A R T Y K U Ł Y

ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom L, zeszyt 3 – 2002

KS. JERZY DADACZYŃSKI

KONCEPCJA NIESKOŃCZONOŚCI W ANTYCZNEJ MATEMATYCE I FILOZOFII

Twórca jednego z największych systemów filozoficznych starożytności – Arystoteles – poświęcił sporo uwagi filozofii matematyki. W zakresie ontologii matematyki zajął stanowisko realizmu umiarkowanego, a zdaniem niektórych współczesnych interpretatorów nawet stanowisko konceptualizmu. Była to więc koncepcja odmienna od tej, jaką zaprezentował jego nauczyciel Platon, który był skrajnym realistą. Jeśli chodzi o kwestię źródeł poznania matematycznego, to w przeciwieństwie do Platona, opowiadającego się za aprioryzmem, był Arystoteles zwolennikiem empiryzmu genetycznego. Położył on bardzo duże zasługi dla pojmowania matematyki jako systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego. Nie traktował matematyki jako zbioru nie powiązanych twierdzeń, ale właśnie jako zbiór twierdzeń powiązanych, dedukowalnych z niewielkiej liczby twierdzeń wyjściowych. Na koncepcji Arystotelesa wzorował się twórca pierwszego zachowanego systemu geometrycznego – Euklides, żyjący wiek po Arystotelesie, który przedstawił swą geometrię też jako system aksjomatyczno-dedukcyjny. Stagiryta swój pomysł budowy systemów aksjomatyczno-dedukcyjnych zrealizował budując sylogistykę zdań asertorycznych oraz sylogistykę zdań modalnych. Będąc twórcą pierwszych teorii logicznych, nie powiązał ich jednak z matematyką, jak chociażby G. W. Leibniz, który stanął na stanowisku logicyzmu. Kierunek

Ks. dr JERZY DADACZYŃSKI – PAT Kraków; adres do korespondencji: ul. Łagiewnicka 17, 41-500 Chorzów.

ten prezentował pogląd, iż matematyka jest wyprowadzalna z logiki, tzn. terminy pierwotne matematyki można zdefiniować za pomocą terminów logicznych, aksjomaty matematyki zaś można wyprowadzić z twierdzeń logiki. U Arystotelesa niektórzy interpretatorzy, uważający jego ontologię matematyki za zbliżoną do konceptualizmu, doszukują się również hipotetyzmu w kwestii wartości wyników uzyskiwanych w matematyce. Jest to pogląd przeciwny apodyktyzmowi, utrzymujący, iż wyniki matematyki są tylko warunkowo prawdziwe, jako konieczne następstwa wydedukowane z pierwszych przesłanek, które są tylko hipotezami (wzajemnie niesprzecznymi). Takie stanowisko byłoby metateoretyczną antycypacją wielości nierównoważnych aksjomatyk tych samych dyscyplin matematyki. To stanowisko pozwala na przykład zaakceptować, obok geometrii euklidesowej, również geometrie nieeuklidesowe[1].

Już ten pobieżny przegląd wskazuje, jak wszechstronny i nowatorski był wkład Stagiryty w zakresie filozofii matematyki. Znany jest on jednak również stąd, że podjął, palące w matematyce antycznej, szczegółowe zagadnienie z zakresu ontologii matematyki, mianowicie zagadnienie nieskończoności. Z matematycznymi problemami dotyczącymi nieskończoności Arystoteles został zapoznany przez jednego z najwybitniejszych matematyków starożytności, Eudoksosa[2].

---

[1] Nie jest wykluczone, że w starożytności, już za czasów Arystotelesa, były znane elementy geometrii, które później nazwano nieeuklidesowymi. I. Tóth (*Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum*, „Archive for History of Exact Sciences", 1967, vol. 3, s. 249-422), opierając się właśnie na analizie niektórych tekstów Arystotelesa, doszedł do wniosku, iż najpóźniej w IV w. przed Chrystusem zajmowano się systemami geometrycznymi, w których suma kątów trójkąta nie była równa dwóm kątom prostym, lecz większa lub mniejsza od tej wielkości.

[2] Eudoksos z Knidos (406-354) żył współcześnie z Arystotelesem. Matematyki uczył się w środowisku postpitagorejskim w Wielkiej Grecji. Jego nauczycielem był Archytas. Przebywał w akademii Platona. Jako pierwszy matematyk antyczny opracował dwa bardzo ważne zagadnienia. Stworzył on teorię stosunków wielkości. Teoria ta, odpowiednio zinterpretowana, pozwoliłaby już w starożytności na ścisłe wprowadzenie liczb rzeczywistych, w tym oczywiście liczb niewymiernych. Eudoksos w swej teorii antycypował wiele pomysłów, które wykorzystał w XIX w. R. Dedekind, wprowadzając liczby rzeczywiste przez tzw. przekroje w zbiorze liczb wymiernych. Poza tym Eudoksos stworzył antyczne podstawy w zakresie teorii granic oraz rachunku całkowego. Oczywiście nie wprowadził on *explicite* pojęcia granicy ciągu ani całki oznaczonej. Tym niemniej antycypował metody teorii granic oraz rachunku całkowego w tzw. metodzie wyczerpywania. Za jej pomocą był w stanie obliczyć miary wielu figur płaskich i stereometrycznych. W tej dziedzinie, poza pracami Archimedesa, nie wniesiono w matematyce nic nowego aż do XVII w., kiedy

Stagiryta jako pierwszy wprowadził rozróżnienie na nieskończoność aktualną i potencjalną oraz zajął negatywne stanowisko w sporze o istnienie aktualnej nieskończoności. Rozróżnienie dokonane przez Arystotelesa zostało zaakceptowane przez tradycję zarówno matematyczną, jak i filozoficzną. Było ono istotne przez całe dzieje obydwu tych nauk. Szczególnie ożywiona dyskusja na temat istnienia nieskończoności aktualnej i potencjalnej była toczona pod koniec XIX i na początku XX stulecia w związku ze stworzeniem przez G. Cantora teorii mnogości, która w istocie była teorią zbiorów (aktualnie) nieskończonych, oraz w związku z odkryciem antynomii teoriomnogościowych. Jednakże naszkicowanie stanowiska Arystotelesa w zakresie zagadnienia nieskończoności wymaga wcześniejszego opisu sytuacji, która w związku z problematyką nieskończoności zaczęła się tworzyć w matematyce antycznej, począwszy od V w. przed Chrystusem.

Uwyraźnienie sytuacji problemowej, która powstała w matematyce V w. przed Chrystusem, wymaga z kolei użycia pewnego instrumentarium, szczególnie odnośnie do pojęcia nieskończoności. Instrumentarium takie było tworzone zarówno przez Arystotelesa, jak i przez matematyków XIX w., głównie B. Bolzano, K. Weierstrassa, G. Cantora oraz R. Dedekinda. Dlatego omawiając problemy matematyki antycznej z V w. przed Chrystusem, trzeba użyć – między innymi – rozróżnienia Arystotelesa na nieskończoność aktualną i potencjalną. Z kolei owocne odwołanie się do narzędzi teoriomnogościowych, stworzonych w XIX w., pozwoli zaakcentować, na marginesie rozważań dotyczących matematyki i filozofii antycznej, aktualność antycznej problematyki nieskończoności.

Oczywiście matematycy antyczni zdawali sobie sprawę, że ich twierdzenia, np. geometryczne, są powszechne, tzn. dotyczą nie tylko skończonej liczby obiektów, chociażby trójkątów, ale ich nieskończonego zbioru.

---

powstał rachunek różniczkowy i całkowy. Eudoksos był obok Euklidesa i Archimedesa postacią pierwszoplanową w matematyce antycznej.

Imię Eudoksosa warto wspomnieć przy tej okazji z jeszcze jednego powodu. Podjął on myśl Platona zbudowania modelu, w którym pozorne ruchy Słońca, Księżyca i planet byłyby kombinacją jednostajnych ruchów kołowych. Opis pomysłowego modelu skonstruowanego przez Eudoksosa zamieszczają Arystoteles oraz Simplikos. Taki model można było poruszać. Trzeba to było jednak uczynić za pomocą jakiejś „siły z zewnątrz". Stąd powstał pomysł „nieruchomego motoru", „nieruchomego poruszyciela". Pojęcie to przejął od Eudoksosa Arystoteles, a od tego drugiego św. Tomasz z Akwinu, wykorzystując je w „pięciu drogach". Warto, by zajmujący się teodyceą oraz teologią wiedzieli, od kogo wywodzi się tak ważne pojęcie „nieruchomego poruszyciela".

Jednakże problem nieskończonych zbiorów i ciągów pojawił się w istocie z całą jaskrawością w momencie odkrycia niewspółmierności[3].

Do czasu odkrycia niewspółmierności podstawą definicji stosunku odcinków a i b był tzw. algorytm Euklidesa. Dzięki niemu znajdowano wspólną miarę f dwu odcinków i jeśli $a = mf$, $b = nf$, gdzie m, n były liczbami naturalnymi, to $a/b = m/n$. Jeśli jednak obydwa odcinki okazywały się niewspółmierne, to algorytm przestawał być skończony. Stosunek a/b, przekątnej kwadratu, do boku jednostkowego można było przybliżać kolejnymi ułamkami dziesiętnymi *1*, *1,4*, *1,41*, *1,414*, *1,4142*, *1,41421*, ... Ciąg takich przybliżeń był jednak ciągiem – a więc i zbiorem – nieskończonym. Gdyby był ciągiem skończonym (tzn. stałym od pewnego momentu), to, jak bardzo łatwo można wykazać, stosunek a/b można by przedstawić za pomocą ilorazu dwu liczb naturalnych. Skądinąd wiadomo było, że stosunek wymienionych dwu odcinków jest niewymierny[4].

---

[3] Wszystkie wiadomości na temat antycznych matematycznych analiz zagadnienia nieskończoności podane w tym artykule zaczerpnięto z pracy I. G. Baszmakowej *Grecja starożytna* ([w:] *Historia matematyki*, t. I, pod red. A. P. Juszkiewicza, tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki, Warszawa 1975, s. 64-115). Dlatego też – poza niektórymi wyjątkami – nie podaje się odniesień do poszczególnych stron jej pracy.

[4] Jak pokazały badania dotyczące podstaw analizy, prowadzone pod koniec XIX w. przez K. Weierstrassa, G. Cantora, R. Dedekinda, dla wprowadzenia niewymiernych liczb rzeczywistych konieczne jest posługiwanie się jakąś formą ciągów (zbiorów) nieskończonych. I tak np. G. Cantor (i podobnie K. Weierstrass) definiował liczbę rzeczywistą jako klasę **nieskończonych** ciągów współzbieżnych liczb wymiernych. A zatem liczbę niewymierną będącą dodatnim pierwiastkiem z 2 definiowały wszystkie nieskończone ciągi liczb wymiernych współzbieżne z nieskończonym ciągiem *1*, *1,4*, *1,41*, *1,414*, *1,4142*, *1,41421*, ...

Odkrycie niewymierności było bardzo doniosłym, ale i destrukcyjnym wydarzeniem w matematyce i szerzej – w myśli starożytnej. Zburzyło całą koncepcję filozoficzną pitagorejczyków. Byli oni przekonani – na podstawie odkryć w zakresie akustyki oraz astronomii – że podstawowym budulcem rzeczywistości, poszukiwanym *arche* (w zależności od interpretacji: materialnym bądź, po raz pierwszy w dziejach, formalnym) jest liczba. Skoro jednak stosunku dwu odcinków nie dało się przedstawić jako stosunku dwu liczb naturalnych, to stanowisko ontologiczne pitagorejczyków musiało upaść. Zresztą to najprawdopodobniej oni jako pierwsi odkryli niewymierności. Stanowisko to miało skutki nie tylko w zakresie filozofii pitagorejczyków. O wiele istotniejsze były następstwa w matematyce. Na antycznym etapie rozwoju matematyki niemożliwa stała się arytmetyzacja geometrii. Arytmetykę liczb naturalnych przestano uważać za dyscyplinę podstawową matematyki, taką, do której wszystkie inne są sprowadzalne. Od tego momentu zaczął dominować inny pogląd. To geometria, w której można było konstruować niewymierności, miała stać się podstawową dyscypliną matematyki. Zaczęto geometryzować arytmetykę. Dopiero Kartezjusz, opierając się na nie uściślonym pojęciu liczb rzeczywistych, arytmetyzował geometrię, tworząc geometrię analityczną. Trzecia arytmetyzacja matematyki miała miejsce w 2. poł. XIX w. dzięki ścisłemu wprowadzeniu liczb wymiernych przez K. Weierstrassa, G. Cantora oraz R. Dedekinda.

Tak więc w matematyce antycznej pojawiły się w związku z odkryciem niewymierności ciągi, a zatem i zbiory nieskończone, podobnie jak na przełomie XIX i XX w. zbiory nieskończone weszły do matematyki przy rozważaniu problematyki liczb rzeczywistych oraz miary.

Problematyczna była też topologia odcinków – a więc wielkości ciągłych geometrii pitagorejskiej. Według jednej z koncepcji, rozwiązującej kwestię budowy odcinka, składał się on z punktów – części niepodzielnych. Tak np. Euklides definiował intuicyjnie punkt jako coś, co nie miało części. Takich elementów, z których miało składać się *continuum* liniowe, winno być – według wspomnianej koncepcji – nieskończenie wiele.

Oprócz zbiorów nieskończonych w matematyce antycznej pojawiły się nieskończone procesy. Dotyczyło to procedur wyznaczania pól figur płaskich i objętości brył. Najbardziej znane zagadnienie z tej dziedziny to tzw. kwadratura koła. W V w. przed Chrystusem Antyfon starał się w następujący sposób rozwiązać pozytywnie to zagadnienie. W koło należy wpisać kwadrat. Oczywista jest możliwość skonstruowania takiego kwadratu poza kołem. Następnie należy w koło wpisać wielokąt, podwajając liczbę jego boków w stosunku do wpisanej figury wyjściowej. Można skonstruować kwadrat równy polu takiego ośmiokąta. Taką procedurę można powtarzać wielokrotnie, podwajając za każdym razem liczbę boków wielokąta wpisanego w koło i konstruując kwadrat o powierzchni równej powierzchni wielokąta. Zdaniem Antyfona koło jest wielokątem mającym nieskończenie wiele boków. Zatem i dla koła można zbudować stosowny kwadrat, o polu równym polu danego koła. Antyfon, opierając się na wskazanym założeniu, pozytywnie rozstrzygnął problem kwadratury koła. Jednakże już Arystoteles wskazywał na zbyt daleko idące uogólnienie, którego dokonał Antyfon. Czym innym jest przyjęcie, że koło jest wielobokiem o bardzo wielkiej liczbie boków, z których każdy jest bardzo mały, czym innym zaś powiedzenie, że koło jest wielobokiem o nieskończonej liczbie boków. Wcale bowiem nie wiadomo, czy własność, którą ma wielobok o skończonej liczbie boków, musi mieć również wielobok o nieskończonej liczbie boków[5].

---

[5] Tak właśnie przebiegała krytyka rozwiązania problemu kwadratury koła Antyfona, przeprowadzona przez Arystotelesa. Dopiero w XIX w. wykazano, że nie da się skonstruować kwadratu o powierzchni równej danemu kołu. Wówczas to F. Lindemann (*Über die Zahl* π, „Mathematische Annalen", 15(1882), Bd. 20, s. 213-225) udowodnił, że liczba π nie jest liczbą algebraiczną.

Generalnie należy stwierdzić, że problematyka związana z niewymiernościami (liczbami rzeczywistymi) oraz z miarą ujawniła trudności wynikające z konieczności posługiwania się zbiorami, ciągami, procesami nieskończonościowymi oraz pojęciem ciągłości. Trudności te zaczęto ujawniać w matematyce i filozofii antycznej począwszy od V w. przed Chrystusem. Były one powodem sporów i dyskusji uczonych, podobnie jak pokrewne kwestie na przełomie XIX i XX w. były powodem dyskusji wokół podstaw matematyki.

Wspomniane trudności zostały najlepiej wyeksplikowane przez członka szkoły eleackiej, żyjącego w V w. przed Chrystusem, ucznia Parmenidesa, Zenona z Elei. Zenon posługiwał się rozumowaniami dedukcyjnymi nie wprost[6]. Znane są przede wszystkim jego aporie dotyczące zagadnienia ruchu. Wykazując sprzeczności związane z ruchem – a w istocie z pojęciami nieskończoności oraz ciągłości – wskazywał na konieczność odrzucenia ruchu. Preferencje, które w szkole eleackiej dawano nie obserwacjom fizycznym zmiennego świata zjawiskowego, lecz rozumowaniom dedukcyjnym, opartym na stworzonej przez Parmenidesa logice, powodowały, iż odrzucano ruch, zmienność, jako coś sprzecznego[7]. Jak już zaznaczono, aporie Zenona ujawniły trudności związane z pojęciami nieskończoności

---

[6] Dowody takie oparte były na wprowadzonej przez Parmenidesa ontologicznej i metalogicznej zasadzie niesprzeczności.

[7] Należy w tym miejscu jeszcze raz podkreślić zasługi, jakie dla rozwoju samej matematyki i koncepcji matematyki jako wiedzy aprioryczno-dedukcyjnej ma Parmenides i szkoła eleacka. Parmenides nie akceptował budowania wiedzy na obserwacji świata zjawiskowego, lecz na dedukcjach, w których kierował się odkrytymi przez siebie prawami logiki: tożsamości i sprzeczności. Wówczas gdy wiedza oparta na rozumowaniu dedukcyjnym nie zgadzała się z wiedzą opartą na poznaniu zmysłowym, akceptował tę pierwszą, odrzucając drugą. Dla wiedzy apriorycznej wskazywał odmienny przedmiot, inny niż świat zjawiskowy. Ta koncepcja Parmenidesa zastosowana do matematyki przez pitagorejczyków oraz ich antycznych następców pozwoliła uczynić z matematyki wiedzę nieoglądową, opartą jedynie na przyjętych założeniach i regułach przekształcania zdań. Tylko w ramach takiego apriorycznego, nieoglądowego rozumienia matematyki można było zbudować geometrię nieeuklidesową, niezgodną z potocznym „oglądem” geometrycznym, a także w ramach matematyki stosowanej – astronomii – teorię heliocentryczną, także niezgodną z potocznym doświadczeniem. Ideał nauki nieoglądowej, apriorycznej, zaowocował matematyką pitagorejską, w której w dowodach odwoływano się do reguł wnioskowań dedukcyjnych, a nie do przykładów – rysunków figur geometrycznych itd. Ta koncepcja nieoglądowości matematyki została podjęta w Platona koncepcji matematyki.

oraz ciągłości. Oprócz znanych aporii ruchu dochowało się w przekazach kilka tzw. aporii mnogości[8].

Jedną z aporii mnogości można nazwać aporią miary. Jest ona sformułowana następująco: „jeśli istnieje mnogość, to powinna ona jednocześnie być wielka i mała i przy tym wielka bez granic i mała do zniknięcia".

Trudności ujawnione w tej aporii można zobrazować w sposób następujący. Niech dany będzie odcinek, który jest zbiorem nieskończonym elementów niepodzielnych. Wówczas:

1) jeżeli miara (długość, wielkość) każdego elementu niepodzielnego (milcząco czyniono założenie, że miara wszystkich elementów niepodzielnych jest jednakowa) równa jest zeru, to miara odcinka jest równa zeru;

2) jeżeli miara każdej niepodzielnej części jest różna (dalej przy założeniu, że miara wszystkich elementów niepodzielnych jest jednakowa) od zera, to odcinek jest nieskończony.

Należy zauważyć, że ta aporia mnogości sformułowana jest w formie koniunkcji. Wynikało to zapewne stąd, iż jej twórca był przekonany, że miara części niepodzielnych jest tak „bliska zeru", iż równocześnie może być traktowana jako zerowa i jako różna od zera.

W każdym razie z dychotomii tej wynika, że nie można podać miary odcinka jako sumy miar jego części niepodzielnych. Generalnie miara zbioru nie musi być równa sumie miar jego elementów. Współcześnie rozwiązuje się całe zagadnienie w ten sposób, że najpierw wyznacza się miary pewnych przedziałów, a następnie systemem takich przedziałów „pokrywa się" dany zbiór.

Obok mniej znanych aporii mnogościowych znaczenie dla zarysowania problematyki nieskończoności w aspekcie matematycznym mają aporie ruchu. Mają one swoje znaczenie fizyczne. Eleaci za ich pomocą starali się wykazać, że ruch jest niemożliwy[9]. W niniejszych rozważaniach nie położono akcentu na wydźwięk fizyczny aporii ruchu, lecz na ich znaczenie dla pojmowania nieskończoności w czasach antycznych.

Według argumentacji przedstawionej przez Zenona w aporii dychotomii ciało, które się porusza, nigdy nie przebędzie całej drogi, nie osiągnie jej końca. Najpierw bowiem musi ono dojść do połowy drogi, potem do poło-

---

[8] Aporie ruchu Zenona zostały zachowane w *Fizyce* Arystotelesa. Natomiast urywki aporii mnogości podaje komentator Arystotelesa Simplikos.

[9] W koncepcji Parmenidesa istniał jeden **nieruchomy** byt.

wy połowy, dalej do połowy połowy połowy całej drogi itd. w nieskończoność. Zatem nigdy nie dojdzie do końca.

Aporię tę można również przedstawić następująco. Punkt M porusza się po odcinku jednostkowym AB od punktu A do punktu B. Zanim dojdzie on jednak do punktu B, musi **przeliczyć** nieskończony zbiór środków A_1, A_2, ..., A_n, ... Znaczy to tyle, że nigdy nie dojdzie on do punktu końcowego B[10]. Dlaczego zatem w rzeczywistości fizycznej, która realizuje podany model, punkt B jest zawsze osiągany?[11]

W aporię tę uwikłanych jest kilka kwestii matematycznych. Podstawowy problem to ten, czy w matematyce wolno posługiwać się zbiorami aktualnie nieskończonymi[12]. W tym wypadku czy można traktować uporządkowany zbiór wszystkich liczb naturalnych jako gotowy, dany w całości w jednym momencie ze wszystkimi swoimi elementami? Wówczas można by wprowadzić nową, pozaskończoną liczbę porządkową, następującą po wszystkich,

---

[10] Według I. G. Baszmakowej aporii tej nie rozwiązuje fakt, iż nieskończona suma szeregu o wyrazie ogólnym $1/2^n$ wynosi 1. Dla wyjaśnienia, na czym polega istota aporii dychotomii, I. G. Baszmakowa powołuje się na przykład podany przez H. Weyla. Niech będzie dana maszyna (komputer), która wykonałaby pierwszą operację w 1/2 min., drugą w 1/4 min., kolejną w 1/8 min. itd. Taki komputer mógłby w ciągu minuty **przeliczyć** wszystkie liczby naturalne. Można by go i tak zaprogramować, by dla każdej kolejnej liczby naturalnej, w żądanym czasie, ciągle o połowę krótszym, sprawdził, czy ma ona pewną określoną własność, np. czy jest rozwiązaniem jakiegoś równania. W ten sposób komputer mógłby w ciągu minuty rozwiązać każde zagadnienie z teorii liczb związane z problemem egzystencji, chociażby wielkie twierdzenie Fermata. Oczywiście fizyczne skonstruowanie takiego komputera jest niemożliwe (por. B a s z m a k o w a, art. cyt., s. 99).

[11] Eleaci z aporii dychotomii wyciągali wniosek o nieistnieniu ruchu – byt jest stale w spoczynku. Dane zmysłowe przeczące osiąganiu punktu B w rzeczywistości zmysłowej odrzucali jako mylące. Nie uznawali oni poznania empirycznego, a jedynie aprioryczne.

[12] R. Dedekind zdefiniował pod koniec XIX w. refleksywnie zbiór nieskończony jako zbiór, który jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. Zbiór jest równoliczny z jakimś zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja jedno-jednoznaczna przekształcająca pierwszy ze zbiorów na drugi. Tym samym pojęciem zbioru nieskończonego posługiwał się G. Cantor. Analiza tekstów B. Bolzano pokazuje, że w zasadzie on był prekursorem refleksywnej definicji zbiorów nieskończonych.

W prowadzonej tu dyskusji posłużono się terminologią „zbiory aktualnie i potencjalnie nieskończone". O nieskończoności aktualnej i potencjalnej jako pierwszy pisał w IV w. przed Chrystusem Arystoteles. Jednakże terminologia ta jest przydatna dla ukazania problematyki ujawnionej wiek wcześniej w szkole eleackiej. Przy tym trzeba stwierdzić, iż nie ma precyzyjnej definicji nieskończoności aktualnej i potencjalnej. Jest to terminologia odwołująca się do pewnej intuicji nieskończoności. W wypadku zbiorów aktualnie nieskończonych powiada się, że stanowią one coś „gotowego", „danego w tym momencie jako całość". Natomiast w wypadku nieskończoności potencjalnej podaje się pewien paradygmat – to coś, co „może rosnąć ponad wszelką granicę", ale stale jest czymś skończonym.

uporządkowanych według wielkości, liczbach naturalnych. Wprowadzenie to odbyłoby się na podstawie następującego schematu:

$$
\begin{array}{l}
<0> \;\to\; 1; \\
<0,\ 1> \;\to\; 2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
<0,\ 1,\ \ldots,\ n> \;\to\; n + 1; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
<0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots> \;\to\; \omega.
\end{array}
$$

Widać, że w wypadku ostatniego kroku uporządkowany zbiór nieskończony wszystkich liczb naturalnych potraktowany został podobnie, jak wszystkie występujące przed nim uporządkowane zbiory skończone. Został on uznany jako coś gotowego, aktualnie danego ze wszystkimi swoimi elementami.

Według teorii mnogości G. Cantora, z końca XIX w., wprowadzenie takiej liczby pozaskończonej ω jest uprawnione. Istnieje bowiem aktualnie nieskończony zbiór liczb naturalnych[13].

Posługując się pozaskończonymi liczbami porządkowymi, wprowadzonymi przez G. Cantora, można twierdzić, iż wybrany wcześniej punkt M osiąga środek odcinka AB, tzn. punkt A_1, w chwili t_1, połowę połowy odcinka, tzn. punkt A_2, w chwili t_2, ..., punkt A_n w chwili t_n, ..., punkt B

[13] G. Cantor swe przekonanie o istnieniu aktualnie nieskończonego zbioru liczb naturalnych oparł na zasadzie, którą można nazwać heurystyczną zasadą Gutberleta. Według niej każda nieskończoność potencjalna zakłada istnienie związanej z nią nieskończoności aktualnej. Każdy akceptuje, że zbiór liczb naturalnych tworzy przynajmniej potencjalnie nieskończony zbiór. Zgodnie z zasadą neotomisty K. Gutberleta (*Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet*, Mainz 1878) taki zbiór musi mieć jako „podłoże” gotowy, dany ze wszystkimi elementami zbiór aktualnie nieskończony.

W XIX w., dzięki pracom B. Bolzano, K. Weierstrassa, G. Cantora, R. Dedekinda, nastąpiło swoiste połączenie trzech pojęć: zbioru, nieskończoności i liczby (nieskończonej). Pojęcie zbioru starano się definiować np. jako wielość, która da się pomyśleć jako jedność. Oczywiście takie intuicyjne określenia nie mogły wejść do matematyki. Ostatecznie pojęcie zbioru, elementu i relacji należenia elementu do zbioru przyjęto jako terminy pierwotne aksjomatycznych ujęć teorii mnogości (np. E. Zermelo). Zbiory nieskończone zdefiniowano refleksywnie, wprowadzając najpierw pojęcie równoliczności zbiorów. Natomiast liczby, w tym liczby nieskończone, definiowano jako klasy abstrakcji względem relacji równoliczności w klasie zbiorów. Oczywiście należy tu pamiętać, iż pojęcie zbioru wszystkich zbiorów jest antynomijne (antynomia Cantora).

(= A_ω) zaś w chwili t_ω[14]. Zatem wprowadzenie pozaskończonych liczb porządkowych poniekąd rozwiązuje aporię dychotomii. Tyle tylko, że to rozwiązanie zostało zaproponowane pod koniec XIX w. Matematycy i filozofowie antyczni znali tylko liczby skończone, naturalne[15]. Dlatego nie wprowadzili pierwszej liczby porządkowej pozaskończonej. Poza tym, przynajmniej pozornie, z powodu niewłaściwego ustalenia relacji kwantytatywnych pomiędzy zbiorami nieskończonymi przyjęcie istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych groziło powstaniem paradoksów, na które później zwrócili uwagę matematycy perscy, Galileusz i G. W. Leibniz.

Paradoksy brały się stąd, że dwa zbiory traktowano jako równe wtedy i tylko wtedy, gdy istniała relacja wzajemnie jednoznaczna przekształcająca jeden zbiór na drugi. Zbiór traktowano jako mniejszy od danego wówczas, gdy był on podzbiorem właściwym danego zbioru lub równoliczny z jego podzbiorem właściwym. Kiedy jednak brano pod uwagę zbiory nieskończone, wówczas zdarzało się, że dany zbiór był równoliczny z pewnym zbiorem, a równocześnie był jego podzbiorem właściwym. W myśl przed-dedekindowskiego określenia relacji kwantytatywnych pomiędzy zbiorami dany zbiór był równy pewnemu zbiorowi, a równocześnie był mniejszy od

---

[14] I. G. Baszmakowa (art. cyt., s. 100) podaje, że R. Baire na podstawie takiej właśnie konstrukcji wprowadził liczbę porządkową ω, następującą jako pierwsza po wszystkich liczbach naturalnych.

[15] W czasach antycznych liczbami były w zasadzie tylko liczby naturalne. Funkcję liczb wymiernych spełniały stosunki liczb naturalnych. Znali je już pitagorejczycy. Stosunki te nigdy w czasach starożytnych wprost nie zostały nazwane liczbami. Eudoksos wprowadził również do matematyki stosunki pomiędzy wielkościami (liczbami naturalnymi, odcinkami, polami, objętościami). Stosunki wielkości spełniały w starożytności funkcję liczb rzeczywistych. Aparat stosunków wielkości stworzony przez Eudoksosa był w zasadzie wystarczający do ścisłego wprowadzenia liczb rzeczywistych. Na pomyśle Eudoksosa wzorował się R. Dedekind, konstruując w XIX stuleciu teorię liczb rzeczywistych. W średniowieczu w środowisku arabskim oraz chrześcijańskim zaczęto traktować stosunki wielkości jako liczby, wprowadzając dla nich operacje arytmetyczne. I. Newton (*Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Cantabrigiae 1707 – cyt. za: A. P. J u s z k i e w i c z, *Arytmetyka i algebra*, [w:] *Historia matematyki*, t. II, pod red. A. P. Juszkiewicza, tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki, Warszawa 1976, s. 40) nazywał stosunki wielkości liczbami: „przez liczbę rozumiemy nie tyle zbiór jedności, ile abstrakcyjny stosunek jakiejkolwiek wielkości do drugiej wielkości tego samego rodzaju, przyjętej za jednostkę. Liczba może być w trzech postaciach: całkowita, ułamkowa i niewymierna (*surdus*). Całkowitą jest taka liczba, która wymierza jedności; ułamkowa – całkowite części jedności; liczba niewymierna jest niewspółmierna z jednością". Jeśli chodzi o liczby ujemne, to sprawiały one w starożytności wiele kłopotu. Odnosząc się do praktyki kupieckiej, określano je jako „dług". Dopiero postępy algebry w XVI i XVII w. pozwoliły wartości ujemne nazwać liczbami i opatrzyć znakiem „minus".

niego. Przeczyło to antycznemu aksjomatowi matematycznemu, który jako piąty aksjomat umieszczony jest w *Elementach* Euklidesa i stwierdza, iż „całość jest większa od części”. Przykładem dwu takich zbiorów są ciąg kwadratów liczb naturalnych *1*, *4*, *9*, ..., n^2, ... oraz zbiór wszystkich liczb naturalnych[16]. Istnieje funkcja odwzorowująca wzajemnie jednoznacznie zbiór liczb naturalnych na zbiór ich kwadratów $f\colon n \to n^2$. Z drugiej strony zbiór kwadratów liczb naturalnych jest podzbiorem właściwym zbioru liczb naturalnych, do pierwszego zbioru nie należy liczba *2*, do drugiego zaś należy. A więc w myśl przyjętych określeń relacji kwantytatywnych pomiędzy zbiorami zbiór kwadratów jest **równy** zbiorowi liczb naturalnych, a równocześnie od tego zbioru jest **mniejszy**. To z kolei jest niezgodne z antycznym aksjomatem, iż „całość jest większa od części”. Antyczni myśliciele nie znali jeszcze galileuszowych paradoksów teoriomnogościowych, ale gdyby je znali, byłby to dla nich kolejny argument za odrzuceniem istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych. Stałoby się tak ze względu na pozorną sprzeczność równości i mniejszości zbiorów oraz ze względu na niezgodność koniunkcji tych relacji z aksjomatem antycznym orzekającym, że „całość jest większa od części”.

W XIX w. paradoksów teoriomnogościowych uniknięto, modyfikując relacje kwantytatywne pomiędzy zbiorami. Pozostawiono definicję równości zbiorów jako tych, które można wzajemnie jednoznacznie przekształcić jeden na drugi. Natomiast w przypadku relacji „bycia mniejszym niż” zażądano dwu warunków: bycia podzbiorem właściwym danego zbioru oraz nieistnienia funkcji przekształcającej wzajemnie jednoznacznie jeden zbiór na drugi. W ten sposób G. Cantor wykluczył możliwość zachodzenia równoczesnego: relacji równości i mniejszości pomiędzy dwoma zbiorami. Natomiast występowanie równoliczności zbioru i nadzbioru właściwego potraktowano jako własność definicyjną zbiorów nieskończonych. W tym znaczeniu odsunięto antyczny aksjomat stwierdzający, że „całość jest większa od części”. Całość w wypadku zbiorów nieskończonych była „z definicji” równoliczna (równa) z częścią.

Oczywiście w XIX w. okazało się, że dowolne operowanie zbiorami nieskończonymi prowadzi do antynomii. Tym razem nie można ich było wyeliminować, modyfikując relacje kwantytatywne między zbiorami. Te pozostawiono. Natomiast aksjomatyczne teorie mnogości budowano tak, by nie

[16] Jest to przykład pochodzący od Galileusza.

wprowadzać zbiorów „zbyt dużych”. Jest to tak zwane (B. Russell) „ograniczenie rozmiaru” („limitation of size”).

Inna aporia Zenona to tzw. Achilles i żółw. Z aporii tej wynika, że Achilles, który w mitologii greckiej uchodził za szybkobiegacza, nigdy nie dogoni żółwia, który jest uosobieniem powolności. Niech bowiem Achilles znajdzie się w odległości a za żółwiem i biegnie od niego k razy szybciej. W momencie kiedy Achilles dojdzie do punktu, z którego wychodził żółw, a zatem przejdzie odcinek o długości a, żółw, który jest k razy wolniejszy, przejdzie odcinek a/k. Następnie kiedy Achilles przejdzie odcinek a/k, wówczas żółw zdąży już pokonać odcinek a/k^2 itd. Zawsze pomiędzy Achillesem a żółwiem pozostanie różnica większa od zera.

W aporii Achillesa i żółwia występuje ta sama trudność, co w aporii dychotomii. Chodzi o przeliczenie nieskończonego zbioru odcinków. Powstaje pytanie, czy można przyjąć istnienie zbioru aktualnie nieskończonego, a zatem i liczb pozaskończonych, za pomocą których można by przeliczyć kolejne odcinki.

Oprócz tej trudności występuje w aporii Achillesa i żółwia jeszcze inna. Niech będzie tak, że w chwili t_ω Achilles jednak dogoni żółwia. Drogi przebyte przez Achillesa oraz przez żółwia można zapisać następująco:

$$S_A = a + a/k + a/k^2 + ...;$$
$$S_{\dot{Z}} = a/k + a/k^2 + a/k^3 ...$$

Można teraz zauważyć pewną paradoksalną własność obydwu zbiorów odcinków. Z jednej strony Achilles powinien przebiec do momentu dogonienia żółwia dokładnie tyle samo odcinków, co ten drugi, każdemu bowiem odcinkowi o długości a/k^n przebytemu przez Achillesa odpowiada odcinek a/k^{n+1}. W przypadku pierwszych odcinków Achillesowemu a/k^0, czyli a, odpowiada żółwiowy odcinek a/k^1, czyli a/k. Natomiast, z drugiej strony, istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna przyporządkowująca każdemu odcinkowi przebytemu przez żółwia równy co do długości odcinek drogi, który musi przebiec Achilles. Zawsze n-temu odcinkowi drogi żółwia odpowiada co do długości $n + 1$ odcinek drogi Achillesa. Pierwsza część drogi Achillesa, ta o długości a, nie jest w tym przyporządkowaniu wzięta pod uwagę. Zatem do momentu spotkania Achilles musi przebyć o jeden odcinek drogi więcej niż żółw, jest to odcinek pierwszy o długości a. Jeśli oznaczy się liczbę odcinków pokonanych przez żółwia literą β (gdzie β jest w istocie pozaskończoną liczbą porządkową), to wówczas otrzymuje się równość:

$$1 + \beta = \beta$$

Jest to pogwałcenie antycznego aksjomatu Euklidesowego („część jest większa od całości"). Dlatego też matematycy i filozofowie antyczni odrzucili tezę, że istnieją zbiory (w tym wypadku odcinków) aktualnie nieskończone. Natomiast trzeba dodać, że w Cantorowskiej teorii mnogości, po zaakceptowaniu istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych i wprowadzeniu liczb pozaskończonych, jako twierdzenie funkcjonowało równanie $1 + \omega = \omega$. Jednakże w teorii tej nie funcjonował już antyczny aksjomat, umieszczony u Euklidesa, który stwierdzał, że „całość jest większa od części". Zbiory nieskończone były wówczas definiowane – jak to już wcześniej wskazano – refleksywnie, jako te zbiory, których podzbiór właściwy jest równoliczny z całym zbiorem.

Znaczenie matematyczne ma również aporia stadionu. Aporia ta wynika z założenia, że po prostych równoległych (po stadionie) poruszają się równe masy, o równych prędkościach, w kierunkach przeciwnych. W tej aporii A_1, A_2, A_3, A_4 oznaczają masy nieruchome, spoczywające na stadionie, B_1, B_2, B_3, B_4 masy, które poruszają się w prawo, natomiast Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 masy poruszające się w lewo. Poszczególne masy A_i, B_i, Γ_i w tej aporii traktowane są jako niepodzielne. Można stwierdzić, iż w niepodzielnej chwili czasu masy B_i, Γ_i przebywają niepodzielną część przestrzeni. Gdyby bowiem było inaczej, tzn. gdyby w ciągu niepodzielnej chwili czasu jakaś masa przebywała odcinek dłuższy aniżeli jedna niepodzielna część przestrzeni, to wówczas niepodzielna chwila czasu byłaby podzielna. Jeśliby zaś dana masa w ciągu niepodzielnej chwili przebywała przestrzeń mniejszą od niepodzielnej części przestrzeni, to wówczas ta niepodzielna część przestrzeni byłaby podzielna.

Istotne dla aporii stadionu jest teraz rozpatrzenie ruchu mas B_i, Γ_i względem siebie. W ciągu dwóch niepodzielnych chwil masa B_4 przebywa dwie niepodzielne, nieruchome masy (odcinki) A_i i w ciągu tych samych dwu niepodzielnych chwil minie cztery niepodzielne masy (odcinki) Γ_4. Jest to niezgodne z wyjściowym stwierdzeniem, że w ciągu jednej niepodzielnej chwili konkretna masa przebywa jedną niepodzielną część przestrzeni.

Aporię tę dla celów teoriomnogościowych można przedstawić jeszcze inaczej. W ciągu jednego odcinka czasu t punkt B_4 przebędzie połowę odcinka A_1A_4 oraz cały, poruszający się, odcinek $\Gamma_1\Gamma_4$. Ale każdej niepodzielnej części czasu odpowiada niepodzielna – jak wskazano wyżej – przebywana w tym czasie część przestrzeni. Zatem w dwu odcinkach, odpowiednio długości *a* i *2a*, zawiera się tyle samo niepodzielnych części przestrzeni, tzn. punktów. Odcinki te można na siebie wzajemnie jednoznacznie odwzorować (są one równoliczne). Można to zobrazować i w ten sposób, że każdemu punktowi z przedziału obustronnie domkniętego $[0, a]$ można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie punkt z przedziału obustronnie domkniętego $[0, 2a]$. Funkcję jedno-jednoznaczną określa się wzorem $f(x) \rightarrow 2x$, gdzie x należy do pierwszego z rozpatrywanych przedziałów. Jeśli tak, to odcinki *a* i *2a*, zawierające tyle samo punktów, są sobie równe – oczywiście przy założeniu, iż miara odcinka jest sumą miar elementów niepodzielnych. Z drugiej zaś strony odcinek *a* zawiera się jako podzbiór właściwy w odcinku *2a*. Zatem część równa się całości, co przeczy antycznemu aksjomatowi, iż „całość jest większa od części”[17].

W V i IV w. przed Chrystusem cała problematyka nieskończoności i ciągłości, wywołana odkryciem niewymierności, zagadnieniami miary oraz aporiami Zenona, była bardzo żywo dyskutowana. Zastanawiano się nad możliwością zaakceptowania lub odrzucenia zbiorów aktualnie nieskończonych. Dyskutowano nad tym, czy wielkości ciągłe (odcinki, pola, czas) składają się z niepodzielnych części, i nad tym, jaka jest liczba owych niepodzielnych części. Aporia mnogościowa Zenona wykluczała dla starożytnych przyjęcie nieskończonej liczby niepodzielnych elementów. Przyjęcie skończonej liczby elementów o mierze różnej od zera też nie wchodziło

---

[17] Cały czas należy pamiętać, że istotą, celem, dla których Zenon zbudował aporie, było pokazanie paradoksalności ruchu i w efekcie odrzucenie ruchu jako czegoś sprzecznego. Aporie miały zatem w zamyśle ich autora znaczenie fizyczne, a także – i chyba przede wszystkim – znaczenie ontologiczne. Eleaci szukali bowiem potwierdzenia dla tezy Parmenidesa, że istnieje jeden i **nieruchomy** byt.

Współcześnie wskazuje się na aktualność fizykalnego wymiaru aporii skonstruowanych przez Zenona z Elei. I. G. Baszmakowa (art. cyt., s. 102) powołuje się przy tym na autorytet D. Hilberta oraz P. Bernaysa. Ich zdaniem rozwiązanie paradoksu dychotomii polega na wskazaniu, że wcale nie powinno się żywić przekonania, iż matematyczne, przestrzenno-czasowe przedstawienie ruchu ma znaczenie fizyczne dla dowolnie małych przedziałów przestrzeni oraz czasu. Należy raczej uważać, że zastosowanie takiego modelu matematycznego do wielkości dowolnie małych jest nieuprawnioną ekstrapolacją z tej dziedziny doświadczenia, która jest dostępna ludzkim zmysłom. Innymi słowy: według D. Hilberta i P. Bernaysa ruch fizyczny w dowolnie małych przedziałach czasu i przestrzeni rządzi się innymi prawami aniżeli ruch obserwowany w świecie makroskopowym. Na to m.in. miała wskazywać aporia dychotomii Zenona z Elei.

w rachubę, bo taką wielkość można było podzielić na połowy. Tym niemniej pojawiły się również próby (Demokryt) stworzenia takiej matematyki „skończonościowej". Także z powodów, które niżej zostaną podane, próba ta skończyła się niepowodzeniem.

Ujawnione trudności dotyczące nieskończoności, topologii wielkości ciągłych generowały też skrajne koncepcje matematyki. Protagoras, żyjący w V w. przed Chrystusem, twierdził, że w związku z nierozwiązywalnymi trudnościami w matematyce należy po prostu odrzucić wszystkie abstrakcje matematyczne. Protagoras był zdania, że nie wolno posługiwać się pojęciami linii bez szerokości oraz punktów bez żadnych wymiarów, w rzeczywistości bowiem nikt ich nie widział. Według niego prosta styczna do okręgu nie ma z nim tylko jednego punktu wspólnego, lecz stykają się one na pewnym odcinku.

Wiadomo też, że Demokryt starał się zbudować matematykę skończoną. Wielkości geometryczne (odcinki, pola) miały się składać ze skończonej liczby małych elementów, o znanym wymiarze, różnym od zera. Po pierwsze jednak, z tą atomistyczną koncepcją można było dyskutować, twierdząc, iż atomy mające pewną miarę są jednak podzielne na części, których miara równała się połowie miary atomu. Poza tym za pomocą sumowania skończonej liczby małych elementów-atomów nie można było uzyskać miary całej figury. Demokryt pierwszy wpadł na pomysł, aby miarę pewnych figur wyliczyć jako sumę miar ich małych części. I tak proponował najprawdopodobniej, by miarę ostrosłupa otrzymać jako miarę sum skończonej liczby małych, wpisanych weń graniastosłupów. Jednakże okazuje się to niemożliwe bez przejścia do granicy i przyjęcia nieskończonego (przynajmniej potencjalnie) ciągu „wpisań" coraz mniejszych graniastosłupów, których wielkość, wraz z powiększaniem ich liczby, dąży do zera. Zatem przedsięwzięcie stworzenia matematyki „skończonej", przyjmującej skończoną liczbę elementów w wielkościach ciągłych, skończyło się niepowodzeniem. Tym niemniej pomysł Demokryta zaowocował powstaniem prototypów metod całkowych w czasach antycznych, dostrzegalnych w pracach Eudoksosa oraz Archimedesa. Pomysł polegał na przybliżonym, lecz dowolnie dokładnym zestawianiu jakichkolwiek figur dwuwymiarowych oraz brył trójwymiarowych z dużej liczby części elementarnych, których miara jest znana[18].

[18] Eudoksos i Archimedes, obliczając miary takich figur, posługiwali się tzw. metodą wyczerpywania, która była embrionalną, antyczną postacią teorii granic i rachunku całkowego.

Ostatecznie, po długich sporach, w ramach filozofii i matematyki antycznej, przyjęto odnośnie do zagadnienia budowy wielkości ciągłych stanowisko, które po raz pierwszy wyraził Anaksagoras w V w. przed Chrystusem: „w małym nie istnieje najmniejsze, lecz zawsze jest jeszcze mniejsze". Zatem ostatecznie zaakceptowane zostało stanowisko, według którego nie wykluczono nieskończonej podzielności wielkości i zanegowano to, że taki proces mógłby zostać w którymś miejscu zakończony. Tym samym odrzucono stanowisko atomistyczne i skończonościowe Demokryta oraz te stanowiska atomistyczne, według których wielkość ciągła składała się z aktualnie nieskończenie wielu niepodzielnych części. Jako wzorzec przekonania prezentowanego przez Anaksagorasa podawano dzielenie odcinka na części. Te z kolei znowu są podzielne i w procesie dzielenia nigdy nie dojdzie się do części niepodzielnych.

I właśnie w efekcie prowadzonych w V i IV w. przed Chrystusem dyskusji dotyczących zagadnień nieskończonościowych Arystoteles jako pierwszy w dziejach myśliciel wprowadził podział na nieskończoność aktualną i potencjalną i jako pierwszy wypowiedział się zdecydowanie za tą drugą, wykluczając jednocześnie istnienie nieskończoności aktualnej[19]. Arystoteles dyskutował zagadnienie nieskończoności w III księdze *Fizyki*. Rozgraniczył on pomiędzy możliwością dalszego dodawania jednostek do ostatniego wyrazu dowolnego ciągu liczb, takich jak np. ciąg kolejnych liczb naturalnych: *1*, *2*, *3*, ... oraz możliwością kolejnego podziału odcinka, zawartego pomiędzy dwoma punktami odcinka, który wcześniej był podzielony na części określoną liczbę razy. Tutaj możliwość pójścia *ad infinitum* jest tym, co powoduje, że ciąg może być określony jako nieskończony, a odcinek nieskończenie podzielny – bo zawierający nieskończenie wiele części. Podane przykłady są paradygmatami – wzorcami nieskończoności potencjalnej. Arystoteles stwierdził również, że można próbować wyobrazić sobie wszystkie elementy ciągu liczb naturalnych oraz – co wydaje się trudniejsze – wszystkie części niepodzielne linii jako dane w ich kompletnej całości. To paradygmaty nieskończoności aktualnej.

[19] Wprowadzone przez Arystotelesa dopiero w IV w. przed Chrystusem rozróżnienie nieskończoności potencjalnej oraz aktualnej zostało w niniejszym opracowaniu użyte już przy omawianiu sporów z V w. przed Chrystusem dotyczących nieskończoności. Uczyniono tak, by ujawnić przyczyny trudności, ich podłoże. Poza tym można przypuszczać, że wyrażony *explicite* dopiero przez Arystotelesa podział był już *implicite* zawarty w sporach wokół problematyki nieskończoności i ciągłości z V w. przed Chrystusem.

Wypada podkreślić, że Arystoteles nie posłużył się żadną definicją nieskończoności, zarówno potencjalnej jak i aktualnej. Podał tylko pewne przykłady jednej i drugiej. Wzorce te wskazują, iż pojmował on nieskończoność potencjalną jako coś, co w danym momencie zawiera zawsze skończenie wiele elementów, ale może być dowolnie powiększane – przez dodawanie kolejnych elementów lub przez kolejne podziały (odcinka). Nieskończoność aktualna zaś to wielość, której nie trzeba powiększać, nie jest ona czymś „dynamicznym", zmiennym, rosnącym ponad każdą skończoną granicę. To wielość, która składa się już teraz (a więc aktualnie) z nieskończenie wielu elementów[20].

Wyniki sporów dotyczących nieskończoności i wielkości ciągłych z V w. przed Chrystusem nie pozwoliły zaakceptować Arystotelesowi poglądu, że istnieje nieskończoność aktualna. Przyjęcie istniejących naraz wszystkich elementów zbioru liczb naturalnych mogło prowadzić do koncepcji istnienia pozaskończonych liczb porządkowych i w efekcie do sformułowania kontrprzykładu dla antycznego aksjomatu „całość jest większa od części". Ujawniła to przeprowadzona wyżej analiza aporii Achillesa i żółwia. Natomiast przyjęcie istnienia nieskończenie wielu niepodzielnych elementów odcinka groziło paradoksami ujawnionymi w trakcie analizy aporii mnogościowej oraz aporii stadionu. Dlatego też Arystoteles, wprowadziwszy podział na nieskończoność potencjalną i aktualną, opowiedział się za tą pierwszą.

Trzeba zaznaczyć, że Stagiryta, opowiadając się za nieskończonością potencjalną, odwołał się do argumentów natury pragmatycznej. Stwierdził on mianowicie, że matematykom **wystarczy** całkowicie dla uprawiania ich

---

[20] Termin „wielość" w przedaksjomatycznej teorii mnogości oznaczał coś zakresowo szerszego niż zbiór. Nie wszystkie wielości były zbiorami, natomiast każdy zbiór był wielością. I tak G. W. Leibniz uważał, że istnieją nieskończone wielości, te, które generują paradoksy teoriomnogościowe, lecz nie są one zbiorami. Powód był ten, że – zdaniem G. W. Leibniza – nie dawały się one niesprzecznie pomyśleć jako jedność, właśnie generowały paradoksy. G. Cantor, dzięki nowemu określeniu relacji kwantytatywnych pomiędzy zbiorami, zaliczył paradoksalne wielości do zbiorów. Okazało się jednak, że niektóre z tych zbiorów – „zbyt mocne" – generują antynomie (Cantora, Burali-Fortiego). Tym wielościom ponownie odmówiono własności „bycia zbiorem". Odżył zatem w Cantorowskiej, przedaksjomatycznej teorii mnogości podział na wielości, które są i nie są zbiorami, a więc na te, które dają się i nie dają się pomyśleć jako jedność.

Aksjomatyka E. Zermelo nie zachowała dualizmu zbiorów i wielości. Odżył on jednak w aksjomatyce teorii mnogości J. v. Neumanna, gdzie wyróżniono klasy nie będące zbiorami oraz zbiory.

dyscypliny naukowej pojęcie nieskończoności potencjalnej. Jego zdaniem matematycy nie posługują się w rzeczywistości nieskończonością aktualną[21].

Argument, iż matematykom wystarczy pojęcie nieskończoności potencjalnej, jest dyskutowany po dzień dzisiejszy. I tak na przykład zwolennicy platonizmu są zdania, że już dla wprowadzenia liczb niewymiernych (rzeczywistych), jako nieskończonych współzbieżnych ciągów liczb wymiernych, konieczne jest przyjęcie nieskończoności aktualnej. Natomiast przeciwnicy nieskończoności aktualnej, do których w XX w. należy zaliczyć przedstawicieli intuicjonizmu (konstruktywizmu), odrzucają istnienie nieskończoności aktualnej.

Wydaje się, że Arystoteles starał się zająć stanowisko jak najbardziej wyważone. Przyznanie matematykom możliwości posługiwania się nieskończonością potencjalną nie burzyło niczego w zastanej przez niego matematyce antycznej. Stwierdzenie, iż ten typ nieskończoności wystarcza, chroniło matematykę przed popadnięciem w paradoksy. Był więc to efekt doświadczeń wyniesionych z dyskusji z V w. przed Chrystusem. Jednocześnie w stanowisku Arystotelesa ujawniło się coś, co można by określić jako „lęk przed nieskończonością”.

Wielorako komentowano pragmatyczne podejście Arystotelesa do zagadnienia nieskończoności. Pojawiły się również głosy, że pragmatyzm był wyrazem dualnego rozwiązania problematyki nieskończoności w matematyce. Według tej interpretacji Arystoteles miałby dopuszczać aktualnie nieskończone zbiory w tych systemach matematyki czystej, które nie są aplikowalne do przyrodoznawstwa, a ściślej do fizyki. Natomiast w teoriach, które są stosowalne do fizyki, dopuszczalna byłaby jedynie nieskończoność potencjalna. Wynikałoby to zapewne stąd, że w aporiach Zenona pojawiły się paradoksy w momencie, gdy zastosowano aparaturę matematyczną do opisu zjawisk fizycznych, przede wszystkim ruchu[22].

---

[21] Arystoteles w *Fizyce* pisał: „[...] nasze rozumowanie, odrzucające nieskończoność aktualną, nie odbiera matematykom ich teorii; przecież nie potrzebują oni takiej nieskończoności i nie posługują się nią: matematykom trzeba tylko, by ograniczona linia była taką wielkością, jakiej sobie życzą, i by w takiej proporcji, w jakiej dzieli się największą wielkość, dzielić też można było jakąkolwiek inną” (cyt. za: B a s z m a k o w a, art. cyt., s. 104).

[22] Por. S. K ö r n e r, *The Philosophy of Mathematics*: *An Introductory Essay*, London 1960, s. 21.

W niniejszych analizach stwierdzono, że podjęcie przez Arystotelesa zagadnienia nieskończoności było skutkiem sytuacji problemowej, która w matematyce i filozofii antycznej powstała co najmniej wiek wcześniej. Nieskończoność w matematyce pojawiła się w związku z odkryciem niewspółmierności oraz wprowadzeniem procedur nieskończonościowych. Zwrócenie uwagi na tę problematykę było dziełem pitagorejczyków. W innym środowisku intelektualnym Wielkiej Grecji, wśród eleatów, zagadnienie nieskończoności pojawiło się w związku z ontologicznymi i fizykalnymi próbami zanegowania zjawiska ruchu. Znane aporie Zenona ujawniły paradoksy związane z pojęciem nieskończoności i ciągłości[23]. Arystoteles, wspomagany przez Eudoksosa, starał się uniknąć trudności związanych z nieskończonością. Dlatego, mimo iż nie podał on definicji nieskończoności (zbiorów nieskończonych), wprowadził dychotomię nieskończoności aktualnej i potencjalnej. Sam opowiedział się za istnieniem nieskończoności potencjalnej. Był to wyraz antycznego „lęku przed nieskończonością". Antyczne trudności związane z pojęciem nieskończoności rozwiązano do-

[23] Przeglądając *Elementy* Euklidesa, można wyciągnąć wniosek, że antyczni matematycy nie do końca mieli określony pogląd na zagadnienie ciągłości. Znali oni jeden z grupy aksjomatów ciągłości, sformułowany po raz pierwszy przez Eudoksosa, a nazywany aksjomatem Archimedesa. Stwierdza on, że jeśli dane są dwie wielkości a oraz b, to muszą istnieć liczby naturalne m i n takie, że $na > b$ oraz $mb > a$. Takie wielkości nazywa się archimedesowymi. Pojęcie wielkości obejmowało w starożytności zarówno liczby naturalne – wielkości dyskretne, jak i wielkości ciągłe. W istocie przez odniesienie do tego aksjomatu można zdefiniować wielkości nieskończenie małe. Jeśli η jest taką wielkością, że nie istnieje liczba naturalna n, dla której $n\eta > 1$, to η jest wielkością nieskończenie małą. Starożytni matematycy znali przykłady wielkości nieskończenie małych, np. kąty rogokształtne. Aksjomat Archimedesa pozwala też na zdefiniowanie wielkości nieskończenie wielkich. Jeśli λ jest taką wielkością, że $n < \lambda$ dla każdego naturalnego n, wówczas λ jest wielkością nieskończenie wielką. Eudoksos sformułował wspomniany aksjomat po to, by wyeliminować wielkości nieskończenie małe i wielkości nieskończenie wielkie, zwane niearchimedesowymi, ze swej teorii stosunków wielkości. W XVII w. wielkości nieskończenie małe pojawiły się ponownie w matematyce w związku z powstaniem rachunku różniczkowego i całkowego. Dwa wieki później, na podstawie wyników uzyskanych przez Cauchy'ego, K. Weierstrassa, G. Cantora i R. Dedekinda, okazało się, że analizę matematyczną można ściśle uprawiać posługując się wyłącznie liczbami rzeczywistymi. Wydawało się, że tym uczonym udało się – podobnie jak Eudoksosowi w IV w. przed Chrystusem – wyeliminować z matematyki wielkości nieskończenie małe. W XX w. okazało się jednak, że można skonstruować analizę niestandardową, opartą właśnie na wielkościach nieskończenie małych.

Powiedziano, że starożytni wprowadzili z grupy aksjomatów ciągłości jedynie aksjomat Archimedesa. Innym aksjomatem z tej grupy mógłby być tzw. aksjomat zupełności Dedekinda. Zapewnia on istnienie punktu wspólnego ciągu zawartych jeden w drugim zstępujących odcinków.

piero w XIX w., kiedy powstała teoria zbiorów nieskończonych (teoria mnogości). Wiązało się to jednak z odrzuceniem starożytnego aksjomatu stwierdzającego, że „całość jest większa od części”. Arystotelesowskie rozróżnienie na nieskończoność potencjalną i aktualną weszło na stałe do instrumentarium filozofów i filozofujących matematyków. Po dzień dzisiejszy nie ma wśród nich zgody, czy zaakceptować istnienie zbiorów aktualnie nieskończonych. Jedno jest pewne: matematyka od czasów antycznych potrzebuje jakiejś formy nieskończoności.

BIBLIOGRAFIA

Baszmakowa I. G.: Grecja starożytna, [w:] Historia matematyki, t. I, pod red. A. P. Juszkiewicza, tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki, Warszawa: PWN 1975, s. 64-115.

Gutberlet K.: Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, Mainz 1878.

Juszkiewicz A. P.: Arytmetyka i algebra, [w:] Historia matematyki, t. II, pod red. A. P. Juszkiewicza, tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki, Warszawa: PWN 1976, s. 26-60.

Körner S.: The Philosophy of Mathematics: An Intruductory Essay, London: Hutchison University Library 1960.

Lindemann F.: Über die Zahl π, „Mathematische Annalen”, 15(1882), Bd. 20, s. 213-225.

Tóth I.: Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum, „Archive for History of Exact Sciences”, 1967, vol. 3, s. 249-422.

DIE KONZEPTION DER UNENDLICHKEIT IN DER ANTIKEN MATHEMATIK UND PHILOSOPHIE

Zusammenfassung

In der vorliegenden Analysen wurde festgestellt, daß die Aufnahme von Aristoteles des Problems der Unendlichkeit von ihm eine Stellungsnahme zu der Problemlage war, welche in der antiken Mathematik und Philosophie zumindest ein Jahrhundert vorher entstanden ist. Die Unendlichkeit in der Mathematik erschien im Zusammenhang mit der Entdeckung der Inkommensurabilität und der Einführung der Unendlichkeitsverfahren. Auf diese Angelegenheit haben die Pythagoreer ihre Aufmerksamkeit gelenkt. In einem anderen intellektuellen Medium des Großen Griechenlands, unter den Eleaten, ist das Problem der Unendlichkeit im Zusammenhang mit den ontologischen und physikalischen Proben der Verneinung des Effekts der Bewegung aufgetreten. Die bekannten Aporien von Zeno zeigten die Paradoxe, die mit dem Begriff der Unendlichkeit und der Stetigkeit verbunden sind. Aristoteles, mit Hilfe Eudoxios, bemühte sich den Schwerigkeiten, die mit der Unendlichkeit verbunden sind, zu entgehen. Deshalb, trotzdem er die Begriffsbestimmung der Unendlichkeit (der unendlichen Mengen) nicht angegeben hat, führte er die Dichotomie der aktuellen und potentiellen Unendlichkeit ein. Er selbst erklärte sich für das Dasein der potentiellen Unendlichkeit. Das war die Äusserung der antiken „Furcht vor der Unendlichkeit”. Die mit dem Begriff der Unendlichkeit verbundenen antiken Probleme wurden erst im XIX. Jahrhundert gelöst, als die Theorie der unendlichen Mengen (Mengenlehre) entstanden ist. Das war aber im Zusammenhang mit der Ablehnung des altertümliches Axioms, welches feststellt, daß „die Ganzheit größer als ein Teil ist”.

Die aristotelische Unterscheidung auf potentielle und aktuelle Unendlichkeit hat einen beständigen Platz im Instrumentarium der Philosophen und der philosophierenden Mathematiker gefunden. Bis zum heutigen Tag herrscht unter ihnen keine Einigkeit, ob das Dasein der aktuellunendlichen Mengen akzeptiert sein soll. Eins ist sicher. Die Mathematik braucht seit der altertümlichen Zeiten irgendeine Form der Unendlichkeit.

Zusammengefaßt von Jerzy Dadaczyński

Słowa kluczowe: nieskończoność, nieskończoność w matematyce, nieskończoność w filozofii.

Key words: infinity, infinity in mathematic, infinity in philosophy.