i możemy wskazać, który z nich"[17].

Logik-intuicjonista mówi, że możemy uznać zdanie postaci „$\Phi \vee \Psi$" wtedy i tylko wtedy, gdy możemy uznać zdanie Φ lub możemy uznać zdanie Ψ, czyli, innymi słowy, możemy udowodnić Φ lub możemy udowodnić Ψ. Dlatego, aby uznać zdanie „*p* lub nie-*p*", nie wystarczy wiedzieć, że jeden ze składników jest prawdziwy, trzeba nadto móc wskazać, który z nich jest prawdziwy[18]. Inaczej mówiąc, wyrażenie postaci „$\Phi \vee \Psi$" jest tezą, jeśli Φ jest tezą lub Ψ jest tezą. Można więc mówić, że alternatywa intuicjonistyczna ma efektywny czy też konstruktywny charakter. W tym sensie należałoby chyba rozumieć stwierdzenie Łukasiewicza, że funktory intuicjonistyczne są silniejsze niż odpowiednie funktory klasyczne.

W prawie wyłączonego środka występują dwa funktory: alternatywa i negacja, tymczasem Łukasiewicz zajmuje się tylko alternatywą – tylko dla niej przyjmuje odmienne symbole dla jej rozumienia klasycznego i intuicjonistycznego. Czy odrzucenie przez intuicjonistów omawianego prawa jest zatem odrzuceniem klasycznej alternatywy, natomiast negacja pozostaje poza kryty-

---

[17] Tamże.

[18] Skoro nie w każdym przypadku potrafimy to uczynić, zatem ogólna obowiązywalność wzoru jest nie do przyjęcia. Zob. K. G ö d e l, *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*, [w:] t e n ż e, *Collected Works*, vol. I: *Publications 1929-1936*, Oxford 1986, s. 224.

ką? Wydaje się, że tak właśnie można interpretować poglądy Łukasiewicza w tej sprawie, tym bardziej że za odrzucenie tego prawa w rachunku intuicjonistycznym obarcza on odpowiedzialnością sposób rozumienia alternatywy. Inni, jak np. Michael Dummett, uważają, że to właśnie odmienności znaczeniowe funktora negacji ponoszą winę za odrzucenie przez intuicjonistów prawa wyłączonego środka[19]. W tym sporze, jak się wydaje, żaden z nich nie ma racji, gdyż takie rozróżnienie jest nietrafne: „kiedy raz zakłóci się wzajemne związki operatorów logicznych, można powiedzieć, że zmieniło się wszystko [...] nazwy i symbole negacji i alternatywy przenoszą się na logikę nieklasyczną, taką jak intuicjonizm, tylko przez luźną i arbitralną analogię"[20].

Zatrzymajmy się jeszcze raz nad stwierdzeniem Łukasiewicza, że funktory intuicjonistyczne są silniejsze, odpowiednie zaś funktory klasyczne słabsze. Tak np. słabsza implikacja CNNpp obowiązuje w rachunku intuicjonistycznym, natomiast implikacja mocniejsza FNNpp nie jest w nim ważna. Analizując ten pogląd polskiego logika, Dummett stwierdza, że nie należy tego rozumieć w taki sposób, że zdanie Fpp jest mocniejsze niż zdanie Cpp. Jest tak dlatego, że już sam poprzednik intuicjonistycznego zdania warunkowego jest mocniejszy niż poprzednik zdania klasycznego. Klasyczny poprzednik – zdanie *p* jest prawdziwe niezależnie od tego, czy możemy je rozpoznać jako takie, czy nie. Jest to niezrozumiałe na gruncie intuicjonizmu: intuicjonistyczny poprzednik tego zdania rozumie się w ten sposób, że *p* jest (intuicjonistycznie) dowodliwe, a to jest mocniejsze założenie. Dlatego – konkluduje Dummett – klasyczna i intuicjonistyczna implikacja (jako takie) są nieporównywalne pod względem siły[21] – porównywać można jedynie siłę (moc) poprzednika (następnika) odpowiedniego zdania implikacyjnego. Podobnie ma się rzecz z pozostałymi funktorami.

---

[19] *Antyrealistyczne spojrzenie na język, myśl, logikę i historię filozofii analitycznej. Z Michaelem Dummettem rozmawia Fabrice Pataut*, „Kwartalnik Filozoficzny", 26(1998), z. 1, s. 170.

[20] W. V. O. Q u i n e, *Filozofia logiki*, Warszawa 1977, s. 129.

[21] M. D u m m e t t, *Elements of Intuitionism*, Oxford 1977, s. 16 n. Wbrew poglądom Dummetta wydaje się, że istnieje możliwość porównywania funktorów pod względem siły dedukcyjnej. Jeśli mamy równokształtne formuły, powiedzmy A, B, w obu rachunkach i w jednym da się wyprowadzić z A B, lecz nie odwrotnie, a w drugim w obie strony, to funktor w drugim jest mocniejszy niż w pierwszym; inaczej nie można by wypowiedzieć żadnych uwag porównawczych ani ustalić relacji między systemami, w szczególności nie można by w ogóle mówić o logikach pośrednich.

Na zakończenie swoich wywodów Łukasiewicz pisze znamienne słowa odzwierciedlające jego ówczesny (z 1952 r.) pogląd na wielość rachunków logicznych:

„Nie mamy sposobu rozstrzygnięcia, który z n-wartościowych systemów logiki ($n \geq 2$) jest prawdziwy. Logika nie jest nauką o prawach myślenia lub o jakimś realnym przedmiocie; jest ona, według mego zdania, tylko narzędziem, które pozwala nam wyciągnąć uznane wnioski z uznanych przesłanek. Klasyczny rachunek zdań, który jest sprawdzony przez matrycę dwuwartościową, jest systemem logicznym najstarszym i najprostszym i dlatego najlepiej znanym i szeroko stosowanym. Ale dla pewnych celów, na przykład w logice modalnej, n-wartościowy system ($n > 2$) może być bardziej odpowiedni i przydatny. Im bardziej przydatny i bogaty jest system logiczny, tym jest on wartościowszy"[22].

Łukasiewicz twierdzi więc wyraźnie, iż w logice jesteśmy skazani na konwencjonalizm i pragmatyzm. Trzeba jednak zauważyć, że nasz autor przeszedł w tym względzie pewną ewolucję poglądów: od podkreślania bardzo ścisłych związków między logiką a doświadczeniem (1936 r.), czego wyrazem są słowa:

„Wierzę, że jeden i tylko jeden z tych systemów logicznych zrealizowany jest w świecie rzeczywistym, czyli jest realny, tak jak jeden i tylko jeden system geometryczny jest realny. Nie wiemy dziś wprawdzie, który to jest system, ale nie wątpię, że badania empiryczne wykażą kiedyś [...] czy związek jednych faktów z drugimi odpowiada logice dwuwartościowej, czy jakiejś wielowartościowej"[23]
do instrumentalistycznej tezy, wyrażonej najbardziej radykalnie w artykule *System logiki modalnej* (1953), iż nigdy nie będziemy w stanie rozstrzygnąć, który system logiki jest prawdziwy.

W szczególności nie można więc rozstrzygnąć, czy poprawna jest logika klasyczna, czy intuicjonistyczna. Niemniej Łukasiewicz zauważa, iż wszystkie zastosowania zdaniowej logiki klasycznej do matematyki odnoszą się również – ze względu na relację zawierania – do stosowania rachunku intuicjonistycznego do matematyki, a ponadto w tym ostatnim można rozpatrywać szereg subtelnych problemów matematycznych, które nie dają się sformułować w systemie klasycznym. Polski logik nie mówi jednak, jakie to subtelne problemy

---

[22] Łukasiewicz, *O intuicjonistycznym* [...], s. 267.

[23] Tenże, *Logistyka a filozofia*, [w:] tenże, *Z zagadnień* [...], s. 206 n.

jest w stanie rozważać logika intuicjonistyczna, a nie nadaje się do tego celu logika klasyczna. Z tej jednak racji ze wszystkich znanych systemów wielowartościowych Łukasiewicz najwyżej ceni logikę intuicjonistyczną jako rachunek najbardziej intuicyjny[24] i elegancki.

*

Rekapitulując rozważania tego artykułu, można streścić przedstawione w nim poglądy Łukasiewicza odnośnie do logiki intuicjonistycznej w następujący sposób:

1. Polski logik nie jest konsekwentny w ujmowaniu relacji klasycznego rachunku zdaniowego do intuicjonistycznej logiki zdaniowej. W pracy z 1938 r. utrzymywał, iż ta ostatnia jest częścią właściwą logiki klasycznej, natomiast w 1952 r. sądził, iż zachodzi zupełnie odwrotna zależność.

2. Teza głosząca, że intuicjonistyczny rachunek zdań zawiera w sobie klasyczny rachunek zdań, lecz nie odwrotnie, jest prawdziwa o tyle, o ile dołączymy do tego pierwszego definicję (u Łukasiewicza oznaczoną jako definicja 63), która pozwala na zastąpienie wyrażenia zbudowanego za pomocą negacji i koniunkcji intuicjonistycznej wyrażeniem zapisanym za pomocą klasycznej implikacji. Definicja ta pozwala więc na wyrażenie funktora klasycznego za pomocą funktorów intuicjonistycznych.

3. Posłużenie się definicją 63 w rachunku intuicjonistycznym wydaje się nieuprawnione (jest ona tu definicją twórczą), gdyż za zmienną funktorową δ można podstawiać jedynie funktory prawdziwościowe, a funktory intuicjonistyczne zdają się posiadać nie-prawdziwościowy charakter.

4. Wszystkie funktory intuicjonistyczne są, zdaniem Łukasiewicza, mocniejsze niż odpowiednie funktory klasyczne. Teza ta wydaje się być w pewnym sensie słuszna (przykład interpretacji alternatywy intuicjonistycznej), aczkolwiek nie wszyscy autorzy się z nią zgadzają (innego zdania jest np. Dummett).

5. Również w kwestii poprawności systemu logicznego Łukasiewicz przeszedł ewolucję poglądów: od realizmu głoszącego, że o wyborze logiki zadecyduje zgodność z realnym światem (a więc prawdziwość tez) do skrajnego

[24] Podobnie uważa Z. Zawirski (*O logice L. E. J. Brouwera*, „Sprawozdania Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk", 1931, nr 2, 3, 4), dla którego jest ona bliższa intuicji niż chociażby różne systemy logik wielowartościowych samego Łukasiewicza czyniące „nadmierny wyłom w prawach logiki".

konwencjonalizmu, wedle którego wybór logiki podyktowany jest względami pragmatycznymi, przede wszystkim użytecznością (logika jest tylko narzędziem, tym lepszym, im bardziej użytecznym, skutecznym).

6. Do analizy pewnych problemów na gruncie matematyki bardziej użytecznym narzędziem wydaje się być, zdaniem Łukasiewicza, logika intuicjonistyczna niż klasyczna.

JAN ŁUKASIEWICZ'S ACCOUNT OF THE INTUITIONISTIC PROPOSITIONAL LOGIC

S u m m a r y

The aim of the article was to show Łukasiewicz's programmatic theses that are contained mainly in his work *On the Intuitionistic Propositional Logic* and concerning first of all the connections between the intuitionistic and classical sentential calculi. It was also shown that in the same article Łukasiewicz did not put into effect the programmatic theses he proclaimed although he thought that he fulfilled the task formulated in this way. Moreover, an attempt was made to complement some of the theses proposed by the Polish logician in connection with understanding of the principle of excluded middle and logical constants occurring in this principle.

Translated by Tadeusz Karłowicz