ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XLIX, zeszyt 1 – 2001

BOŻENA CZERNECKA

KILKA UWAG O PRZEDMIOCIE LOGIKI INTUICJONISTYCZNEJ

Ważnym zagadnieniem, na które zwraca uwagę A. Heyting, jest rozróżnienie między badaniem nad intuicjonizmem a praktyką intuicjonizmu[1]. Intuicjoniści preferują to drugie. Heyting o sobie pisze, że zadowala się budowaniem myślowych konstrukcji matematycznych w przekonaniu, że przyczynią się one w jakiś sposób do rozjaśnienia ludzkiej myśli. Mówienie o intuicjonizmie, czyli rozwijanie pewnej refleksji filozoficznej nad intuicjonizmem – jak pisze – pozostawia innym. Niemniej jednak holenderski uczony wypowiada wiele uwag dotyczących matematyki i logiki intuicjonistycznej. Celem niniejszego artykułu będzie próba ustalenia, przy wykorzystaniu prac intuicjonistów, co jest przedmiotem logiki intuicjonistycznej. Będzie przy tym chodziło tylko o logikę zdaniową.

Heyting był uczniem L. E. J. Brouwera i chociaż rozwijał idee twórcy intuicjonizmu, nie był ortodoksyjnym kontynuatorem jego myśli. Rozbieżności między nimi dotyczyły głównie możliwości przedstawienia twórczej myśli matematycznej w języku logiki symbolicznej. Brouwer odniósł się zdecydowanie negatywnie do podjętej przez Heytinga aksjomatyzacji (zdaniowej) logiki intuicjonistycznej, uważając, że dynamicznej i nigdy nie zamkniętej dziedziny myślowej aktywności człowieka nie da się opisać w języku logiki mającej charakter statyczny. Trzeba jednak zauważyć, że w kwestiach dotyczących przedmiotu matematyki i logiki intuicjonistycznej zasadniczo nie było między nimi różnicy zdań.

Dr BOŻENA CZERNECKA – Wydział Filozofii KUL, Katedra Logiki; adres do korespondencji: AL. Racławickie 14, 20-950 Lublin.

[1] A. H e y t i n g, *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam 1966, s. 12.

W literaturze filozoficzno-logicznej można spotkać opinie, iż wszystkie odpowiedzi dotyczące przedmiotu logiki formalnej (przy uwzględnieniu wszystkich możliwych podejść) dadzą się, po dokonaniu pewnych uproszczeń, sprowadzić do trzech podstawowych. Pierwsze, zwane idealizmem logicznym lub platonizmem, umieszcza przedmiot logiki w sferze bytów idealnych. Drugie, zwane nominalizmem logicznym, sprowadza przedmiot logiki do samych wyrażeń językowych. Wreszcie ostatnie, zwane realizmem logicznym, utożsamia przedmiot logiki z czymś ze świata realnego. Oprócz tych trzech podstawowych stanowisk wyróżnia się czasami konstruktywizm, według którego przedmiot logiki stanowią konstrukcje mentalne, oraz fikcjonalizm, który uważa przedmiot logiki za fikcje. Istnieją oczywiście różne odmiany wyżej wymienionych stanowisk.

W związku z powyższym zapytajmy: co jest szeroko pojętym przedmiotem logiki intuicjonistycznej – czy jakieś byty idealne, czy wyrażenia językowe, czy też coś ze świata realnego? Heyting pisze, że intuicjoniści badają myślowe konstrukcje matematyczne jako takie i że do takich badań logika klasyczna jest nieadekwatna[2]. Rodzi się jednak pytanie, w jakim aspekcie są badane te konstrukcje matematyczne i co głoszą bądź stwierdzają prawa logiki intuicjonistycznej. Zanim jednak podejmie się próbę ukazania tego, czego dotyczą prawa logiki intuicjonistycznej, poprzez analizę tekstu Heytinga, a także innych zwolenników intuicjonizmu, trzeba, tytułem wstępu, wypowiedzieć kilka uwag o przedmiocie logiki klasycznej. Na ten ostatni temat niektórzy autorzy niekiedy marginalnie już pisali. Nie ma natomiast prac z filozofii logiki, które byłyby poświęcone wprost zagadnieniu przedmiotu logiki intuicjonistycznej.

Osobną rozprawę poświęconą przedmiotowi logiki formalnej napisał J. M. Bocheński. Według niego, przedmiot ontologii – byty realne – jest częścią właściwą przedmiotu logiki formalnej. Za Janem od św. Tomasza (XVII wiek) Bocheński przyjmuje, że przedmiotem logiki formalnej jest byt nadtranscendentalny, tj. byt wyabstrahowany z bytu realnego i bytu idealnego[3]. Innymi słowy, logika jest najogólniejszą teorią przedmiotów, jest ontologią zarówno bytów realnych, jak i idealnych[4]. Logika formalna, podobnie jak ontologia, formułuje swoje twierdzenia w języku przedmiotowym.

---

[2] Tamże, s. 3.

[3] J. M. B o c h e ń s k i, *Logika i ontologia*, w: t e n ż e, *Logika i filozofia*, red. J. Parys, Warszawa 1993, s. 129.

[4] Tamże, s. 116, 129.

Ważną tezę związaną z przedmiotem logiki klasycznej wypowiedział także K. Ajdukiewicz, pisząc, że każde twierdzenie logiczne stwierdza pewien obiektywny związek między stanami rzeczy[5]. Prawdziwościowe spójniki logiczne klasycznego rachunku zdań pozwalają opisywać zależności między dowolnymi stanami rzeczy. Gdy mamy jakieś dwa stany rzeczy (jeden z nich opisywany w zdaniu *p*, drugi w zdaniu *q*), wówczas różne „mechanizmy" mogą stanowić o tym, że w określony sposób one współwystępują lub że tak się nie dzieje. Rozumie się to w ten sposób, że w świecie, w którym te stany rzeczy zachodzą, istnieją również określone związki, określone relacje między nimi. „I te właśnie – w pewnym abstrakcyjnym sensie realne związki – mają swój swoiście ikoniczny odpowiednik w języku, operującym odpowiednimi spójnikami"[6].

Według koncepcji inspirowanej wypowiedzią Ajdukiewicza, logika jest teorią związków zachodzących bezwyjątkowo pomiędzy różnego typu istnościami, o których to związkach mówią wszystkie nauki ujmujące świat w aspekcie ontologicznym[7]. Związki te są niekiedy bardzo skomplikowane, lecz opierają się na innych prostych związkach, takich jak związek współzachodzenia dwóch faktów (związek koniunkcji), związek niewspółzachodzenia dwóch faktów (związek dysjunkcji), związek niewspółniezachodzenia dwóch faktów (związek alternatywy), związek współniezachodzenia dwóch faktów (związek binegacji), związek zgodności dwóch faktów pod względem ich zachodzenia (związek równoważności), związek niezgodności dwóch faktów pod względem ich zachodzenia (związek alternatywy rozłącznej)[8].

Przy podejściu, w którym istności (fakty) traktuje się pozakategorialnie, można po stronie rzeczywistości wskazać bardzo ogólne relacje, które ujęte poznawczo, byłyby wyrażone przez tezy klasycznej logiki zdaniowej. Dla przykładu prawo symplifikacji dla koniunkcji stwierdza, że jeśli współzachodzą dwie istności, to każda z nich osobno też zachodzi. Prawo wyłączonego środka (ontologiczne) stwierdza, że z dwóch sprzecznych stanów rzeczy jeden zachodzi, czyli stwierdza związek niewspółzajścia faktu i niezajścia tegoż faktu. Z kolei prawo transpozycji stwierdza, że jeśli świat jest taki, że: jeśli

---

[5] K. Ajdukiewicz, *Zarys logiki*, Warszawa 1960, s. 5-6.

[6] E. Żarnecka-Biały, *Mała logika. Podstawy logicznej analizy tekstów, wnioskowania i argumentacji*, Kraków 1990, s. 38.

[7] S. Kiczuk, *Przedmiot logiki formalnej w ujęciu J. M. Bocheńskiego*, „Roczniki Filozoficzne", 46-47(1998-1999), z. 1, s. 86.

[8] Tenże, *Uwagi o przedmiocie logiki formalnej*, „Roczniki Filozoficzne", 43(1995), z. 1, s. 50.

p, to *q*, to świat jest taki, że jeśli *nie-q*, to *nie-p*. Na przykład jeśli świat jest taki, że jeśli ktoś zje trujące grzyby, to ma boleści brzucha, to świat jest taki, że jeśli ktoś nie ma boleści brzucha, to nie zjadł trujących grzybów[9]. Stałe logiczne zdaniowej logiki klasycznej znajdują więc jakieś odzwierciedlenie w samej rzeczywistości ujętej w badaniach o nastawieniu ontologicznym.

Zdaniem A. B. Stępnia[10], twierdzenia logiki formalnej można interpretować co najmniej dwojako: jako dotyczące związków pomiędzy stanami rzeczy (a więc tak, jak to wyżej przedstawiliśmy) lub jako dotyczące związków pomiędzy wyrażeniami językowymi. Ponieważ jednak metajęzykowym odpowiednikiem istnienia (zachodzenia) jest prawda, wydaje się, że te dwie interpretacje wcale się ze sobą nie kłócą. Wyżej wymienionym związkom między faktami odpowiadają (odpowiednio) w metajęzyku następujące związki: współprawdziwości dwóch zdań, niewspółprawdziwości dwóch zdań, niewspółfałszywości dwóch zdań, współfałszywości dwóch zdań, zgodności dwóch zdań pod względem prawdy i fałszu, niezgodności dwóch zdań pod względem prawdy i fałszu[11].

Wróćmy jeszcze do tezy Bocheńskiego, że logika klasyczna jest najogólniejszą teorią przedmiotów (ontologią bytów realnych i idealnych). Czy można ją pogodzić z poglądem Ajdukiewicza? Wydaje się, że tak, gdyż najogólniejsza teoria przedmiotów, w ujęciu Bocheńskiego, opisuje te przedmioty przez ich nadtranscendentalne cechy względne, czyli przez relacje do innych przedmiotów. Nie jest ona teorią cech wspólnych wszystkim bytom ani teorią aspektów bytu wykrywalnych przez analizę kategorii[12]. Można więc powiedzieć, że opisuje związki między przedmiotami, abstrahując w pewnym sensie od członów tych związków. Opisywane związki są tak ogólne, że zachodzą pomiędzy jakimikolwiek bytami (przedmiotami), zarówno realnymi, jak i idealnymi. Innymi słowy, funktory logiki klasycznej mają szerokie pole neutralności treściowej. Pojawiają się w dyskursach dotyczących wszelkich tematów, zarówno w języku codziennym, jak i w językach wszystkich dyscyplin naukowych[13].

---

[9] A. G r z e g o r c z y k, *Nieklasyczne rachunki zdań a metodologiczne schematy badania naukowego i definicje pojęć asertywnych*, „Studia Logica", 27(1971), s. 118.

[10] *Wprowadzenie do metafizyki*, Kraków 1964, s. 226.

[11] Z. K r a s z e w s k i, *Logika. Nauka rozumowania*, Warszawa 1984, s. 75-76.

[12] B o c h e ń s k i, *Logika*, s. 115.

[13] B. S t a n o s z, *Wprowadzenie do logiki formalnej. Podręcznik dla humanistów*, Warszawa 1998, s. 10 oraz J. H e r b u t, *Problem użyteczności logiki w uprawianiu filozofii*, w: *Filozofia – wzloty i upadki. XXXIX Tydzień Filozoficzny KUL*, red. A. Gudaniec, A. Nyga, Lublin 1998, s. 41.

Dodajmy, że logika klasyczna powstała w związku z badaniem bardzo ogólnych relacji zachodzących między przedmiotami realnymi. Taką koncepcję praw logiki reprezentował, jak się wydaje, G. Frege. Według tego znakomitego logika, prawa logiki klasycznej są najbardziej ogólnymi prawdami o rzeczywistości, tak fundamentalnymi, że żadne głębsze ich usprawiedliwienie nie jest możliwe[14]. Na ontologiczny punkt wyjścia logiki klasycznej zwraca uwagę A. Grzegorczyk. Pisze on: „W ujęciu klasycznym logika jest jakby najogólniejszą ontologią. Przyjmuje się, że refleksja ogólnoontologiczna jest wcześniejsza logicznie od refleksji metodologicznej czy teoriopoznawczej i stąd jest od tej drugiej niezależna, jako że stanowi podstawę dla niej i dla całej nauki o świecie"[15]. Prawa logiki klasycznej stwierdzają ogólne i obiektywne związki między stanami rzeczy, zdarzeniami, faktami.

Tej ostatniej tezy Grzegorczyka z pewnością nie można odnieść do logiki intuicjonistycznej. „Ontologię" wyznaczają tu nie stany rzeczy, lecz raczej różne matematyczne konstrukcje[16]. Dla intuicjonistów refleksja, którą można ogólnie nazwać teoriopoznawczą (lub metodologiczną), poprzedza wszelkie inne rozważania. A. Kołmogorow[17] stwierdza wprost, iż – według intuicjonistów – matematyka (logika) nie jest nauką badającą obiekty leżące na zewnątrz nas, lecz jest swoistą „działalnością" twórczą w zakresie budowania konstrukcji myślowych. Heyting podkreśla, że myśl matematyczna nie komunikuje prawd o świecie zewnętrznym, lecz zajmuje się wyłącznie konstrukcjami myślowymi. Przedmioty matematyczne nie istnieją niezależnie od naszej wiedzy o nich (ich *esse est concipi* albo lepiej: *construere*). Każde twierdzenie matematyczne jest – zdaniem Heytinga – stwierdzeniem, że została wykonana pewna konstrukcja matematyczna[18]. Logika natomiast została, według niego, wyabstrahowana z matematyki.

W celu ustaleń dotyczących przedmiotu logiki intuicjonistycznej przeanalizujmy za Heytingiem sposób, w jaki powstają prawa intuicjonistycznego rachunku zdań. W *Intuitionism* holenderski logik i matematyk dokonuje ana-

[14] Ø. L i n n e b o, *Frege's Conception of Logic: from Kant to „Grundgesetze"*, w: *11th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Volume of Abstracts*, Kraków 1999, s. 434.

[15] G r z e g o r c z y k, *Nieklasyczne rachunki*, s. 118, oraz t e n ż e, *Uwagi o rozumieniu praw logiki*, „Myśl Filozoficzna", 1(1955), s. 213-214.

[16] Zdaniem Bocheńskiego, logika Heytinga jest także przykładem systemu logicznego, który wciela i opracowuje pewne intuicje ontologiczne. Może być ona pojęta jako ontologia regionalna. Zob. B o c h e ń s k i, *Logika*, s. 130.

[17] *O matematyce*, Warszawa 1955, s. 83.

[18] H e y t i n g, *Intuitionism*, s. 3.

lizy genezy prawa sylogizmu warunkowego (w postaci koniunkcyjnej). Wprowadza tu następujące oznaczenia: przez A oznacza własność podzielności jakiejś liczby całkowitej przez 8, litera B oznacza własność podzielności tej liczby przez 4, a litera C oznacza własność podzielności tejże liczby przez 2. W dalszej kolejności Heyting wykonuje następującą konstrukcję matematyczną: zamiast $8a$ pisze $4\times2a$, którą to konstrukcję, tj. $4\times2a$, oznacza przez P. Na podstawie tej konstrukcji matematycznej widać, że własność A jakiejś liczby całkowitej pociąga za sobą własność B tejże liczby ($A \rightarrow B$). Następnie Heyting zamiast $4a$ pisze $2\times2a$. Tę ostatnią konstrukcję oznacza przez Q. Na podstawie tej konstrukcji dostrzega, że własność B pociąga za sobą własność C ($B \rightarrow C$). Poprzez wykonanie konstrukcji P, a potem konstrukcji Q (zestawiając obok siebie P i Q), otrzymujemy $8a = 2\times(2\times2a)$, pokazując w ten sposób, że $A \rightarrow C$. Ten tok postępowania pozostaje obowiązujący, jeżeli za A, B, C podstawimy inne dowolne własności. Tak więc, pisze Heyting, jeżeli konstrukcja P uwydatnia, że $A \rightarrow B$, i konstrukcja Q pokazuje, iż $B \rightarrow C$, to zestawienie P i Q uwydatnia, że $A \rightarrow C$. W ten sposób otrzymaliśmy twierdzenie logiczne[19].

Twierdzenie to – najogólniej rzecz ujmując – stwierdza, że „może być wykazane (istnieje efektywna procedura – w tym wypadku konstrukcja), że jeżeli może być wykazane, że jest tak, iż $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$, to może być wykazane, że jest tak, iż $(p \rightarrow r)$", a więc $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$. W świetle faktu, że zdania, które można podstawiać za zmienne p, q i r, opisują odpowiednio własności A, B i C, można powiedzieć, że w prawie tym są stwierdzane pewne zależności pomiędzy własnościami, ale stwierdzane na podstawie uprzednio dokonanych i poznanych myślowych konstrukcji matematycznych. Heyting pisze, że sposób, w jaki zostało wydedukowane to twierdzenie logiczne, wskazuje nam, że nie różni się ono istotnie od twierdzeń matematycznych. Po prostu to twierdzenie i każde inne twierdzenie logiczne jest twierdzeniem matematycznym największej ogólności[20].

W innym miejscu Heyting pisze, iż matematyczne wyrażenie: „2+2 = 3+1" powinno być traktowane jako skrót następującego twierdzenia: „wykonałem konstrukcje myślowe wskazane przez «2+2» oraz «3+1» i stwierdziłem, że prowadzą one do tego samego rezultatu"[21]. Wydaje się, że powyższe twierdzenie matematyczne stwierdza zależność pomiędzy własnościami liczby 4

[19] Tamże, s. 6.

[20] Tamże.

[21] Tamże, s. 8.

związanymi ze sposobami jej otrzymania, którą to zależność można dostrzec na podstawie dwóch wykonanych konstrukcji myślowych, gdzie przy konstruowaniu w grę wchodziły liczby naturalne (fundamentalne twory dla matematyki intuicjonistycznej).

W ramach krótkiej dygresji zauważmy, że Heyting i Brouwer mówią o tym, iż logika jest abstrakcją z matematyki, a prawa logiki intuicjonistycznej powstają na drodze, którą wyżej opisaliśmy, analizując teksty Heytinga. Faktem jest jednak, że logika intuicjonistyczna powstała nie w drodze abstrakcji z jakiejś konkretnej części matematyki (np. z arytmetyki, która była uważana przez intuicjonistów za naczelną dyscyplinę matematyczną), lecz zrodziła się na podstawie procedur stosowanych już dawniej przez logikę klasyczną. Heyting, jak wiadomo, przedstawił intuicjonistyczny rachunek zdań w postaci aksjomatycznej w taki sposób, aby nie było możliwe wyprowadzenie z aksjomatów prawa wyłączonego środka oraz mocnego prawa podwójnej negacji. Tak więc geneza praw logiki intuicjonistycznej wydaje się inna od tej, którą przedstawił Heyting na przykładzie prawa sylogizmu warunkowego. Bardziej konsekwentny byłby w tej mierze Brouwer, który odrzucając aksjomatyczną metodę konstruowania logiki, uważa, iż w zasadzie nigdy nie można być pewnym niezawodności ogólnych praw – każde podstawienie winno być oddzielnie sprawdzane przez odniesienie do faktycznie wykonanych konstrukcji matematycznych. Wszystkie prawa logiczne byłyby więc późniejsze (i zależne) od praw matematycznych.

Również w sprawie tego, co stwierdza twierdzenie matematyczne (prawo logiczne), a więc w kwestii przedmiotu logiki intuicjonistycznej, stanowisko Heytinga wydaje się niespójne. Jego programowe deklaracje teoretyczne zdają się bowiem kłócić z faktycznie podawanymi przykładami. Na stronie 3 *Intuitionism* oraz w wielu innych pracach Heyting pisze, iż twierdzenie matematyczne (logiczne) jest stwierdzeniem, że została wykonana pewna konstrukcja matematyczna. Tymczasem z odczytania symbolicznie zapisanego twierdzenia na stronie 8 można wnioskować, że w twierdzeniu tym jest stwierdzana z a l e ż n o ś ć między dwiema własnościami liczby 4, którą to zależność można dostrzec na podstawie dwóch wykonanych konstrukcji myślowych. To, że prawa matematyki intuicjonistycznej stwierdzają właśnie zależności między pewnymi własnościami, wynika także z analiz Heytinga ukazanych na stronie 6 *Intuitionism*.

Jeśli uwzględnić analizowany wyżej przykład Heytinga dotyczący sposobu otrzymania prawa sylogizmu warunkowego, to nie wydaje się właściwe stwierdzenie, iż logika intuicjonistyczna dotyczy „przeprowadzania dowolnych konstrukcji matematycznych"[22]. Przeprowadzaniem konstrukcji matematycznych zajmuje się matematyk-intuicjonista. W prawach zaś logiki intuicjonistycznej stwierdzane są – ogólnie mówiąc – pewne zależności pomiędzy dowolnymi własnościami (sposobami otrzymania) liczb, figur geometrycznych, zbiorów, które to zależności można dostrzec na podstawie wykonanych myślowych konstrukcji matematycznych. Na to ostatnie stwierdzenie naprowadzają również uwagi wypowiedziane przez holenderskiego logika na kongresie w Paryżu. Heyting zdaje się tu twierdzić, że prawa logiki intuicjonistycznej to prawa matematyczne bardzo ogólnej natury, mianowicie prawa o pewnych prostych operacjach na konstrukcjach[23]. Pojawiają się one wtedy, gdy logik intuicjonistyczny opisuje bardzo ogólne operacje na naszych myślowych konstrukcjach matematycznych. W analizowanym przez Heytinga przykładzie ogólną opisywaną operacją była operacja zestawiania konstrukcji P i Q obok siebie.

Można zatem powiedzieć, że prawa logiki intuicjonistycznej stwierdzają pewne regularności, pewne zależności, lecz z całą pewnością nie są to związki między obiektywnie istniejącymi przedmiotami. Prawa logiki intuicjonistycznej nie będą na pewno wyznaczone przez proste związki współzajścia, niewspółzajścia, niewspółniezajścia dwóch istniejących niezależnie od podmiotu faktów, zdarzeń itp. A. S. Troelstra takie regularności, których dotyczą prawa logiki intuicjonistycznej, nazywa lingwistycznymi[24]. Podstawą do takiego stwierdzenia są wypowiedzi Brouwera mówiące o tym, iż prawa logiki opisują regularności otrzymane w systemach językowych. Z kolei te językowe regularności zachodzą jedynie dlatego, że można wykonać odpowiednią konstrukcję matematyczną. Brouwer pisze też, że logika jest nauką o regułach „przejścia" od jednych zdań do innych, tj. od zdań zdających sprawę z wykonania pewnych konstrukcji do zdania o możliwości faktycznego wykonania innej konstrukcji matematycznej. Innymi słowy, prawa logiki są – według Brouwera – raportami z działalności matematyka. W miarę rozwoju wiedzy matematycznej mogą być odkrywane nowe metody przeprowadzania konstrukcji. Z tej racji „logika jest nauką empiryczną [...] powinna być badana tak jak etnografia"[25].

---

[22] G r z e g o r c z y k, *Nieklasyczne rachunki*, s. 119.

[23] A. H e y t i n g, *Logique et intuitionnisme. Actes du 2e colloque internationale de logique mathématique. Paris 1952*, Paryż 1954, s. 75-82.

[24] A. S. T r o e l s t r a, *The Interplay Between Logic and Mathematics: Intuitionism*, w: *Modern Logic – A Survey*, ed. E. Agazzi. Dordrecht 1981, s. 198.

[25] L. E. J. B r o u w e r, *On the Foundations of Mathematics*, w: t e n ż e, *Collected*

Jeśli uwzględnić powyższe wyniki, to wydaje się, że zależności stwierdzane przez prawa intuicjonistycznej logiki zdań można nazwać związkami pomiędzy odpowiednimi własnościami tworów matematycznych. Zależności te można stwierdzić, przeprowadzając ogólne operacje na wykonanych i poznanych myślowych konstrukcjach matematycznych. Należy też dodać, że z klasycznego punktu widzenia, obiekty matematyczne, pomiędzy którymi zachodzą owe związki stwierdzane w prawach logiki intuicjonistycznej, w swym istnieniu (własnościach?) zależą od podmiotu poznającego, od umysłu matematyka. Przy takim podejściu jasne staje się sformułowanie Heytinga, że przed wykonaniem konstrukcji nie ma jeszcze twierdzenia matematycznego, a więc także logicznego. Zrozumiała staje się też poniekąd teza Brouwera głosząca, iż logika ma charakter empiryczny.

Ważną rolę w poglądach Brouwera na matematykę i logikę odgrywa koncepcja kreatywnego (twórczego) podmiotu, nazywana też czasami teorią „wyidealizowanego matematyka”[26]. Ów wyidealizowany matematyk ma pamięć i dokonuje w czasie pewnych konstrukcji. Nie istnieje żaden świat obiektów matematycznych, który byłby niezależny od umysłu ludzkiego. Nie istnieją tym samym wieczne, niezależne od ludzkiej wiedzy prawdy, z których nieliczne byłyby odkrywane. Prawda może być ujawniona jedynie w umyśle poznającym. Brouwer bardzo mocno akcentuje znaczenie wolnej woli, docenia bowiem jej podstawową rolę w kreowaniu rzeczywistości, w konstruowaniu. Byt matematyczny widziany jest więc jako stała możliwość pewnych operacji myślowych. Nieskończony obiekt jest np. traktowany jako nieskończony proces bez ostatecznego rezultatu, w przeciwieństwie do matematyki klasycznej, która traktuje go tak, jakby był gotowy. Matematyk intuicjonistyczny wykonuje swą działalność w czasie, z którym związane jest wzrastanie wiedzy, poznawanie pewnych twierdzeń. Fakt ten powoduje temporalną relatywizację matematyki, niedopuszczalną dla matematyka klasycznego, dla intuicjonisty jednak bardzo naturalną[27]. Ponadto intuicjonistyczna matematyka nie może się odwoływać do pewnych pojęć, które Heyting nazywa pojęciami

Works, vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. A. Heyting, Amsterdam–Oxford–New York 1975, s. 74.

[26] T r o e l s t r a, *The Interplay*, s. 207 oraz A. A. F r a e n k e l, Y. B a r - H i l l e l, A. L e v y, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam–London 1973, s. 225.

[27] R. M i s z c z y ń s k i, *Filozoficzne źródła intuicjonizmu matematycznego L. E. J. Brouwera*, „Studia Filozoficzne”, 5(1989), s. 166. W literaturze podkreśla się, że mówiąc o matematyce intuicjonistycznej Brouwera-Heytinga, nie można nie abstrahować od relacji, jaka ją wiąże z umysłem, z podmiotem poznającym.

metafizycznymi, tzn. do świata przedmiotów matematycznych, istniejących niezależnie od naszej wiedzy[28].

W związku z tym, że matematyka i logika intuicjonistyczna nie dotyczą świata zewnętrznego, obiektywnie istniejącego, podstawowe pytanie intuicjonistów nie może być formułowane tak jak u badaczy o nastawieniu ontologicznym, którzy przyjmują klasyczny rachunek logiczny. U tego typu badaczy podstawowe są pytania: Jaki jest świat? Dlaczego coś jest takie, jakie jest? Intuicjoniści z kolei mogą pytać o to, jakie myślowe konstrukcje matematyczne mogą być wykonane w umyśle poznającego podmiotu ludzkiego, jakie zależności można dostrzec między własnościami, na przykład jakiejś liczby, na podstawie już wykonanych myślowych konstrukcji matematycznych.

Bodajże najważniejszą sprawą, jaka się wyłania w trakcie dotychczasowych rozważań, jest pytanie o kryteria konstrukcji matematycznej. Jakie są i skąd się biorą reguły konstrukcji? Czy są one intersubiektywne[29], a jeśli tak, to na jakiej podstawie? Co, oprócz postulatu wewnętrznej niesprzeczności, ogranicza swobodę konstrukcyjną matematyka intuicjonistycznego? Odpowiedzi na powyższe pytania są decydujące dla uznawania pewnych formuł za prawa matematyki i logiki intuicjonistycznej. Wśród intuicjonistów nie ma zgody co do rozumienia zakresu pojęcia konstrukcji matematycznej. Przyjrzyjmy się zatem rozwiązaniom kwestii genezy (skąd się biorą) i charakteru (np. czy są obiektywne, czy subiektywne) reguł konstrukcji proponowanym przez twórców intuicjonizmu oraz przez niektórych współczesnych autorów.

Wypowiedzi Brouwera w tej materii są niejasne. Pisze on na jednym miejscu, iż reguły ograniczające konstrukcję są wynikiem wewnętrznych praw myśli oraz zależą od swobodnej decyzji matematyka-intuicjonisty. Częściej jednak zarówno Brouwer, jak i Heyting mówią o intuicji jako o podstawie działalności konstrukcyjnej matematyka intuicjonistycznego. Dodają przy tym, iż matematyka jest indywidualną aktywnością umysłową. Tego typu wypowiedzi są dla wielu autorów piszących na ten temat podstawą do wskazywania na pewne subiektywne aspekty, jakie zdaje się wykazywać stanowisko intuicjonistyczne[30]. Dla przykładu M. H. Löb w następujący sposób charaktery-

[28] Heyting uważa ponadto, że prawa (środki dowodowe) logiki klasycznej wymagają metafizycznego uzasadnienia, tj. odwołania się do niezależnego od podmiotu istnienia przedmiotów matematycznych.

[29] Zagadnieniu intersubiektywności matematyki intuicjonistycznej poświęcona jest praca T. Placka *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity* (Dordrecht 1999).

[30] B. van R o o t s e l a a r, *On Subjective Mathematical Assertions*, w: *Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N.Y. 1968*, eds. A. Kino, J. Myhill, R. E. Vesley, Amsterdam–London 1970, s. 187.

zuje to stanowisko: „konstruktywizm w najszerszym sensie jest to tendencja do odczytania matematyki w terminach poznawczej oczywistości. W odróżnieniu od klasycznej matematyki, motywowanej przez naiwny platonizm, on [tj. konstruktywizm – B. C.] rozpatruje abstrakcyjne obiekty jako przedmioty myśli. Jako takie pojęcia konstruktywne są eksplikacjami szczegółowych struktur poznawczych"[31].

R. A. Bull[32] pisze, że podstawowa teza intuicjonizmu, głosząca, iż matematyka jest jakąś aktywnością określonego osobnika (aktywnością bez „metafizycznego" statusu), otwiera możliwość, że mogą się pojawić różni matematycy z różnymi teoriami matematycznymi. Wydaje się, że można by postawić jeszcze mocniejszą tezę – że każdy matematyk ma s w o j ą matematykę.

Według A. S. Troelstry, aktywność wyidealizowanego matematyka sama nie jest przedmiotem matematyki. Z tego powodu nie ma zgody co do tego, jak sprecyzować, które zasady są do przyjęcia, a które należy odrzucić[33]. Matematyka nie ma możności dostarczyć takich kryteriów. Jednakże działalność matematyka-intuicjonisty nie może być dowolna, w przeciwnym bowiem razie matematyka redukowałaby się do psychologicznej autobiografii jej twórcy. Co zatem mogłoby gwarantować istnienie jednej matematyki intuicjonistycznej?

W literaturze można znaleźć stwierdzenie, że prawdopodobnie współcześni intuicjoniści zgodziliby się z Kantem, iż twierdzenia matematyczne są obiektywne w tym sensie, że są ogólnie ważne dla wszystkich inteligentnych bytów[34]. Gdzie indziej jednak zdają się upatrywać podstawy tej obiektywności (a właściwie intersubiektywności).

Jest kwestią sporną, co dokładnie twórca intuicjonizmu, Brouwer, rozumie przez „wewnętrzne prawa myśli". Niektórzy autorzy zwracają uwagę na to, że nie wiadomo, jak należy interpretować stanowisko Brouwera w omawianej kwestii: czy zgodnie z linią kantowską, czy też w bardziej subiektywny sposób[35]. Faktem jest, że Brouwer nigdzie nie mówi o (kantowskich) apriorycznych kategoriach umysłowych, które byłyby wspólne wszystkim ludziom, a tym samym gwarantowałyby obiektywność wiedzy. Intersubiektywność

---

[31] M. H. L ö b, *Constructive Truth*, w: *Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam 1957*, ed. A. Heyting, Amsterdam 1959, s. 159.

[32] *MIPC as the Formalisation of an Intuitionist Concept of Modality*, „The Journal of Symbolic Logic", 31(1966), s. 611.

[33] T r o e l s t r a, *The Interplay*, s. 207.

[34] W. K n e a l e, M. K n e a l e, *The Development of Logic*, Oxford 1962, s. 674.

[35] T. P l a c e k, *On Brouwer's Criticism of Classical Logic and Mathematics*, „Logic and Logical Philosophy", 5(1997), s. 25.

matematyki nie wydaje się, według Brouwera, wynikiem pewnego ustrukturalizowania rozumu ludzkiego. Z drugiej jednak strony, wyjaśniając rozbieżności pomiędzy wynikami uzyskanymi przez różnych matematyków, a dotyczącymi tego samego problemu matematycznego, mówi, iż muszą być one (te rozbieżności) rezultatem luki w funkcjonowaniu intuicji, tzn. jeden z matematyków (lub obydwaj) „przestał być umysłem (mieć umysł)", jeśli bowiem coś jest umysłem, to ma zdolność nazwaną „intuicją matematyczną"[36].

Podstawą poznawczą matematyki intuicjonistycznej jest – według Brouwera i Heytinga – intuicja. Rozwiązanie to jednak nie jest satysfakcjonujące, gdyż nie istnieje tylko jedna intuicja, lecz wielość różnych intuicji. Właściwie można by powiedzieć, że każdy matematyk postępuje zgodnie ze swoją intuicją. Wobec tego rodzi się pytanie, która to intuicja, wobec ich wielości, stanowi prawdziwą podstawę matematyki. Ponieważ matematycy nie mogą wskazać obiektywnych kryteriów wyboru, z jednej strony rozlegają się głosy o subiektywnym charakterze wiedzy matematycznej, z drugiej zaś podejmowane są próby pewnego „zobiektywizowania" intuicji matematycznej.

Matematycy współcześni utrzymują powszechnie, że nie może być prawdziwe stwierdzenie, iż każdy matematyk ma swoją matematykę (chyba że wypowiedź ta znaczy po prostu repertuar twierdzeń, jakie ktoś osobiście odkrył lub udowodnił). Jednakże Brouwer, chcąc być konsekwentny, powinien był wyciągnąć taki wniosek. Faktycznie holenderski uczony w swoich poglądach filozoficznych był zwolennikiem solipsyzmu. M. Dummett jednak argumentuje za tezą, że Brouwer mógł zbudować swoją teorię wyłącznie dzięki temu, iż jego solipsyzm jest jawnie fałszywy[37]. Jego zdaniem, nie tylko nie jest tak, jak utrzymywał Brouwer, że konstrukcje matematyczne są jedynie niedoskonale komunikowalne, lecz także prawdą jest coś wręcz przeciwnego: są one doskonale komunikowalne. Wprawdzie poszczególni matematycy mogą mieć różne punkty wyjścia, różny zakres wiedzy, uzdolnienia, lecz nie różnią się pod względem ujęcia rzeczywistości matematycznej, gdyż bez względu na to, jaką konstrukcję odkryje jeden matematyk, każdy inny jest w stanie do niej dotrzeć. Z tego względu, dodaje Dummett, Brouwerowską teorię znaczenia można rozumieć nie w kategoriach jednostkowych konstrukcji mentalnych, lecz w kategoriach konstrukcji dostępnych dla wszystkich[38].

---

[36] Tamże.

[37] M. D u m m e t t, *Realizm i antyrealizm*, w: *Filozofia brytyjska u schyłku XX wieku*, red. P. Gutowski, T. Szubka, Lublin 1998, s. 79.

[38] Tamże.

Heyting, w przeciwieństwie do Brouwera, za pomocą formalizacji próbował w jakimś stopniu „zobiektywizować" intuicję matematyczną, ująć ją w pewne ramy. Uważał, iż matematyka, jeśli ma być nauką intersubiektywną, nie może być działalnością bezjęzykową (jak chciał Brouwer). Wręcz przeciwnie, musi posługiwać się językiem – wyrażeniem w słowach lub znakach konstrukcji mentalnych – gdyż „porozumienie między matematykami jest sprawą istotną"[39]. Oczywiście sama językowa komunikacja wyników matematycznych nie gwarantuje, że matematycy mogą wykonać takie same konstrukcje umysłowe. Podstaw intersubiektywności zdaje się on dopatrywać w fakcie (natury psychologicznej), iż ludzkie myśli są „analogiczne".

Wielość intuicji, na które powołują się różni matematycy, rodzi wśród współczesnych teoretyków intuicjonizmu próby ich uporządkowania, ustawienia w jakąś hierarchię, obejmującą na niższych piętrach intuicje dawne, dziś już zmatematyzowane, u szczytu zaś intuicje nowe, dziś nieredukowalne[40]. Owo matematyzowanie intuicji oznacza, jak się wydaje, ustalanie pewnych reguł, np. reguł dowodzenia. I tak Grzegorczyk utrzymuje, że podstawą intersubiektywności matematyki jest obliczalność dowodów. Gdyby nie było efektywnych metod sprawdzania, matematyka przestałaby być nauką intersubiektywną. Śledzenie dowodów matematycznych jest – jego zdaniem – czynnością czysto mechaniczną, a twórczego wysiłku wymaga jedynie na skutek skrótowego ich przedstawienia[41]. Ogólnie można chyba powiedzieć, że współcześni intuicjoniści (wbrew intencjom twórcy intuicjonizmu, Brouwera) dążą do formalizacji jak największej części matematyki intuicjonistycznej, tak aby jej wyniki stały się intersubiektywnie sprawdzalne, czyli aby każdy kompetentny mógł sprawdzić poprawność danej argumentacji czy dowodu.

Podsumowując, należy stwierdzić, że zarówno prawa logiki klasycznej, jak i logiki intuicjonistycznej stwierdzają pewnego typu związki. W wypadku logiki klasycznej prawa logiczne stwierdzają niektóre obiektywne, a zarazem najbardziej ogólne związki między stanami rzeczy, faktami, zdarzeniami.

---

[39] A. H e y t i n g, *Intuitionism in Mathematics*, w: *Philosophy in the Mid-Century. A Survey*, ed. R. Klibansky, Florence 1958, s. 103.

[40] Beth np., w wyniku analizy rozmaitych intuicji, dochodzi do wniosku, że matematyk musi przyjąć istnienie różnych „poziomów oczywistości". Zob. E. B e t h, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1959, s. 616. Sam Heyting, pod wpływem krytyki G. F. C. Grissa, w pracy *Blick von der intuitionistischen Warte*, „Dialectica", 12(1958), s. 332-345, przedstawia tabelę stopni oczywistości konstrukcyjnej.

[41] A. G r z e g o r c z y k, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1961, s. 362-364. Zauważmy jednak, że skoro Grzegorczyk opiera ostatecznie obliczalność na intuicji, a intuicji jest, jak wiadomo, bardzo wiele, to czy matematyka jest w ogóle intersubiektywna?

Istnienie takich związków intuicyjnie przyjmują przedstawiciele różnych nauk, uprawianych tylko przez takich uczonych, których charakteryzuje ontologiczne nastawienie badawcze w stosunku do przedmiotu badań. Tymczasem prawa logiki intuicjonistycznej stwierdzają związki, zależności pomiędzy odpowiednimi tworami matematycznymi czy własnościami tych tworów matematycznych na podstawie uprzednio wykonanych i poznanych matematycznych konstrukcji myślowych. Przedmiotem logiki intuicjonistycznej nie są więc (same) myślowe konstrukcje matematyczne, jak głoszą niektórzy autorzy, lecz raczej związki pomiędzy odpowiednimi własnościami liczb, figur, zbiorów, które to związki można dostrzec tylko na podstawie wykonanych myślowych konstrukcji matematycznych. U zwolenników logiki intuicjonistycznej nie wchodzi w grę ontologiczne, obiektywistyczne podejście badawcze w stosunku do rzeczywistości. Związki, których dotyczą prawa logiki intuicjonistycznej, nie dają się scharakteryzować językowo bez mówienia o określonych zabiegach poznawczych.

BIBLIOGRAFIA

Ajdukiewicz K., *Zarys logiki*, Warszawa 1960.

Beth E., *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1959.

Bocheński J. M., *Logika i ontologia*, w: tenże, *Logika i filozofia*, red. J. Parys, Warszawa 1993, s. 106-132.

Brouwer L. E. J., *On the Foundations of Mathematics*, w: tenże, *Collected Works*, vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, ed. A. Heyting, Amsterdam–Oxford–New York 1975, s. 11-97.

Bull R. A., *MIPC as the Formalisation of an Intuitionist Concept of Modality*, „The Journal of Symbolic Logic", 31(1966), s. 609-616.

Dummett M., *Realizm i antyrealizm*, w: *Filozofia brytyjska u schyłku XX wieku*, red. P. Gutowski, T. Szubka, Lublin 1998, s. 67-86.

Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y., Levy A., *Foundations of Set Theory*, Amsterdam–London 1973.

Grzegorczyk A., *Nieklasyczne rachunki zdań a metodologiczne schematy badania naukowego i definicje pojęć asertywnych*, „Studia Logica", 27(1971), s. 117-130.

Grzegorczyk A., *Uwagi o rozumieniu praw logiki*, „Myśl Filozoficzna", 1(1955), s. 213-214.

Grzegorczyk A., *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1961.

Herbut J., *Problem użyteczności logiki w uprawianiu filozofii*, w: *Filozofia – wzloty i upadki. XXXIX Tydzień Filozoficzny KUL*, red. A. Gudaniec, A. Nyga, Lublin 1998, s. 39-41.

Heyting A., *Blick von der intuitionistischen Warte*, „Dialectica", 12(1958), s. 332-345.

Heyting A., *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam 1966.

Heyting A., *Intuitionism in Mathematics*, w: *Philosophy in the Mid-Century. A Survey*, ed. R. Klibansky, Florence 1958, s. 101-115.

H e y t i n g A., *Logique et intuitionnisme. Actes du 2e colloque internationale de logique mathematique. Paris 1952*, Paryż 1954, s. 75-82.
K i c z u k S., *Przedmiot logiki formalnej w ujęciu J. M. Bocheńskiego*, „Roczniki Filozoficzne", 46-47(1998-1999), z. 1, s. 69-87.
K i c z u k S., *Uwagi o przedmiocie logiki formalnej*, „Roczniki Filozoficzne", 43(1995), z. 1, s. 41-52.
K n e a l e W., K n e a l e M., *The Development of Logic*, Oxford 1962.
K o ł m o g o r o w A., *O matematyce*, Warszawa 1955.
K r a s z e w s k i Z., *Logika. Nauka rozumowania*, Warszawa 1984.
L i n n e b o Ø., *Frege's Conception of Logic: from Kant to „Grundgesetze"*, w: *11th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Volume of Abstracts*, Kraków 1999, s. 134.
L ö b M. H., *Constructive Truth*, w: *Constructivity in Mathematics. Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam 1957*, ed. A. Heyting, Amsterdam 1959, s. 159-168.
M i s z c z y ń s k i R., *Filozoficzne źródła intuicjonizmu matematycznego L. E. J. Brouwera*, „Studia Filozoficzne", 5(1989), s. 159-171.
P l a c e k T., *On Brouwer's Criticism of Classical Logic and Mathematics*, „Logic and Logical Philosophy", 5(1997), s. 19-33.
R o o t s e l a a r B. van, *On Subjective Mathematical Assertions*, w: *Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N. Y. 1968*, eds. A. Kino, J. Myhill, R. E. Vesley, Amsterdam–London 1970, s. 187-195.
S t a n o s z B., *Wprowadzenie do logiki formalnej. Podręcznik dla humanistów*, Warszawa 1998.
S t ę p i e ń A. B., *Wprowadzenie do metafizyki*, Kraków 1964.
T r o e l s t r a A. S., *The Interplay Between Logic and Mathematics: Intuitionism*, w: *Modern Logic – A Survey*, ed. E. Agazzi, Dordrecht 1981, s. 197-221.
Ż a r n e c k a - B i a ł y E., *Mała logika. Podstawy logicznej analizy tekstów, wnioskowania i argumentacji*, Kraków 1990.

EINIGE ANMERKUNGEN ZUM GEGENSTAND DES INTUITIONISTISCHEN AUSSAGENKALKÜLS

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dem Artikel wird versucht, die Frage zu beantworten, was den Gegenstand des intuitionistischen Aussagenkalküls bildet. Die Erwägungen basieren auf den Veröffentlichungen von den Gründern des Intuitionismus, vor allem auf Heyting. Im Hintergrund werden auch Anmerkungen gemacht betreffend des Gegenstandes der klassischen Logik. Die Gesetze der klassischen Aussagenlogik stellen einige objektive und zugleich allgemeinste Zusammenhänge zwischen Sachverhalten, Tatsachen, Begebenheiten fest. Die Existenz solchen Zusammenhänge nehmen die Denker an, welche die ontologische Stellungnahme kennzeichnet. Die Gesetze des intuitionistischen Aussagenkalküls dagegen stellen Zusammenhänge zwischen mathematischen Konstruktionen oder Eigenschaften dieser Konstruktionen auf Grund von den vorher gebildeten und untersuchten mentalen mathematischen Konstruktionen fest.

Zusammengefaßt von Bożena Czernecka

Słowa kluczowe: logika, filozofia logiki, filozofia matematyki, intuicjonizm, Heyting
Key words: logic, philosophy of logic, philosophy of mathematics, intuitionism, Heyting