ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLIX, zeszyt 1 - 2001

MAREK LECHNIAK

UWAGI O L. BORKOWSKIEGO METODZIE ZEROJEDYNKOWEGO SPRADZANIA WĘŻSZEGO RACHUNKU PREDYKATÓW

W roku 1959 L. Borkowski przedstawił bardzo prostą, przydatną dydaktycznie metodę sprawdzania wyrażeń węższego rachunku predykatów z jedną zmienną. Pewne korekty do tej metody wprowadził w roku 1964, a do podręcznika włączył w roku 1991[1].

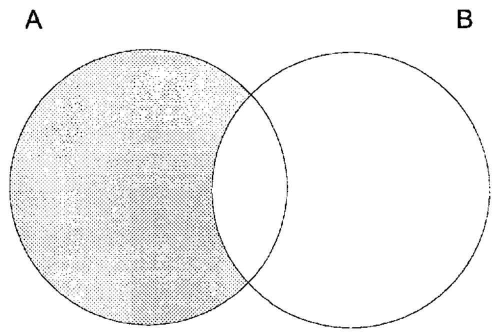
Można jednak wskazać pewną trudność w dydaktycznym stosowaniu tej metody. Weźmy następujący przykład:

$$\begin{array}{cccccccc}
(\forall x) & (A(x) & \to & B(x)) & \to & (\exists x)(A(x) & \wedge & B(x)) \\
 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\
\underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

(podwójne podkreślenie wskazuje na to, że wartość poprzednika jest założona, wykreślenie charakterystyki wskazuje jej pustość, a podkreślenie przynajmniej jednego elementu charakterystyki – jej niepustość). Postępując według reguł

[1] Por. odpowiednio: L. Borkowski, *Dydaktyczne ujęcie zerojedynkowej metody sprawdzania wyrażeń węższego jednoargumentowego rachunku predykatów*, „Studia Logica", 11 (1961), s. 57-76; tenże, *Poprawki do artykułu „Dydaktyczne ujęcie zerojedynkowej metody sprawdzania wyrażeń węższego jednoargumentowego rachunku predykatów"*, „Studia Logica", 15 (1964), s. 271-272, oraz tenże, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991.

sprawdzania podanych przez Borkowskiego, dla jednego z możliwych rozkładów otrzymujemy wynik pozytywny[2]; zakładając prawdziwość poprzednika, zmuszeni byliśmy założyć pustość drugiej z klas rozkładu, a więc zbioru przedmiotów mających własność *A*, a nie mających własności *B*. W następniku sprawdzanej implikacji otrzymaliśmy *1*, gdyż wśród charakterystyk klas rozkładu występuje w następniku przynajmniej jedna *1*, a to upoważnia nas do wniosku, że i następnik wyrażenia jest prawdziwy. Tymczasem z odpowiedniego diagramu Venna widać, że wynik jest jednoznacznie negatywny. Z tego, że nie istnieją takie przedmioty, które mają własność *A*, a nie mają własności *B*, nie wynika wniosek, że muszą istnieć przedmioty mające zarazem własność *A* i własność *B*. Taki wniosek można przyjąć jedynie przy założeniu, że własność *A* nie jest „pusta", tzn. że w ogóle jakieś przedmioty mające własność *A* istnieją.



Oczywiście w podanym przykładzie każdy rozpozna wyrażenie będące na gruncie węższego rachunku predykatów odpowiednikiem prawa podporządkowania teorii zdań kategorycznych: S a P $\rightarrow$ S i P, należące do grupy twierdzeń, których obowiązywanie zależy od przyjęcia założenia o niepustości terminów. Podobne do wskazanych trudności można podać dla innych odpowiedników tez teorii zdań kategorycznych z założeniem egzystencjalnym, jak np. prawa konwersji z ograniczeniem czy trybów sylogistycznych pochodnych oraz tych, w których nazwach występuje literka *p* (Fesapo, Bamalip, Darapti,

[2] Oczywiście jest to błąd pozorny. Borkowski bowiem, omawiając reguły sprawdzania, stwierdza, że sprawdzenia należy dokonać dla każdego z możliwych rozkładów uniwersum. Jednakże przykłady, które podaje, sugerują, że wystarczy sprawdzić dane wyrażenie dla jednego z możliwych rozkładów (zawsze w przykładach sprawdzany jest tylko jeden rozkład uniwersum, co w praktyce dydaktycznej często prowadzi do popełniania przez studentów takich błędów jak powyższy).

Felapton), czyli takich, których redukcja do trybów figury I wymaga zastosowania *conversio per accidens*. Jasne jest też (co łatwo pokazać), że powyższe sprawdzane wyrażenie nie jest tezą węższego rachunku predykatów. Tezą węższego rachunku predykatów jest natomiast wyrażenie:

$$(\forall x)\ (A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (\exists x)\ A(x) \rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x)).$$

Pierwszą próbą uniknięcia trudności byłoby wymaganie, żeby ograniczyć stosowanie tej metody tylko do takich wyrażeń, w których kwantyfikator stoi przynajmniej raz przed wyrażeniem atomicznym. Postępując we wskazany wyżej sposób, można pokazać, że „sprawdza się” następujące, jawnie fałszywe wyrażenie:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\forall x) & (A(x) & \rightarrow & B(x)) & \rightarrow & (\exists x) & A(x) \\
 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\
 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & \cancel{1} \\
\underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 1 & & 1 & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & & & 0
\end{array}$$

choć, inaczej niż w pierwszym z analizowanych przykładów, przy założeniu fałszywości następnika tej implikacji poprzednik jej okazuje się prawdziwy, co wskazuje, że jednak implikacja ta jest fałszywa:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\forall x) & (A(x) & \rightarrow & B(x)) & \rightarrow & (\exists x) & A(x) \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & & & \cancel{1} \\
 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & \cancel{1} \\
1 & 0 & 1 & 1 & & \underline{\underline{0}} & 0 \\
 & 0 & 1 & 0 & & & 0
\end{array}$$

Problem jednak pozostaje, gdyż trudno zaakceptować metodę, która „w jedną stronę” daje rezultat zgodny z prawdą, a w drugą stronę zawodzi. Spróbujmy znaleźć źródło tych trudności.

W przykładach podawanych przez Borkowskiego zakładane jest, że w wyrażeniach implikacyjnych zarówno w poprzedniku, jak i w następniku występują te same funktory dwuargumentowe. Są to więc najczęściej prawa rozkładania bądź składania kwantyfikatorów lub odpowiedniki niektórych trybów sylogistycznych. Kłopoty zaczynają się, gdy weźmiemy wyrażenia, w których poprzedniku występuje funktor implikacji znajdujący się w zasięgu kwantyfikatora ogólnego, czyli takie, których poprzednik jest swego rodzaju odpowiednikiem zdania ogólno-twierdzącego, a w następniku wyrażenie atomiczne z kwantyfikatorem lub wyrażenie złożone za pomocą innego funktora niż implikacja. Implikacja w poprzedniku jest odpowiednikiem „swego rodzaju", gdyż jest to tak zwana słaba inkluzja, która – jak zauważył Leśniewski – do swej prawdziwości nie wymaga niepustości podmiotu zdania. Zdanie „Wszelki centaur ma wąsy" jest, według Leśniewskiego, prawdziwe niezależnie od tego czy centaur ma wąsy, czy też centaur wąsów nie ma. Jego prawdziwość bowiem jest zapewniona przez fakt, że centaury nie istnieją. Dlatego Leśniewski odróżniał tzw. funktor słabej inkluzji (wszelkie A jest B) od funktora mocnej inkluzji (każde A jest B); tylko to drugie zdanie jest odpowiednikiem zdania postaci SaP teorii zdań kategorycznych. Dzieje się tak ze względu na tę własność implikacji, iż jest ona prawdziwa, gdy jej poprzednik jest fałszywy. Jeśli również i w następniku implikacji głównej jest implikacja, to nie ma żadnych niedogodności w sprawdzaniu, choć pozwala to np. na uznanie prawdziwości wyrażenia:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(\forall x) & (A(x) & \rightarrow & B(x)) & \rightarrow & [(\forall x) & A(x) & \rightarrow & B(y)] \\
 & 1 & 1 & 1 & & & 1 & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & \cancel{1} & & \\
\underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & & \\
 & 0 & 1 & 0 & & & 0 & &
\end{array}
$$

którego prawdziwość jest zagwarantowana już przez to, że przy założonej pustości drugiej klasy rozkładu (II wiersz wykreślony) poprzednik implikacji występującej w następniku implikacji głównej jest fałszywy, powodując prawdziwość tego następnika niezależnie od jakichkolwiek ustaleń co do wolnej zmiennej *y*.

Jeśli więc mamy użyty w poprzedniku badanego wyrażenia odpowiednik zdania z funktorem słabej inkluzji, które może być prawdziwe ze względu na pustość zbioru przedmiotów mających własność *A*, to metoda „nie zauważa" tego i „każe" nam wyprowadzić wniosek będący zdaniem egzystencjalnym (choć oczywiście iloczyn zbioru pustego z dowolnym zbiorem jest równy zbiorowi pustemu).

Niestety, problem nie dotyczy tylko implikacji. Podobne „błędy" mamy w wypadku alternatywy występującej w poprzedniku sprawdzanej implikacji, np.:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(\forall x) & (A(x) & \vee & B(x)) & \rightarrow & (\exists x) & A(x) \\
 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\
\underline{\underline{1}} & 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & & & 0 \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & \cancel{0}
\end{array}
$$

co wskazywałoby, że powyższe wyrażenie jest prawem logiki. Oczywiście nie jest to zgodne z prawdą.

Rozwiązanie problemu jest następujące. Wyrażenia złożone poprzedzone kwantyfikatorem ogólnym mogą być prawdziwe na jeden lub wiele sposobów. Na jeden sposób jest prawdziwe wyrażenie koniunkcyjne, a na wiele sposobów wyrażenie alternatywne, implikacyjne czy równoważnościowe, np. alternatywa A(x) lub B(x) jest prawdziwa nie tylko wtedy, gdy obie własności są „niepuste", czyli denotują niepusty zbiór przedmiotów i nie istnieją przedmioty, które by nie miały ani własności *A*, ani własności *B*, lecz także wtedy, gdy jedna z własności jest „pusta". Wyrażenia zaś złożone poprzedzone kwantyfikatorem szczegółowym są fałszywe na jeden sposób dla funktorów implikacji i alternatywy, a na wiele sposobów dla funktorów równoważności i koniunkcji. Jeśli więc zakładamy prawdziwość poprzednika implikacji, musimy uwzględnić, na ile sposobów jest on prawdziwy, i następnie wszystkie te wypadki poddać sprawdzaniu (pamiętając, że zawsze przynajmniej jedna klasa rozkładu winna być niepusta). W naszym ostatnim przykładzie musimy więc zbadać (poza wypadkiem powyższym) m.in.:

(∀x)	(A(x)	∨	B(x))	→	(∃x)	A(x)
	1	1	1			1
$\underline{\underline{1}}$	1	1	0		1	1
	~~0~~	~~1~~	~~1~~			~~0~~
	~~0~~	~~0~~	~~0~~			~~0~~

(∀x)	(A(x)	∨	B(x))	→	(∃x)	A(x)
	1	1	1			1
$\underline{\underline{1}}$	~~1~~	~~1~~	~~0~~		~~1~~	~~1~~
	0	1	1			0
	~~0~~	~~0~~	~~0~~			~~0~~

(∀x)	(A(x)	∨	B(x))	→	(∃x)	A(x)
	~~1~~	~~1~~	~~1~~			~~1~~
$\underline{\underline{1}}$	~~1~~	~~1~~	~~0~~		~~0~~	~~1~~
	0	1	1			0
	~~0~~	~~0~~	~~0~~			~~0~~

Przy tym ostatnim sprawdzaniu okazuje się, że przy prawdziwym poprzedniku następnik implikacji jest fałszywy. Wszystkich przypadków prawdziwości poprzednika tego wyrażenia jest więc 7 (bo wszystkich klas rozkładu jest cztery, a każda może być pusta lub niepusta, a zatem wszystkich sposobów rozkładu jest osiem, przy czym przynajmniej jedna musi być niepusta). Na szczęście nie wszystkie one są możliwe. W naszym przykładzie liczba możliwości ogranicza się do 3; są to sytuacje:

a) alternatywa jest prawdziwa, a żadna z własności nie jest pusta;

b) alternatywa jest prawdziwa, a pusta jest własność *A* (bo $B(x) \vee 0 \equiv \equiv B(x)$);

c) alternatywa jest prawdziwa, a pusta jest własność *B*.

Jeśli któryś z tych przypadków pominiemy w sprawdzaniu, to możemy otrzymać błędny wynik.

Aby skrócić sprawdzanie, możemy zastosować sprawdzanie nie wprost, tzn. założyć zarówno prawdziwość poprzednika, jak i fałszywość następnika. Jeśli wyrażenie jest prawem logiki, to w wyniku założenia wszystkie klasy rozkładu staną się puste lub istnieje taka klasa rozkładu, co do której zakłada się, że jest pusta, a zarazem niepusta; jeśli wyrażenie nie jest prawem logiki, pozostanie jakaś klasa rozkładu niepusta, np.:

$$\begin{array}{llllllll}
 & (\forall x) & (A(x) & \vee & B(x)) & \to & (\exists x)A(x) & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & & & \cancel{1} & \\
\underline{\underline{1}} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} & & \cancel{\underline{\underline{0}}} & \cancel{1} & \text{wyrażenie nie jest prawem logiki} \\
 & 0 & 1 & 1 & & & 0 & \\
 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & \cancel{0} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
 & (\forall x) & (A(x) & \to & B(x)) & \to & (\exists x)A(x) & \wedge & B(x)) & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & & & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \\
 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & & & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \text{wyrażenie nie jest prawem logiki} \\
\underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 1 & & \underline{\underline{0}} & 0 & 0 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
 & (\forall x) & (A(x) & \to & B(x)) & \to & (\exists x)(\sim A(x) & \vee & B(x)) & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \\
 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \\
\underline{\underline{1}} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & & \cancel{\underline{\underline{0}}} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & 1 \quad \text{wyrażenie jest prawem logiki} \\
 & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & & & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \; \cancel{0} &
\end{array}$$

Ponieważ ostatnie wyrażenie jest prawem logiki, założenie o jego fałszywości prowadzi do stwierdzenia, że wszystkie klasy rozkładu są puste, czyli że nie istnieje takie uniwersum, w którym to wyrażenie jest fałszywe. Z kolei odpowiednik trybu *Barbara* sprawdza się ze względu na to, że fałszywość następnika wymaga, żeby niepusta była co najmniej jedna z dwóch klas rozkładu, dla której wartość wyrażenia w zasięgu kwantyfikatora wynosi *0*; co do każdej z tych klas zachodzi sprzeczność, tzn. głosi się, iż jest ona pusta i niepusta:

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (\forall x)(B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow C(x))$$

	1	1	1		1	1	1		1	1	1
	~~1~~	~~1~~	~~1~~		~~1~~	~~0~~	~~0~~		~~1~~	~~$\underline{0}$~~	~~0~~
	~~1~~	~~0~~	~~0~~		~~0~~	~~1~~	~~1~~		~~1~~	~~1~~	~~1~~
	~~1~~	~~0~~	~~0~~		~~0~~	~~1~~	~~0~~		~~1~~	~~$\underline{0}$~~	~~0~~
$\underline{\underline{1}}$	0	1	1	$\underline{\underline{1}}$	1	1	1	$\underline{\underline{0}}$	0	1	1
	~~0~~	~~1~~	~~1~~		~~1~~	~~0~~	~~0~~		~~0~~	~~1~~	~~0~~
	0	1	0		0	1	1		0	1	1
	0	1	0		0	1	0		0	1	0

Na podstawie powyższych rozważań wydaje się więc, iż sprawdzanie zerojedynkowe wyrażeń węższego rachunku predykatów należy przeprowadzać metodą nie wprost, według reguły:

Sprawdzanie zaczynamy od założenia fałszywości badanej implikacji, czyli założenia zarazem prawdziwości poprzednika i fałszywości następnika implikacji. Postępujemy według reguł podanych przez Borkowskiego, zakładając niepustość (podkreślenie jednego elementu charakterystyki) lub pustość (wykreślenie charakterystyki) odpowiednich klas rozkładu. Sprawdzanie jest zakończone wynikiem pozytywnym (czyli sprawdzane wyrażenie jest tezą węższego rachunku predykatów), gdy:

a) wszystkie charakterystyki klas rozkładu są wykreślone (jest to sprzeczne z leżącym u podstaw węższego rachunku predykatów założeniem o niepustości uniwersum); lub

b) stwierdzamy istnienie takiego wyrażenia atomicznego, któremu przysługuje zarazem wartość *0* i *1*; lub

c) stwierdzamy istnienie takiej klasy rozkładu, której przysługuje zarazem pustość i niepustość.

Jeżeli możliwych rozkładów uniwersum spełniających założenie fałszywości implikacji jest więcej niż jeden, należy dokonać sprawdzenia nie wprost dla każdego z możliwych rozkładów uniwersum. Wyrażenie nie jest tezą węższego rachunku predykatów, gdy istnieje taki rozkład uniwersum, dla którego nie zachodzi żaden z trzech powyższych punktów.

Słowa kluczowe: logika, rachunek predykatów, metoda zerojedynkowa
Key words: logic, predicate calculus, truth-table decision procedure