ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom L, zeszyt 3 – 2002

KS. JERZY DADACZYŃSKI

CZY GOTTLOB FREGE PIERWSZY ZDEFINIOWAŁ LICZBY NATURALNE?

Zazwyczaj w literaturze podaje się, że pierwszym, który poprawnie zdefiniował liczby naturalne, był niemiecki logik z Jeny – Gottleb Frege. Wskazuje się przy tym na jego dzieło *Die Grundlagen der Arithmetik* z 1884 r. Liczby naturalne zostały w nim określone jako zbiory pojęć z równolicznymi ekstensjami[1]. Niezależnie od G. Fregego zdefiniował liczby naturalne w 1903 r. B. Russell. W jego ujęciu liczby naturalne to zbiory równolicznych zbiorów[2].

Zarówno G. Frege, jak i B. Russell zdefiniowali liczby naturalne w celu zrealizowania programu logicyzmu, a więc wyprowadzenia arytmetyki liczb naturalnych, a w konsekwencji całej matematyki XIX-wiecznej z logiki[3]. Zdefiniowanie liczb naturalnych w kategoriach teoriomnogościowych stanowiło milowy krok w próbie realizacji wspomnianego programu. Równocześnie pierwsza zadowalająca odpowiedź na pytanie, czym są liczby naturalne, była niezwykle doniosła dla zasadniczego działu filozofii, jakim jest

Ks. dr JERZY DADACZYŃSKI – PAT Kraków; adres do korespondencji: ul. Łagiewnicka 17, 41-500 Chorzów.

[1] Por. G. F r e g e, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884, par. 68.

[2] Por. B. R u s s e l l, *The Principles of Mathematics*, Cambridge 1903, par. 111. Należy pamiętać, że pojęcie zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem generuje antynomię. Dlatego w aksjomatycznych ujęciach teorii mnogości nakłada się specjalne ograniczenia, które pozwalają uniknąć antynomii zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z danym zbiorem.

[3] Jeśli teorię mnogości, czyli zbiorów (skończonych i nieskończonych), ujmuje się jako odrębną naukę, nie będącą działem logiki, to trzeba mówić o sprowadzeniu arytmetyki liczb naturalnych nie do logiki, lecz do teorii mnogości (por. L. B o r k o w s k i, *Logika formalna*, Warszawa 1970, s. 235).

ontologia. Jak ważne było to pytanie dla wielu filozofów, może świadczyć chociażby to, że w istocie dwa wielkie systemy filozoficzne – Platona i I. Kanta powstały w dużej mierze po to, by wyjaśnić ontologię liczb naturalnych.

Celem niniejszego opracowania jest jednak pokazanie, że już 50 lat przed opublikowaniem przez G. Fregego *Die Grundlagen der Arithmetik*, w latach trzydziestych XIX w., działający w Pradze niemieckojęzyczny filozof, matematyk, logik i teolog B. Bolzano (1781-1848) zdefiniował w stylu fregowsko-russellowskim liczby naturalne[4].

B. Bolzano nie jest postacią nie znaną w dziejach matematyki, logiki i filozofii. Jako pierwszy, jeszcze przed A. Cauchym, podał on definicję pojęcia granicy, czym przyczynił się do arytmetyzacji podstaw analizy. Antycypował wiele pojęć współczesnej logiki, jak: prawda, konsekwencja, sprzeczność i prawdopodobieństwo. Był również, jeszcze przed G. Cantorem, prekursorem teorii mnogości, podając jako pierwszy definicję zbioru nieskończonego jako równolicznego ze swoim podzbiorem właściwym[5].

Wspomniany dorobek B. Bolzano zawarty jest w jego znanych, opublikowanych za życia lub tuż po śmierci dziełach *Wissenschaftslehre* (1837) oraz *Paradoxien des Unendlichen* (1851). Natomiast definicja liczb naturalnych B. Bolzano była do niedawna zupełnie nie znana. Wynikało to stąd, że zawarta ona była w manuskrypcie praskiego autora zatytułowanym *Reine Zahlenlehre*, napisanym w latach trzydziestych XIX w. i nie publikowanym do 2. poł. XX w. Manuskrypt ten, zawierający teorię liczb naturalnych, teorię liczb wymiernych i teorię liczb rzeczywistych[6], przechowywany

[4] Jako pierwszy na Bolzanowską definicję liczb naturalnych zwrócił uwagę szwedzki logik i filozof pracujący na Uniwersytecie Technicznym w Monachium J. Berg, jeden z najbardziej znanych badaczy dorobku B. Bolzano (por. J. B e r g, *Einleitung des Herausgebers*, [w:] B. B o l z a n o, *Reine Zahlenlehre*, hrsg. v. J. Berg, Stuttgart–Bad Cannstatt 1976, s. 8; J. B e r g, *Einleitung des Herausgebers*, [w:] B. B o l z a n o, *Wissenschaftslehre*, par. 223-268, hrsg. v. J. Berg, Stuttgart–Bad Cannstatt 1988, s. 24 n.). Niniejszy artykuł oparty został na spostrzeżeniach J. Berga.

[5] Por. W. M a r c i s z e w s k i, *Bernard Bolzano*, [w:] *Mała Encyklopedia Logiki*, Wrocław 1988^2, s. 26.

[6] Teorie liczb rzeczywistych zostały zbudowane w 2. poł. XIX w. przez K. Weierstrassa, Ch. Meraya, R. Dedekinda i G. Cantora. Próba B. Bolzano, podjęta w ostatnim rozdziale *Reine Zahlenlehre*, zbudowania systemu liczb rzeczywistych na czysto arytmetycznej podstawie wskazuje, że może być on traktowany jako poprzednik wspomnianych matematyków.

Przy obliczeniach z tzw. nieskończonymi pojęciami wielkościowymi (*unendlichen Größenbegriffen*) robił B. Bolzano użytek z operacji na wielkościach wymiernych. Jest to w Austriackiej Bibliotece Narodowej w Wiedniu pod sygnaturą S.n. 3469[7], doczekał się pierwszej publikacji dopiero w 1976 r. w ramach edycji dzieł wszystkich B. Bolzano[8]. I właśnie wydawca *Reine Zahlenlehre* J. Berg zwrócił jako pierwszy uwagę na zawartą w tym dziele definicję liczb naturalnych B. Bolzano[9].

Praski matematyk dokonał najpierw podziału pomiędzy konkretnymi i abstrakcyjnymi liczbami naturalnymi: „Utwórzmy sobie pewien *szereg*, którego pierwszym członem jest pewna jednostka dowolnego rodzaju A, a każdy inny człon jest pewną sumą, która zjawia się, kiedy pewien przedmiot, który poprzedniemu członowi jest równy, zwiążemy z pewną nową jednostką rodzaju A: tak stanowi dla mnie każdy człon tego szeregu pewną *liczbę*, jeśli myślę sobie ten człon ujęty przez pewne przedstawienie, które podaje nam sposób jej powstania. Dla odróżnienia od innych szeregów, które zjawiają się, kiedy zamiast przedmiotów rodzaju A przedmioty jakiegoś innego rodzaju jako jednostka są wzięte, nazywam człony wcześniej wspomnianego szeregu *liczbami rodzaju A*, u których *podstaw leży jednostka A*. Cechę, na mocy której każdy ten człon staje się pewną liczbą (którą on więc zachowuje, kiedy same przedmioty, które się jako jednostki bierze, chciałyby być zmienione), nazywam *liczbą* w *abstrakcyjnym znaczeniu* tego słowa albo *abstrakcyjną liczbą* i w przeciwieństwie do takich liczb abstrakcyjnych (tj. gołych cech) nazywam te człony same *konkretnymi* liczbami lub liczbami w konkretnym znaczeniu tego słowa. Te konkretne liczby są w niemieckim także nazywane, z wyjątkiem pierwszej albo jednostki, *Anzahl*. Wreszcie cały szereg nazywam *szeregiem liczbowym* albo dla odróżnienia od innych

poprawne tak długo, jak długo przyjmuje się, że „nieskończone pojęcia wielkościowe" mogą być identyfikowane z ciągami liczb wymiernych. Przy tej precyzyjnej interpretacji podstawowych pojęć B. Bolzano niektóre twierdzenia jego teorii liczb rzeczywistych są fałszywe. Jeśli natomiast próbuje się istotne twierdzenia Bolzanowskiej teorii ratować poprzez to, że po prostu zastępuje się jego pojęcia przez takie, które powstały w nowocześniejszych teoriach, wtedy Bolzanowskie pojęcia podstawowe pozostają nie wyjaśnione (por. B e r g, *Einleitung des Herausgebers*, [w:] B o l z a n o, *Reine Zahlenlehre*, s. 8).

[7] Por. tamże, s. 7.

[8] Por. B o l z a n o, *Reine Zahlenlehre*.

[9] Por. B e r g, *Einleitung des Herausgebers*, [w:] B o l z a n o, *Reine Zahlenlehre*, s. 8.

szeregów, których członami są również liczby, *naturalnym szeregiem liczb*, albo za niektórymi również *szeregiem liczb naturalnych*"[10].

Na podstawie przytoczonego tekstu można sprecyzować, czym są liczby konkretne i liczby abstrakcyjne w ujęciu B. Bolzano. Konkretna liczba względem pewnego określonego rodzaju A (A-liczba) jest członem szeregu, który buduje się w następujący sposób: jako pierwszy człon wybiera się dowolny przedmiot rodzaju A, a każdy następny człon jest zbiorem, który powstaje ze swojego poprzednika przez dodanie nowego przedmiotu danego rodzaju A. Natomiast abstrakcyjna A-liczba konkretnej A-liczby L jest cechą, której zakresem jest zbiór wszystkich konkretnych, równolicznych z L A-liczb[11]. Zastępując słowo „cecha" (*Beschaffenheit*) słowem „zbiór", otrzymuje się bardziej współczesną definicję: abstrakcyjna A-liczba konkretnej A-liczby L jest zbiorem wszystkich konkretnych, równolicznych z L A-liczb.

Oprócz tego wprowadził B. Bolzano w *Reine Zahlenlehre* inny podział liczb naturalnych – na liczby nazwane (*benannte*) i nienazwane (*unbenannte*): „Jeśli rodzaj przedmiotów, które powinny być traktowane jako jednostki, są podane równocześnie w przedstawieniu liczby, to chcemy je nazywać nazwanym przedstawieniem liczby albo (według wspomnianej w poprzednim paragrafie metonimii) także nazwaną liczbą samą; natomiast w przeciwnym razie, kiedy rodzaj przedmiotów, które powinny być trak-

---

[10] „Bilden wir uns eine *Reihe*, deren erstes Glied [ein]e Einheit beliebiger Art A, jedes andere Glied [a]ber eine Summe ist, welche zum Vorschein kommt, indem [wi]r einen Gegenstand, der dem nächstvorhergehenden [G]liede gleich ist, mit einer neuen der Art A verbinden: so heißt mir ein jedes Glied dieser Reihe insofern eine *Zahl*, als [ic]h mir dieses Glied durch eine Vorstellung aufgefaßt denke, welche uns seine Entstehungsart angibt. Zur Unterscheidung von anderen Reihen, welche zum Vorschein kommen, wenn statt der Dinge von der Art A Dinge von einer anderen Art zur Einheit angenommen werden, nenne ich die Glieder der vorhin betrachteten Reihe *Zahlen von der Art A* oder Zahlen, denen *die Einheit A zu Grunde liegt.* Die Beschaffenheit, vermöge deren ein jedes dieser Glieder zu einer Zahl wird (die es somit behält, wie auch die Gegenstände selbst, die man zu Einheiten annimt, gewechselt werden mögen) nenne ich eine *Zahl* in der *abstracten Bedeutung* des Wortes, oder eine *abstracte Zahl*; und im Gegensatz mit solchen abstracten Zahlen (d.h. den bloßen Beschaffenheiten) nenne ich die Glieder selbst *concrete* Zahlen oder Zahlen in der *concreten* Bedeutung des Wortes. Diese concret[e]n Zahlen werden in Deutschen, besonders mit Ausnahme der ersten oder der Einheit, auch *Anzahlen* genannt. Endlich die ganze Reihe selbst nenne ich die *Zahlenreihe*, oder zum Unterschiede von anderen Reihen, deren Glieder ebenfalls Zahlen sind, die *natürliche Reihe der Zahlen,* oder mit Einigen auch *die Reihe der natürlichen Zahlen*" (B o l z a n o, *Reine Zahlenlehre*, s. 15).

[11] Por. B e r g, *Einleitung des Herausgebers*, [w:] B o l z a n o, *Wissenschaftslehre*, par. 223-268, s. 24 n.

towane jako jednostki, jest pozostawiony jako nieokreślony, chcemy je nazywać nienazwaną liczbą albo nienazwanym przedstawieniem liczbowym. I tak na przykład pojęcie trzy jest nienazwanym, natomiast pojęcie trzech punktów nazwanym pojęciem liczbowym. Nienazwana liczba i abstrakcyjna liczba są przez niektórych traktowane jako tożsame. Tego poglądu nie mogę jednak podzielić"[12].

Ostatnia uwaga B. Bolzano wskazuje na to, że nie uważał on, iż zbiór liczb nienazwanych i zbiór liczb abstrakcyjnych pokrywają się. Znaczy to, że podziały na liczby konkretne i abstrakcyjne z jednej strony oraz na liczby nazwane oraz nienazwane z drugiej strony przecinają się[13]. Dlatego można mówić o liczbach abstrakcyjnych nienazwanych w koncepcji B. Bolzano.

Uwagi sformułowane przez B. Bolzano wskazują, iż każdą liczbę odniesioną do jakiegokolwiek rodzaju A nazywał on „liczbą nazwaną". Natomiast akt abstrakcji od rodzaju A dowolnej nazwanej liczby daje odpowiednią liczbę nienazwaną. Ta ostatnia teza w połączeniu z wcześniej sformułowanym określeniem abstrakcyjnej nazwanej A-liczby konkretnej nazwanej A-liczby L daje Bolzanowską definicję abstrakcyjnej nienazwanej liczby konkretnej nienazwanej liczby L. Mianowicie abstrakcyjna nienazwana liczba pewnej konkretnej nienazwanej liczby L to cecha, której zakresem jest zbiór wszystkich konkretnych, nienazwanych i równolicznych z L liczb. Ponownie zastępując w tym ostatnim określeniu termin „cecha" słowem „zbiór", otrzymuje się następującą Bolzanowską definicję: abstrakcyjna nienazwana liczba pewnej konkretnej nienazwanej liczby L to zbiór wszystkich konkretnych, nienazwanych i równolicznych z L liczb.

W ten sposób analiza tekstów *Reine Zahlenlehre* B. Bolzano prowadzi do wniosku, że był on bardzo bliski Fregowskiej i Russelowskiej koncepcji liczb kardynalnych. Zwykle formułuje się pogląd, iż zdefiniowanie przez

---

[12] „Wenn die Art der Dinge, welche als Einheiten betrachten werden sollen, in einer Zahlenvorstellung gleichfalls mit angegeben ist, so wollen wir sie eine *benannte* Zahlenvorstellung oder (nach der im vorigen Paragraph erwähnten Metonymie) auch eine benannte Zahl selbst; im widrigen Falle dagegen, wenn die Art der Dinge, welche als Einheiten betrachten werden sollen, unbestimmt gelassen ist, eine *unbenannte Zahl*, oder *Zahlenvorstellung* nennen. So ist z.B. der Begriff Drey, ein unbenannter, der Begriff drey Punkte aber ein benannter Zahlenbegriff. Die *unbenannte* Zahl und die *abstracte* Zahl werden von Einigen für einerley ausgegeben. Dieser Ansicht aber kann ich nicht beytreten" (B o l z a n o, *Reine Zahlenlehre*, s. 23).

[13] Por. B e r g, *Einleitung des Herausgebers*, [w:] B o l z a n o, *Wissenschaftslehre*, par. 223-268, s. 24.

G. Fregego pojęcia liczby kardynalnej, liczby elementów zbioru, za pomocą pojęć logicznych stanowi jedno z najważniejszych osiągnięć logiki formalnej. Dodaje się przy tym, że pojęcie to stanowiło w ciągu wieków przedmiot wielu analiz filozoficznych, ale dopiero G. Fregemu udało się znaleźć właściwe rozwiązanie zagadnienia definicji pojęcia liczby[14]. Niniejszy artykuł pokazuje jednak, że Bolzanowska definicja abstrakcyjnej nienazwanej liczby, wcześniejsza o 50 lat od koncepcji G. Fregego, również oparta na pojęciu równoliczności (w istocie: zbiorów) przynajmniej leży na tej samej linii rozwojowej, co późniejsze definicje G. Fregego i B. Russella.

Inaczej jednak niż dwie późniejsze koncepcje definicja B. Bolzano pozostała zupełnie nie znana. Jest to wynik nałożenia się dwu przyczyn. W swoich dalszych pracach B. Bolzano nie posługiwał się pojęciem abstrakcyjnej nienazwanej liczby, lecz konkretnej i nienazwanej. Poza tym jego arytmetyka zawarta w *Reine Zahlenlehre* przeleżała prawie zupełnie nie znana w bibliotece wiedeńskiej aż do czasu pierwszej publikacji dopiero w 1976 r. Natomiast definicje liczb G. Fregego i B. Russella zostały natychmiast opublikowane. Poza tym stanowiły one bardzo ważny element realizacji przez tych uczonych idei logicyzmu, bardzo popularnej na przełomie XIX i XX w.

Konkludując stwierdzamy, że w pracach B. Bolzano można znaleźć właściwe rozwiązania zagadnień definicji liczby naturalnej, a także zbioru nieskończonego. Były to niezwykle znaczące pojęcia tworzonej dopiero kilka dziesięcioleci po śmierci praskiego matematyka i filozofa teorii mnogości i realizowania idei logicyzmu. Jeśli doda się do tego, że B. Bolzano był autorem definicji granicy i próbował zbudować na podstawie liczb wymiernych teorię liczb rzeczywistych, co stanowiło fundament arytmetyzacji XIX-wiecznej matematyki, a więc niezbędnego warunku realizacji programu logicyzmu, to rysuje się na tym polu program dalszych badań. Będzie w nim chodziło o udzielenie odpowiedzi na pytanie, czy dorobek B. Bolzano nie zawiera w sobie próby antycypacji realizacji programu logicyzmu. Jest to tym bardziej prawdopodobne, że B. Bolzano był pod znacznym wpływem G. W. Leibniza[15], pierwszego twórcy idei logicyzmu.

---

[14] Por. B o r k o w s k i, dz. cyt., s. 208.

[15] J. D a n e k, *Weiterentwicklung der Leibnizschen Logik bei Bolzano*, Meisenheim am Glan 1970.

BIBLIOGRAFIA

B e r g J.: Einleitung des Herausgebers, [w:] B. B o l z a n o, Reine Zahlenlehre, hrsg. v. J. Berg, Stuttgart–Bad Cannstatt: Friedrich Frommann Verlag (Günther Holzboog) 1976, s. 7-9.
– Einleitung des Herausgebers, [w:] B. B o l z a n o, Wissenschaftslehre, par. 223-268, hrsg. v. J. Berg, Stuttgart–Bad Cannstatt: Friedrich Frommann Verlag (Günther Holzboog) 1988, s. 7-44.
B o l z a n o B.: Reine Zahlenlehre, hrsg. v. J. Berg, Stuttgart–Bad Cannstatt: Friedrich Frommann Verlag (Günther Holzboog) 1976.
B o r k o w s k i L.: Logika formalna, Warszawa: PWN 1970.
D a n e k J., Weiterentwicklung der Leibnizschen Logik bei Bolzano, Meisenheim am Glan: Hain 1970.
F r e g e G.: Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884.
M a r c i s z e w s k i W.: Bernard Bolzano, [w:] Mała Encyklopedia Logiki, Wrocław: „Ossolineum" 1988^2, s. 26.
R u s s e l l B.: The Principles of Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press 1903.

HAT GOTTLOB FREGE ALS ERSTER DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN DEFINIERT?

Z u s a m m e n f a s s u n g

Gewöhnlich wird es behauptet, daß die natürlichen Zahlen zum ersten Male von G. Frege (1884) und unabhängig davon, von B. Russell (1903) definiert wurden. Dieser Artikel, welcher auf den Wahrnehmungen des berühmten Forschers des Lebenswerks von B. Bolzano, J. Berg, basiert, erweist, daß der Philosoph und Mathematiker aus Prag, schon in der dreißiger Jahren des XIX. Jahrhunderts über seine Definition der natürlichen Zahlen – der sogenannten abstrakten, unbenannten Zahlen – verfügt hat. Die Begriffsbestimmung von B. Bolzano steht auf derselben Entwicklungslinie wie die Konzeption von G. Frege und B. Russell, weil sie auf dem Begriff der Gleichzähligkeit der Mengen basiert. Die Konzeption von B. Bolzano, bezüglich der natürlichen Zahlen, ist aber unbekannt geblieben, weil er seine Arithmetik nicht auf dem Begriff der abstrakten unbenannten Zahlen gestützt hat. Außerdem wurde das Manuskript *Reine Zahlenlehre* bis zum Jahre 1976 nicht publiziert.

Zusammengefaßt von Jerzy Dadaczyński

Słowa kluczowe: liczby naturalne, definicje liczb naturalnych.

Key words: natural numbers, definition of natural numbers.