ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom L, zeszyt 1 – 2002

KRZYSZTOF WÓJTOWICZ

O UZASADNIANIU W MATEMATYCE

WSTĘP

W pracy tej rozważam zagadnienie prawdziwości i uzasadniania zdań matematycznych w kontekście tradycyjnych stanowisk w filozofii matematyki. Celem jest rekonstrukcja logiczna, a nie historyczna: ukazanie, jak – z punktu widzenia poszczególnych stanowisk – traktowane byłoby to zagadnienie, nawet jeśli *explicite* nie było ono (w prezentowanej tu formie) podejmowane przez przedstawicieli danego nurtu. Prezentowane w artykule analizy nie są wyczerpujące, przedstawiam w nich jedynie wybrane klasyczne stanowiska w filozofii matematyki, a mianowicie: formalizm, konceptualizm, realizm Quine'a i Gödla. Nie podejmuję analizy problemu uzasadniania w świetle nowszych stanowisk w filozofii matematyki, takich jak fikcjonalizm Fielda, naturalizm Maddy, strukturalizm Resnicka i Shapiry, modalny strukturalizm Hellmana czy modalny antyrealizm Chihary.

Mówiąc w artykule o „prawdziwości", mam na myśli klasyczne pojęcie prawdy (w stylu Tarskiego). Prawdziwość (egzystencjalnych) zdań matematycznych zakłada więc, że mają one korelaty semantyczne.

1. ZAGADNIENIE UZASADNIANIA

Pojęcie „uzasadniania zdań matematycznych" można rozumieć na dwa sposoby:

Dr KRZYSZTOF WÓJTOWICZ: Zakład Filozofii Nauki, Instytut Filozofii UW, Krakowskie Przedmieście 3, 00-047 Warszawa, e-mail: wojtow@mercury.ci.uw.edu.pl

(1) Można je interpretować jako pojęcie czysto techniczne, dotyczące zagadnienia, które zdania języka są formalnymi konsekwencjami teorii. W takim ujęciu problem uzasadniania jest sformułowany relatywnie do przyjętego pojęcia konsekwencji (może to być konsekwencja semantyczna lub syntaktyczna – zrelatywizowana do przyjętej semantyki czy danego systemu dowodzenia). Uzasadnienie zdania matematycznego polega więc na wskazaniu jego formalnego dowodu i tylko poprzez dowód takie uzasadnienie może nastąpić. Jest to zatem problem techniczny; nie będzie on przedmiotem analiz w tym artykule.

(2) Można jednak również postawić tezę, że pojęcie „uzasadniania” wykracza poza pojęcie „dowodu formalnego”. Jak wówczas należy rozumieć pojęcie „uzasadniania”? Jakie są kryteria uzasadniania? Czy ma ono charakter obiektywny? W jaki sposób można uzasadniać zdania, które nie są formalnymi konsekwencjami danej teorii? Jaka jest zależność pomiędzy pojęciem „uzasadniania” a pojęciem „prawdziwości zdania matematycznego”?

Jeśli uznamy te pytania za dobrze postawione, w szczególności jeśli uznamy, że jest sens mówić o uzasadnianiu zdań matematycznych wykraczającym poza czysto techniczne procedury dowodowe, to pojawia się problem argumentacji pozaformalnej. Nie jest on problemem technicznym, choć oczywiście w ramach takiej argumentacji częste i naturalne będzie odwoływanie się do wyników technicznych. Aby uniknąć nieporozumień, należy tu zaznaczyć, że uznanie za sensowny problemu uzasadniania pozaformalnego oczywiście nie pociąga za sobą twierdzenia, że w ten sposób pojawił się nowy rodzaj dowodu i że zamiast dowodzić twierdzeń, będziemy je uznawać (np. uznamy bez dowodu, że obowiązuje jakieś twierdzenie matematyczne, które posłuży nam następnie do obliczenia wytrzymałości mostu). Rola i ranga dowodu pozostają nienaruszone; jednakże zostanie uznane za sensowne pojęcie „uzasadniania”, wykraczające poza pojęcie „dowodliwości”.

Oczywiste założenie, jakie należy przyjąć, aby te rozważania były sensowne, głosi, że uzasadnianie nie może kolidować z dowodliwością. Problem uzasadniania może zatem dotyczyć w zasadzie tylko zdań niezależnych. Może również dotyczyć zdań jeszcze nierozstrzygniętych, których metamatematyczny status nie jest jeszcze znany – wtedy jednak odgrywać ono może jedynie rolę heurystyczną[1].

[1] Można jednak wyobrazić sobie sytuację, w której pozaformalne rozważania doprowadzą do rewizji teorii – na przykład wtedy, gdy otrzymany wniosek jest wysoce kontr-

W kontekście pytania o uzasadnianie zdań matematycznych można wyróżnić (choć podział ten nie jest ostry) dwa zasadnicze problemy:

(2.a) problem uzasadniania aksjomatów dla pewnej teorii;

(2.b) problem uzasadniania zdań niezależnych od teorii.

Ad (2.a) Aksjomatyzacja teorii pojawia się w pewnym, dostatecznie dojrzałym stadium rozwoju danej dyscypliny, dopiero po jakimś okresie badań. Tak było na przykład w wypadku aksjomatyzacji teorii prawdopodobieństwa przez Kołmogorowa, aksjomatyzacji teorii mnogości przez Zermela czy aksjomatyzacji arytmetyki liczb naturalnych przez Peana. Wprowadzenie aksjomatyki nie pojawia się *ad hoc* – jest zazwyczaj poprzedzone zarówno analizami pojęciowymi, jak i badaniami technicznymi; jedne i drugie są ze sobą silnie związane i od siebie wzajemnie zależne. Problem uzasadniania aksjomatów w tym wypadku dotyczy przede wszystkim tego, w jakiej mierze dane aksjomaty uściślają treść już funkcjonującego w matematyce pojęcia, która z alternatywnych precyzacji (aksjomatyk) jest lepsza, etc.

Przykładem może być problem tego, jak „uchwycić” w aksjomatach teorii mnogości pojęcie *definite Eigenschaft*[2] – czy ma być to własność definiowana formułą pierwszego, czy drugiego rzędu. Podobny charakter ma zagadnienie, czy aksjomat ufundowania jest zasadny, albo czy pewnik wyboru – kontrowersyjny ze względu na swój niekonstruktywny charakter – winien zostać przyjęty jako aksjomat teorii mnogości. Zasadnicze pytanie ma zatem w tym wypadku postać: jakie aksjomaty „tkwią” w samym pojęciu zbioru, czy – innymi słowy – za pomocą jakich aksjomatów można pojęcie zbioru najlepiej opisać, „uchwycić”?

W stosunku do aksjomatów pojęcie uzasadniania może mieć jedynie sens preformalny – nie można bowiem aksjomatów dowodzić. W wypadku aksjomatów dopiero konstruowanej teorii nie pojawi się zatem problem ewentualnej sprzeczności pomiędzy uzasadnianymi a formalnie dowodzonymi zdaniami.

Ad (2.b) Pytanie o uzasadnianie zdań niezależnych od teorii pojawia się dopiero w kontekście pewnej sformalizowanej teorii, pewnego systemu pojęć matematycznych. Teoria ta musi być już ściśle sformułowana, aby można było prowadzić badania metamatematyczne, umożliwiające stwierdzenie, iż

intuicyjny. Można wtedy rozważać modyfikację aksjomatów, aby uniknąć takich niepożądanych konsekwencji.

[2] Pojęciem tym posługiwano się we wczesnych stadiach rozwoju teorii mnogości, gdy formułowano dla niej aksjomatykę.

pewne zdania są niezależne. Problem przyjmuje postać: „czy pewne zdanie niezależne φ winno być dołączone do teorii T?”. Z założenia, same aksjomaty teorii T nie pozwalają na formalne rozstrzygnięcie tego problemu, jednakże za przyjęciem zdania φ (bądź ¬φ) mogą przemawiać jakieś argumenty innego typu. Znaczenie terminów pierwotnych teorii T zadane jest poprzez aksjomaty, ale – o czym świadczy fakt niezupełności T – nie jest to pełna charakterystyka. Można jednak się zastanawiać, do jakiego stopnia dane rozszerzenie φ teorii T doprecyzowuje treść pewnego pojęcia, którego znaczenie jest już (częściowo) zadane przez aksjomaty. Pojęcie „zasadności” zdania wykracza zatem – w tym ujęciu – poza pojęcie „dowodliwości”, będące pojęciem czysto technicznym.

W historii matematyki można wskazać przykłady takich rozważań. Najbardziej znanym przykładem są badania techniczne i dyskusje wokół hipotezy *continuum* (CH)[3], która jest niejako paradygmatycznym przykładem zdania niezależnego.

Analizy w tym artykule będą miały charakter metodologiczny – w tym sensie, że dotyczą raczej sensowności samego problemu uzasadniania niż konkretnych zagadnień matematycznych. Rozważane problemy mają więc postać: „czy sensowne jest pytanie ‘czy φ?’?”, a nie postać: „czy faktycznie φ?”. Na przykład w wypadku CH problem przyjąłby postać: „czy jest sens pytać o prawdziwość i możliwość uzasadnienia CH?”. Dopiero jako pochodne rozważane byłoby pytanie: „ile faktycznie wynosi wartość *continuum*?” i ewentualnie – „jakie argumenty mogą przemawiać na rzecz konkretnej decyzji”?[4]

Aby struktura dalszych rozważań była bardziej przejrzysta, wskażę kilka pytań, jakie pojawiają się w kontekście problemu uzasadniania zdań. Moje analizy opierać się będą na tej roboczej klasyfikacji:

---

[3] Hipoteza *continuum* mówi, że moc zbioru liczb rzeczywistych jest następną liczbą kardynalną po mocy zbioru liczb naturalnych. Oznaczając przez $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$,..., etc. kolejne nieskończone liczby kardynalne (gdzie $\aleph_0$ jest mocą zbioru liczb naturalnych), a moc zbioru liczb rzeczywistych przez c, hipoteza *continuum* przyjmuje postać: $c=\aleph_1$. Sformułowana została ona już przez Cantora w XIX wieku, lecz jej metamatematyczny status jako zdania niezależnego od aksjomatów ZFC ustalili dopiero Gödel i Cohen (Gödel 1940; Cohen 1966). Podobna sytuacja miała miejsce w wypadku pewnika wyboru (AC). Wokół tego aksjomatu (niezależnego od pozostałych aksjomatów teorii mnogości ZF) toczyła się ożywiona dyskusja. Oczywiście argumenty na rzecz jego przyjęcia (bądź odrzucenia) mogły mieć jedynie charakter pozatechniczny, np. pragmatyczny (por. Moore 1982).

[4] Ta problematyka nie jest tu podejmowana. Czytelnik znajdzie dokładniejszą prezentację np. w: Maddy 1988; Wójtowicz 1999.

1) Czy sensowne jest pytanie o uzasadnianie zdań i czy jest ono równoważne z pytaniem o prawdziwość tych zdań (tzn.: jaka jest zależność między problemem uzasadniania zdań a problemem ich prawdziwości, gdy pojęcie „prawdziwości" rozumiane będzie w sposób klasyczny)?

2) Jakie są kryteria uzasadniania (prawdziwości) zdań?

3) Czy te kryteria dotyczą aksjomatów dla teorii matematycznych czy (także) zdań niezależnych od już sformułowanej teorii? Czy problem uzasadniania jest dobrze postawiony tylko dla aksjomatów czy (także) dla zdań niezależnych od teorii? Jaka jest klasa zdań matematycznych, w stosunku do których problem uzasadniania jest sensowny i ciekawy poznawczo?

4) Czy problem uzasadniania dotyczy poszczególnych zdań, czy też całych teorii? Co jest przedmiotem uzasadniania?[5]

5) Jak dalece istotne – w ramach danego stanowiska – dla samej argumentacji dotyczącej uzasadnień dla aksjomatów i zdań niezależnych są racje natury filozoficznej i do jakiego stopnia argumentacja taka jest pochodna w stosunku do stanowiska filozoficznego?

2. „ROBOCZE STANOWISKO MATEMATYKA"

Jakie jest „robocze stanowisko" matematyka w kwestii prawdziwości i uzasadniania zdań matematycznych? Chodzi tutaj przede wszystkim o „prawdziwego matematyka" – tj. specjalisty nie od podstaw matematyki, logiki czy teorii mnogości, ale raczej od równań różniczkowych, teorii prawdopodobieństwa, geometrii różniczkowej etc. Klasyfikacja ta nie ma oczywiście charakteru wartościującego – chodzi jedynie o wskazanie faktu, że pewne gałęzie matematyczne są bliższe „rdzenia" matematyki[6].

[5] Oczywiście pytania o to, jakie zdanie dołączyć i jakie teorie badać, są w jakimś sensie równoważne – pytanie: „czy do danej teorii T dołączyć zdanie φ czy $\neg\varphi$?" można interpretować jako pytanie: „czy wybrać teorię $T+\varphi$, czy teorię $T+\neg\varphi$?". W analizach chodzi zatem nie o udzielenie kategorycznej odpowiedzi, ale raczej o wskazanie punktu ciężkości. Pytanie (4) wiąże się bezpośrednio z pytaniem (3): problem, czy rozpatrywać zdania czy teorie, pojawia się oczywiście dopiero wtedy, gdy dysponujemy już sformułowaną teorią.

[6] Pojawia się pytanie, co to znaczy „zwykła matematyka". Simpson (jeden ze współtwórców programu tzw. matematyki odwrotnej) odpowiada na to pytanie w sposób następujący: „Mówiąc ogólnie, przez zwykłą matematykę rozumiemy będącą w głównym nurcie badań matematycznych matematykę nie-teoriomnogościową, tj. matematykę, z jaką mieliśmy do czynienia, zanim zabrali się za nią specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości. (Lub raczej: matematykę taką, jaka byłaby, gdyby nie zabrali się do niej specjaliści od abstrak-

Zasadne będzie określenie tego stanowiska mianem „zdroworozsądkowego, optymistycznego realizmu”. Oto jego podstawowe cechy[7]:

(1) Matematyka jest nauką o najwyższym stopniu ścisłości i precyzji, a zatem wiedza uzyskana w ramach matematyki ma rangę wiedzy pewnej. Ścisłość, precyzja, jednoznaczność sformułowań – to wszystko powoduje, że odnośnie do wyników matematycznych nie można mieć wątpliwości. Wprawdzie w podstawach matematyki zdarzały się kryzysy, jest to jednak rzecz miniona (ostatni taki kryzys miał miejsce na przełomie wieków, w związku z odkryciem pewnych antynomii w teorii mnogości Cantora[8]). Źródła bowiem tych kryzysów zostały szybko rozpoznane i usunięte[9]. Miały one zresztą znaczenie przede wszystkim dla badań w teorii mnogości i logice; w mniejszym stopniu dla badań prowadzonych w ramach „prawdziwej” matematyki.

(2) Procedury dowodowe w matematyce mają charakter obiektywny, są sprawdzalne, możliwa jest pełna weryfikacja na każdym etapie. To, czy jakieś zdanie ma dowód, czy nie, jest faktem nie budzącym wątpliwości[10].

(3) Argumentacja naiwno-indukcyjna przekonuje nas, że w matematyce sprzeczności nie ma – świadczy o tym olbrzymia liczba dowodzonych twierdzeń, w których nie wykryto sprzeczności (sprzeczność zaś w teorii Cantora pojawiła się na poziomie elementarnym). Można postawić spekulatywną hipotezę, że gdyby sprzeczność faktycznie istniała w matematyce, wówczas już dawno by się pojawiła. Można także spekulować, że nawet jeśli taka sprzecz-

---

cyjnej teorii mnogości). Zwykła matematyka obejmuje zatem geometrię, teorię liczb, rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, analizę rzeczywistą i zespoloną, przeliczalną algebrę, typologię zupełnych ośrodkowych przestrzeni metrycznych, logikę matematyczną i teorię obliczeń. Nie obejmuje ona abstrakcyjnej teorii mnogości, abstrakcyjnej analizy funkcjonalnej, topologii *ogólnej i algebry nieprzeliczalnej*” (Simpson 1984, s. 783). Nie podejmuję tu analizy pojęcia „zwykłej matematyki”; poprzestanę na tego typu ogólnej, roboczej charakterystyce.

[7] Chodzi tu o prezentację pewnego wyidealizowanego stanowiska, a nie o wskazanie konkretnego przedstawiciela.

[8] Chodzi tu o np. paradoks zbioru wszystkich zbiorów i o paradoks zbioru wszystkich liczb porządkowych.

[9] Przyczyną np. paradoksu Russella jest zbyt ogólny schemat istnienia zbiorów: dla każdej formuły φ obowiązywać miał aksjomat $\exists x \forall y (y \in x \Leftrightarrow \varphi(y))$ stwierdzający istnienie zbioru obiektów o własności φ. Dla formuły $\varphi(x) = x \notin x$ powstaje paradoks. Usuwa się go, modyfikując aksjomat istnienia zbiorów do postaci $\forall z \exists x \forall y [y \in x \Leftrightarrow (\varphi(y) \wedge y \in z)]$.

[10] Należy tu dodać jedno drobne zastrzeżenie: brak jest bowiem zgody w sprawie statusu tzw. dowodów komputerowych. Problem ten jednak jest (przynajmniej na razie) problemem marginalnym.

ność by się pojawiła, to tylko w jakimś małym fragmencie, i że można byłoby dość łatwo przeciwdziałać temu, nie naruszając zasadniczej struktury matematyki.

(4) Ponieważ matematyka dostarcza wiedzy pewnej, więc problem uzasadnienia jest rozwiązany w sposób trywialny. Po prostu sama natura matematyki powoduje, iż jej twierdzenia mają charakter absolutny, niepodważalny. Uzasadnieniem zdania matematycznego jest to, że można dla niego sformułować dowód, wykorzystując uznane w środowisku matematyków procedury dowodowe i udowodnione wcześniej twierdzenia.

(5) Dla zdroworozsądkowego realisty pytanie: „czy twierdzenia matematyczne są prawdziwe?" jest równie banalne, jak np. pytanie: „czy istnieje świat?" – obie odpowiedzi są w oczywisty sposób twierdzące. Matematyka opisuje pewną rzeczywistość: teoria funkcji rzeczywistych opisuje własności liczb rzeczywistych, arytmetyka Peana opisuje liczby naturalne, teoria grup opisuje pewne struktury algebraiczne etc. Zdania matematyczne nie są fikcjami, nie dotyczą też jedynie przekształcania znaczków – dotyczą pewnej obiektywnej rzeczywistości matematycznej.

3. PROBLEM UZASADNIANIA Z PUNKTU WIDZENIA TRADYCYJNYCH STANOWISK FILOZOFII MATEMATYKI

3.1. Skrajny formalizm

Skrajny formalizm jest stanowiskiem, w myśl którego matematyka jest nauką o pewnych formach graficznych czy inaczej – o wynikach pewnych operacji syntaktycznych dokonywanych na ciągach symboli. System matematyczny jest więc utożsamiany z pewnym czysto formalnym systemem, w którego ramach dokonujemy operacji syntaktycznych. Zdania matematyczne nie zawierają treści – co najwyżej treść metamatematyczną, traktowaną jako wiedza o systemach symbolicznych. Także semantyczny fragment metateorii – dotyczący modeli dla teorii – będzie miał dla skrajnego formalisty sens tylko o tyle, o ile da się go sformalizować i sprowadzić do pewnych metametatwierdzeń[11]. Można zatem powiedzieć, że w myśl stanowiska formali-

[11] Metatwierdzenia (czyli twierdzenia metateorii T_m) dotyczą np. modeli dla teorii T. Metametatwierdzenia dotyczą składni metateorii T_m, traktowanej (zgodnie ze stanowiskiem formalistycznym) jako niezinterpretowany system formalny.

stycznego, matematyka to swoista „gra szklanych paciorków", pozbawiona przedmiotowych odniesień zabawa intelektualna.

Dla formalisty kategoria „prawdziwości" nie jest właściwą kategorią opisu zdań matematycznych. Kiedy bowiem mówimy o prawdziwości (w klasycznym sensie – przyjętym w tym artykule), wówczas mamy na myśli pewną relację łączącą obiekty językowe (wyrażenia) z obiektami pozajęzykowymi, tj. relację między językiem a rzeczywistością pozajęzykową. Oczywiście formalista odrzuca istnienie rzeczywistości matematycznej – zdania matematyczne nie opisują żadnych obiektów matematycznych. Pytanie o prawdziwość nie ma sensu[12].

Czy jednak w związku z tym pytanie o uzasadnianie zdań matematycznych ma sens – i jaki? Pytanie o uzasadnianie dla formalisty przyjmuje postać: „Czy warto badać takie-a-takie teorie, systemy formalne? Czy warto dołączyć do naszych aksjomatów T jakiś nowy aksjomat φ, i w ten sposób wzbogacić teorię?". Uzasadniając zdanie φ, nie dokonuje się oczywiście tym samym „deklaracji ontologicznej" – uzasadnienie przyjęcia tego zdania nie jest uzasadnieniem prawdziwości tego zdania. Dla formalisty „uzasadnić zdanie matematyczne" nie znaczy „pokazać, że jest prawdziwe (czy nawet: prawdopodobne)", lecz może jedynie znaczyć: „pokazać, że jest ono interesujące czy owocne z punktu widzenia rozwoju danej dyscypliny matematycznej". Formalista oczywiście jest świadomy faktu, że matematycy wiążą z pojęciami technicznymi pewne wyobrażenia, jest świadom istnienia zjawisk psychologicznych towarzyszących pracy matematyka. Nie przypisuje im jednak obiektywnych korelatów. W szczególności takie terminy, jak „treść pojęć matematycznych", „znaczenia pojęć pierwotnych teorii", interpretuje jako terminy psychologiczne (bądź – w skrajnym wypadku – jako terminy pozbawione sensu).

Uzasadnianie aksjomatów nie może się opierać na założeniu istnienia pozajęzykowej rzeczywistości matematycznej. Racje, które mogą przemawiać

[12] Gwoli ścisłości: dla formalisty oczywiście sensowne będą pytania o prawdziwość pewnych zdań metamatematycznych – dotyczących np. tego, czy w danej teorii T da się formalnie udowodnić dane zdanie φ, etc. Klasa jednak tych pytań będzie dość wąska. Sensowne będzie pytanie: „czy w PA da się udowodnić zdanie φ?", ale nie pytanie: „czy zdanie φ wyraża pewną prawdę o liczbach naturalnych?". Stanowisko formalistyczne zajmuje np. Cohen. W odniesieniu do problemu *continuum* twierdzi on, że zastanawianie się nad tym, jaka jest „prawdziwa wartość *continuum*", nie ma sensu. Problem ten bowiem jest rozwiązany poprzez ukazanie metamatematycznego statusu CH jako zdania niezależnego (por. Cohen 1971).

za przyjęciem danej aksjomatyki, są innego typu. Dla formalisty skrajnego jedyne sensowne względy, jakie tu mogą wchodzić w grę, przypominają racje, dla których warto grać raczej w szachy czy brydża niż w wojnę albo w kółko i krzyżyk. Pewne teorie są ciekawe, inne nie, niektóre teorie dostarczają interesujących łamigłówek do rozwiązania, inne zaś nie. Warto się zajmować tymi ciekawymi. Kryterium uznania problemu „czy należy badać teorię T" za sensowny jest to, jak dalece teoria T jest interesująca z punktu widzenia matematyki, dowodzenia nowych twierdzeń, dostarczania nowych metod dowodowych, tworzenia nowych pojęć etc. Jednakże kategoria „warto się zajmować" ma charakter jedynie psychologiczny; to, że warto się zajmować daną teorią, wynika jedynie stąd, że dostarcza ona ciekawych zagadnień, że ma bogatą strukturę – a nie stąd, że teoria ta cokolwiek opisuje.

Oczywiście formalista zdaje sobie sprawę z faktu zastosowań matematyki: przydatność teorii będzie dostarczać pragmatycznej motywacji do podjęcia takich, a nie innych badań. Formalista jednak nie zadaje sobie pytania, dlaczego czysto formalne łamigłówki umożliwiają (czy ułatwiają) opisanie świata. Formalista może uznać fakt stosowalności za pierwotny, nieredukowalny – za pewną zasadniczą cechę rzeczywistości. Nie wynika ona jednak stąd, iż matematyka opisuje strukturę rzeczywistości, gdyż matematyka po prostu nic nie opisuje. Co najwyżej może okazać się przydatnym narzędziem, a pytanie o to, dlaczego matematyka jest takim narzędziem (dlaczego świat jest matematyczny), nie dotyczy już samej matematyki i jest nieistotne dla dyskusji.

Reasumując – stanowisko formalistyczne opiera się na pewnych założeniach filozoficznych, które niejako determinują odpowiedzi na pytania o prawdziwość i uzasadnianie zdań:

(1) Matematyka jest systemem niezinterpretowanym – dlatego nie ma sensu stawiać pytania o prawdziwość zdań matematycznych. Obiekty matematyczne nie istnieją.

(2) Matematyka – jako system pozbawiony przedmiotowego odniesienia – to swoista „gra szklanych paciorków". Racje na rzecz badania takiego, a nie innego systemu mają charakter psychologiczno-pragmatyczny – w tym sensie, że niektóre systemy są ciekawsze od innych. Pojęcie „uzasadniania" odwołuje się jedynie do tego typu racji. Poza tym jedynym kryterium jest niesprzeczność – wszystkie systemy niesprzeczne są równoprawne.

(3) Sensowne są jedynie pytania metateoretyczne – pytania dotyczące metamatematycznego statusu zdań matematycznych – a nie pytania dotyczące tego, czy zdania te prawdziwie opisują rzeczywistość matematyczną.

3.2. Formalizm Hilberta

Na przełomie XIX i XX wieku w matematyce pojawiły się pewne trudności natury fundamentalnej – mówi się w tym kontekście często o kryzysie w podstawach matematyki. Toczyła się wówczas żywa dyskusja dotycząca formalizacji matematyki, dopuszczalnych metod dowodowych, właściwej aksjomatyzacji dla teorii mnogości, pojawiły się nurty intuicjonistyczne, kwestionujące prawomocność klasycznych zasad logicznych itp. W atmosferze tej dyskusji i poznawczego niepokoju, jaki wzbudzał problem podstaw i metod matematyki, Hilbert sformułował swój program, którego celem było ugruntowanie matematyki, uprawomocnienie jej metod dowodowych oraz wyjaśnienie statusu problematycznych pojęć.

Hilbert wyróżnił w matematyce zespół pojęć, które są dobrze ugruntowane (o nich mówią tzw. *zdania realne*), oraz zespół pojęć – takich jak pojęcie „nieskończoności” – które (same w sobie problematyczne) miały pełnić jedynie funkcję narzędzi. Zdania *idealne*, wykorzystujące te pojęcia, miały dla Hilberta status zdań pomocniczych, służących do dowodzenia zdań realnych[13].

Rozróżnienie to staje się punktem wyjścia programu Hilberta. Opiera się on zasadniczo na teorii dowodu. W programie Hilberta można wyróżnić trzy etapy (por. np. Simpson 1988):

(1) Pierwszy etap polega na wyróżnieniu nie budzącego wątpliwości, finitystycznego fragmentu matematyki. W tej wyróżnionej części matematyki musimy być w stanie sformalizować przynajmniej elementarne operacje teorioliczbowe i operacje na skończonych ciągach symboli. Ten fragment matematyki jest ugruntowany w sposób pewny.

(2) W drugim kroku cała matematyka (włączając w to oczywiście także matematykę idealną) ma być sformalizowana w jednym systemie formalnym, którego formuły są skończonymi ciągami symboli. Formuły będzie można zatem opisywać i analizować, używając metod finitystycznych, wyróżnionych w pierwszym kroku.

[13] Jako przykłady takich idealnych, jedynie pomocniczych obiektów służyć mogą: wielkości nieskończenie małe, stosowane w rachunku różniczkowym i całkowym, czy punkt w nieskończoności, występujący w geometrii.

(3) Ostatni krok ma polegać na udowodnieniu niesprzeczności tego systemu oraz jego nietwórczości względem klasy zdań realnych[14] za pomocą metod finitystycznych (czyli metod matematyki realnej)[15]. W ten sposób wyjaśniony zostanie status pojęć idealnych i usunie się źródło trudności i niepewności.

Pytanie o uzasadnianie zdań jest więc pytaniem sensownym. Rozpada się ono niejako na dwa podproblemy:
(a) uzasadnianie zdań realnych,
(b) uzasadnianie zdań idealnych.

Ad (a) Zdania realne to zdania dotyczące konkretnych skończonych obiektów (takich jak ciągi symboli). Fakt, że zdania te możemy uzasadniać, Hilbert wyjaśnia poprzez odwołanie się do pewnej podstawowej zdolności, pewnej intuicji danej wraz z tymi obiektami. Mówi o tym wyraźnie następujący fragment:

> Już [Kant] uczył [...], że matematyka posiada treść pewną i niezależną od jakiejkolwiek logiki i że w związku z tym nigdy nie może zostać ugruntowana w oparciu o samą tylko logikę. Dlatego też próby Fregego i Dedekinda nie doprowadziły do niczego. Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś w przedstawieniu (*in der Vorstellung*): [mianowicie] pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako doświadczane bezpośrednio przed wszelkim myśleniem. [...] W szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt [...] jest bezpośrednio jasny i rozpoznawalny (Hilbert 1926, s. 170-171; tłum. za: Murawski 1986).

Ad (b) Zdania idealne pełnią jedynie funkcję pomocniczą. Są jednak dopuszczalne, o ile uda się (metodami finitystycznymi) wykazać, iż ich dołączenie do matematyki realnej jest nietwórcze. Kryterium uznawania tych zdań

---

[14] Mówimy, że teoria T*, sformułowana w języku L*, jest nietwórcza w stosunku do teorii T, sformułowanej w języku L (gdzie $L \subseteq L^*$ oraz $T \subseteq T^*$), względem klasy zdań Φ, jeśli dowolne zdanie $\varphi \in \Phi$, które jest konsekwencją T*, jest też konsekwencją T. Innymi słowy: wzbogacenie teorii T do T* nie pozwala na udowodnienie żadnych nowych zdań z klasy Φ.

[15] Hilbert nie sprecyzował pojęcia „zdania realnego" czy „systemu dopuszczalnego z finitystycznego punktu widzenia". Pojęcia te nie miały charakteru technicznego, stąd zaś wynikają pewne trudności interpretacyjne dotyczące tego, co dokładnie Hilbert miał na myśli. Najczęściej jednak uważa się, że program Hilberta w oryginalnej postaci nie jest możliwy do przeprowadzenia, co pokazują twierdzenia Gödla. Rozważane są natomiast zmodyfikowane wersje programu Hilberta (por. np. Sieg 1988 czy Simpson 1988). Dla prowadzonych tu analiz te fakty nie mają jednak zasadniczego znaczenia.

ma zatem charakter techniczny: uzasadnieniem dopuszczalności (i pożyteczności) ich stosowania jest rola tych zdań w zdobywaniu wiedzy matematycznej dotyczącej zdań realnych. Fakt, że jest to dopuszczalne, wynika z (postulowanej przez Hilberta) nietwórczości matematyki idealnej nad realną względem klasy zdań realnych.

Zdania realne i idealne są więc uzasadniane na podstawie innych kryteriów. Inaczej przedstawia się też problem prawdziwości w wypadku zdań realnych i idealnych. Pytanie o prawdziwość zdań realnych ma taki sam status, jak pytanie o prawdziwość zdań mówiących o liczbie krzeseł. Kategoria prawdziwości może być więc stosowana do zdań realnych. Tymczasem w wypadku zdań idealnych jest inaczej: Hilbert pisze, że takie pojęcia, jak „nieskończoność”, nie odnoszą się do niczego w rzeczywistym świecie. Zdania te pełnią jedynie funkcję czysto pomocniczą; tym samym problem ich prawdziwości się nie pojawia.

Jeśli chodzi o problem zdań niezależnych, to należy pamiętać o stwierdzeniu Hilberta, że w matematyce nie ma żadnego *ignorabimus* i że wszystkie dobrze postawione problemy będą mogły zostać rozwiązane. W szczególności Hilbert sam próbował (bezskutecznie) rozwiązać problem *continuum*, przekonany o tym, że jest to problem rozstrzygalny. Tym samym – można przypuszczać – nie uznałby za istotny problemu zdań niezależnych.

Punktem wyjścia Hilberta jest jego epistemologia: w uzasadnianiu zdań realnych odwołuje się on do intuicji pewnego rodzaju[16]. Także odmówienie zdaniom idealnym treści jest decyzją o charakterze filozoficznym – niejako zastosowaniem brzytwy Ockhama do zdań, których treść wykracza poza konteksty skończone. Hilberta można zatem nazwać nominalistą – w każdym razie w stosunku do obiektów matematyki idealnej, których istnienie odrzuca.

Reasumując – program Hilberta opiera się na następujących założeniach natury filozoficzno-metodologicznej:

(1) Bezpośrednie źródło wiedzy matematycznej (intuicja matematyczna) dostarcza wiedzy ograniczonej do skończonych, konkretnych obiektów.

(2) Pojęciu „nieskończoności” nie odpowiada nic w rzeczywistości; zdania, w których mowa o nieskończoności, mają charakter pomocniczy. W matematyce występują zatem pojęcia, które należy traktować w sposób czysto instrumentalny.

[16] Epistemologię Hilberta Gödel określa jako efekt ograniczenia czasoprzestrzennej intuicji Kanta do konfiguracji skończonej liczby dyskretnych obiektów (Gödel 1972, s. 271), a program Hilberta jako „materialistyczną próbę ugruntowania matematyki klasycznej”.

(3) Należy zadbać o zachowanie całej siły dowodowej (i siły formułowania pojęć) matematyki. Hilbert odrzuca więc intuicjonistyczne przeformułowania matematyki, które osłabiają jej siłę dowodową.

(4) Procedura ugruntowania matematyki ma zasadniczo charakter syntaktyczny.

3.3. Instrumentalizm

„Bliskim krewnym” formalizmu jest instrumentalizm[17]. O ile jednak formalista nie interesuje się światem, tylko intelektualnymi „łamigłówkami”, o tyle instrumentalizm stanowi próbę odpowiedzi na pytanie o rolę matematyki w naukach przyrodniczych.

W myśl stanowiska instrumentalistycznego, teorie matematyczne mają status narzędzi, za pomocą których opisujemy świat, które pomagają w zdobywaniu wiedzy, ale same wiedzy na żaden temat nie dostarczają. Podobnie zatem jak (dla fizycznego instrumentalisty) obiekty teoretyczne stanowią jedynie pewne konstrukty logiczne, ułatwiające opis i wyjaśnienie danych empirycznych[18] – tak dla matematycznego instrumentalisty status taki mają teorie matematyczne. Matematyczne instrumentarium służy jedynie do tego, aby ułatwić nam rozumowania i umożliwić skrótowe opisanie sytuacji fizycznej. Matematyka jest więc jedynie czymś w rodzaju składni języka fizyki, zbiorem konwencji umożliwiających ekonomiczny opis zjawisk. Sama jednak jest pozbawiona przedmiotowego, pozajęzykowego odniesienia. Podobnie jak dla instrumentalisty fizycznego nie ma układów kwantowych – tak dla instrumentalisty matematycznego nie ma też przestrzeni Hilberta, w której te układy kwantowe są opisywane i reprezentowane.

Pytanie o prawdziwość aksjomatów czy zdań matematycznych jest – według instrumentalisty – źle postawione (lub, przy innej interpretacji, trywialne: zdania matematyczne niczego nie dotyczą). Interesujące i sensowne jest natomiast pytanie o uzasadnianie zdań (czy teorii) matematycznych; o to,

[17] Przedmiotem analizy jest tutaj instrumentalizm matematyczny, który *a priori* nie musi być także instrumentalizmem fizycznym. Możliwe jest bowiem stanowisko, w myśl którego teorie fizyczne stanowią prawdziwy opis rzeczywistości; jednakże instrumentarium matematyczne stanowi jedynie skuteczne narzędzie.

[18] W (dużym) uproszczeniu, *credo* instrumentalisty brzmi: „Świat jest taki, że w trakcie eksperymentu na kliszy pojawia się – w pewnych określonych okolicznościach – ślad. Wtedy, dla wygody i oszczędności opisu, mówimy, iż ślad pozostawił elektron”.

jakie zdania matematyczne winny być przyjęte jako aksjomaty bądź dołączone do już istniejących teorii matematycznych.

Kryterium uzasadniania stanowi użyteczność. Dane zdanie (czy zespół zdań) można uważać za uzasadnione, jeśli jest ono użytecznym narzędziem w naukach przyrodniczych (oczywiście nie wynika stąd jego prawdziwość!). Racje za przyjęciem danego aksjomatu (teorii) mają więc charakter pragmatyczny. Przyjmuje się bowiem te konwencje (zdania pomocnicze), które okazują się przydatne w opisie zjawisk przyrodniczych. Pojęcie „uzasadnienia" nie wiąże się zatem z takimi pojęciami, jak „treść teorii", „znaczenie pojęć matematycznych", lecz jedynie z pojęciem „przydatności".

Instrumentalista posługuje się teoriami, które stanowią – można powiedzieć – pewne całości (narzędziem instrumentalisty jest teoria matematyczna, stosowana w teorii empirycznej, pewien – na ogół złożony – zespół pojęć). Instrumentalista ocenia zatem nie poszczególne zdania matematyczne, lecz całe teorie matematyczne[19]. Można powiedzieć, że „kwantem oceny metodologicznej" jest teoria. Dlatego, jeśli pewne zdanie φ jest niezależne od pewnej teorii T, to dla instrumentalisty nie jest ważny problem, czy samo φ jest uzasadnione czy nie, czy lepszym doprecyzowaniem znaczeń pojęć matematycznych występujących w teorii T jest φ, czy $\neg\varphi$. Do takich pojęć, jak „precyzacja znaczeń", instrumentalista w ogóle się nie odwołuje. Ważny wszakże jest dla niego problem, która z teorii: $T+\varphi$ czy $T+\neg\varphi$, jest bardziej użyteczna z punktu widzenia nauk empirycznych. Tym kryterium instrumentalista będzie się kierował w swoich wyborach. Sama w sobie niezależność nie jest więc dla niego interesująca. Nie ma sensu pytanie o to, czy należy przyjąć zdanie φ, jeśli przyjęcie tego zdania nie będzie miało znaczenia dla zastosowań matematyki. Problem uzasadniania jest zatem z natury rzeczy ograniczony do takich teorii matematycznych, które mogą mieć zastosowanie w naukach przyrodniczych. Jeśli dodanie np. do aksjomatów ZFC jakiegoś zdania niezależnego σ, dotyczącego np. własności liczb rzeczywistych, może mieć znaczenie z punktu widzenia zastosowań, to instrumentalista będzie skłonny rozważać racje na rzecz przyjęcia tego zdania. Natomiast w wypadku zdań niezależnych, które nie mają (bezpośredniego) zastosowania w naukach empirycznych, problem ten w ogóle nie będzie analizowany i zostanie uznany za nieistotny.

[19] Oczywiście, jeśli teoria ma skończony zbiór aksjomatów, to problemy te są równoważne. Najczęściej jednak mamy do czynienia z teoriami innego typu.

Dla stanowiska instrumentalisty znaczenie mają następujące przesłanki o charakterze filozoficzno-metodologicznym:

(1) Pewne składniki (fragmenty) teorii fizycznych można traktować czysto instrumentalnie, jako pozbawiony treści zespół zdań pomocniczych. Matematyka odgrywa właśnie rolę systemu konwencji, zdań pomocniczych.

(2) Matematyka stanowi więc jedynie zespół zdań pomocniczych, pozbawionych odniesienia w rzeczywistości pozajęzykowej. Nie istnieją obiekty matematyczne, a kategoria „prawdziwości” nie ma zastosowania do zdań matematycznych.

(3) Matematyka występuje jako istotny składnik teorii fizycznych. Tym samym zasadne jest postawienie pytania, które teorie i pojęcia matematyczne są ważne. Zagadnienie uzasadniania zdań matematycznych jest zatem dobrze postawione, kryterium zaś stanowi rola danej teorii w naukach empirycznych.

3.4. Konceptualizm

Dla konceptualisty matematyka jest jedynie konstrukcją uprawiającego ją matematyka (matematyków). Obiekty matematyczne mają zatem ontologiczny status obiektów mentalnych.

Zasadne jest rozróżnienie ontologicznej i metodologicznej tezy konceptualizmu:

(1) Teza ontologiczna dotyczy istnienia i sposobu istnienia obiektów matematycznych, jako obiektów mentalnych, konstruowanych przez podmiot poznający.

(2) Teza metodologiczna dotyczy sposobu uprawiania matematyki i jest związana z tezą ontologiczną. Fakt, że obiekty matematyczne są naszymi konstrukcjami, nakłada na nas pewne ograniczenia w sposobie uprawiania matematyki. Dopuszczalne są tylko metody konstruktywne, w szczególności należy odrzucić oparte na prawie wyłączonego środka niekonstruktywne dowody istnienia[20]. Niesie to za sobą także ograniczenia co do dopuszczalnych sposobów definiowania obiektów – niedopuszczalne stają się np. definicje niepredykatywne[21].

---

[20] Przykładem takiego dowodu, odrzucanego przez intuicjonistów, jest dowód twierdzenia, że istnieją liczby niewymierne a, b takie, że a^b jest liczbą wymierną. Połóżmy bowiem $a=b=\sqrt{2}$. Wtedy albo $c=a^b$ jest liczbą wymierną (co kończy dowód), albo nie jest liczbą wymierną. Jeśli jednak c nie jest liczbą wymierną, to $c^a = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ jest liczbą wymierną. Udowodniliśmy więc, że istnieją takie dwie liczby, ale nie wiemy, które.

[21] Są to definicje, w których pewien obiekt O jest definiowany przez odwołanie się do własności całego ogółu obiektów $\mathbf{O}$, którego O jest elementem. Przykładem takiej definicji

Twierdzenia matematyki, według konceptualisty, odnoszą się do konstruowanych przez niego obiektów mentalnych. Zdania matematyczne są prawdziwe lub nie; korelatami terminów matematycznych są pewne obiekty mentalne. Tym samym pytanie o prawdziwość zdań matematycznych jest dobrze postawione, a stąd wynika, iż także pytanie o uzasadnianie zdań matematycznych jest sensowne.

Kryteria, jakimi posługuje się konceptualista, są pochodne w stosunku do ontologicznej tezy konceptualizmu; są to zatem racje natury filozoficznej. W szczególności konceptualista opowiada się za konstruktywistyczną wizją matematyki, czego wyrazem jest matematyka intuicjonistyczna we wszelkich jej odmianach, takich jak matematyka konstruktywistyczna, matematyka obliczalna Bishopa, ultrafinityzm etc.[22]

Intuicjonizm w największym stopniu (spośród przedstawianych w tym artykule stanowisk) odwołuje się do argumentacji i racji natury filozoficznej. Ontologiczna teza dotycząca sposobu istnienia obiektów matematycznych ma zasadniczy wpływ na przyjmowane przez intuicjonistów aksjomaty, reguły wnioskowania czy zasady metodologiczne[23]. Rozstrzygnięcia natury filozoficznej dotyczą nie tylko tego, czy dane pytanie uznamy za sensowne. Dostarczają także narzędzi do rozstrzygania prawdziwości konkretnych zdań matematycznych czy przyjęcia konkretnych aksjomatów lub reguł wnioskowania (z punktu widzenia intuicjonisty nie jest np. dopuszczalna zasada wyłączonego środka). Można powiedzieć, że intuicjonizm jest „rewizjonistyczny” – w tym sensie, że w imię pewnych zasad filozoficznych, intuicjonista gotów jest zrezygnować z uprawiania matematyki w postaci klasycznej, czyli doprowadzić do rewizji praktyki matematycznej[24]. Racje filozoficzne są zatem dla intuicjonisty ważniejsze niż racje wewnątrzmatematyczne czy racje wynikające z faktu zastosowań matematyki w naukach przyrodniczych.

---

jest teoriomnogościowa definicja zbioru liczb naturalnych jako najmniejszego zbioru spośród wszystkich zbiorów zawierających zero i domkniętych na operację następnika. Konstruktywista odrzuca taką definicję: według niego pojęcie ogółu obiektów **O** jest sensowne dopiero wtedy, gdy uprzednio zostanie zdefiniowany obiekt *O*.

[22] Zwięzły opis tych stanowisk można znaleźć np. w: Murawski 1995.

[23] Matematyka wyrosła z inspiracji intuicjonistycznych nie stanowi jednolitego tworu. Tym samym reprezentanci poszczególnych kierunków będą kierować się nieco innymi racjami i przesłankami filozoficznymi. Nie będę ich tu analizować, ponieważ przedmiotem analizy jest tu inny problem: c z y w o g ó l e racje i argumenty natury filozoficznej są tu brane pod uwagę.

[24] Tak stanowisko intuicjonistyczne ocenia np. Maddy i z tego powodu je odrzuca – przyjmuje bowiem tezę metodologiczną, iż filozofia matematyki powinna traktować praktykę matematyczną *at face value*, a nie dążyć do jej reformy.

3.5. Realizm Quine'a[25]

Quine przyjmuje stanowisko realistyczne w odniesieniu do przedmiotów matematycznych. Opiera się ono na kilku następujących podstawowych założeniach filozoficznych i metodologicznych:

(1) Quine odrzuca podział zdań na analityczne i syntetyczne, który to podział stanowi podstawę tezy, iż zdania matematyki mają czysto analityczny charakter i stanowią jedynie zbiór konwencji dotyczących języka nauki.

(2) Quine przyjmuje w związku z tym holistyczne podejście w traktowaniu zobowiązań ontologicznych teorii. Pomiędzy nauką a ontologią istnieje ciągłość – w tym sensie, że pytania o istnienie obiektów fizycznych, teoretycznych i abstrakcyjnych są pytaniami tej samej klasy. Nie jest – według niego – uzasadniony „częściowy" realizm, w myśl którego interpretację mają tylko niektóre terminy występujące w teorii fizycznej (a mianowicie terminy odnoszące się do obiektów fizycznych), natomiast inne terminy występujące w teorii fizycznej (terminy matematyczne) są pozbawione interpretacji. Należy więc uznać istnienie wszystkich obiektów, do których odnosi się dana teoria.

(3) Kryterium tego, kiedy dana teoria odnosi się do obiektów pewnego typu, stanowi kwantyfikacja. W skład zobowiązań ontologicznych teorii wchodzą wszystkie obiekty znajdujące się w zakresie zmienności zmiennych. Quine nie rozróżnia sposobów istnienia – przedmioty różnić się mogą własnościami (np. jedne znajdują się w czasoprzestrzeni, inne nie), ale nie sposobem istnienia.

(4) Matematyka stanowi zasadniczą, nieusuwalną część teorii fizycznych. A zatem przyjęcie stanowiska realistycznego w stosunku do teorii empirycznej nakłada na nas obowiązek uznania także zobowiązań ontologicznych tej teorii „w świecie obiektów matematycznych". Quine zatem – podobnie jak instrumentalista – wychodzi od faktu, iż matematyczne instrumentarium jest fragmentem teorii empirycznych. Zupełnie inaczej jednak niż instrumentalista, interpretuje matematyczne zdania egzystencjalne – interpretuje je *at face value*, bezpośrednio, a nie jako pozbawione treści zdania pomocnicze.

Z punktu widzenia Quine'a pytanie o prawdziwość zdań matematycznych jest sensowne, podobnie jak pytanie o to, czy prawdziwe jest zdanie dotyczące cząstek elementarnych, gęstości wody czy dowolna inna hipoteza fizyczna. Pytania ontologiczne (w szczególności pytania o istnienie obiektów

[25] Szczegółową prezentację argumentacji Quine'a dotyczącej istnienia obiektów matematycznych można znaleźć np. w: Wójtowicz 1997.

matematycznych) stanowią ciągle przedłużenie pytań naukowych. Kategoria prawdziwości może być więc stosowana do zdań matematycznych na równi ze zdaniami dotyczącymi obiektów fizycznych (obiekty te bowiem różnią się nie sposobem istnienia, ale własnościami). Konsekwentnie, zasadne jest także pytanie o uzasadnianie.

Kryterium prawdziwości zdań matematycznych jest fakt, czy występują jako fragment teorii empirycznych. Należy uznać za prawdziwe takie zdania, dla których można znaleźć empiryczne potwierdzenie – dotyczy to zarówno zdań o treści „czysto fizycznej", jak i zdań matematycznych.

Należy tu zauważyć, że Quine nie absolutyzuje swojej teorii zobowiązań ontologicznych. Zobowiązania ontologiczne dotyczą zawsze poszczególnych teorii. Pytania, jakie się pojawiają w tym kontekście, nie dotyczą absolutnego istnienia obiektów (fizycznych czy matematycznych), ale tylko ich istnienia relatywnie do danej teorii T. Dlatego nie ma sensu pytanie o absolutną prawdziwość zdań matematycznych, lecz jedynie w kontekście przyjmowanych w nauce teorii empirycznych[26].

Zasięg kryterium Quine'a ogranicza się do niektórych fragmentów matematyki. Aby dane zdanie matematyczne można było oceniać pod względem prawdziwości, musi ono występować jako fragment instrumentarium w pewnej teorii empirycznej. Tym samym tylko zdania matematyki stosowanej (przy całej nieostrości tego pojęcia) podlegają temu kryterium. Teorie matematyki czystej mogą pełnić co najwyżej funkcję porządkującą czy upraszczającą teorie matematyki stosowanej, poza tym stanowią jedynie systemy niezinterpretowane[27]. W ujęciu Quine'a nie ma więc sensu stawiać pytania o prawdziwość tych teorii (tj. o to, czy mają interpretację), tak jak nie ma sensu stawiać pytania o to, czy reguły jakiejś gry mają interpretację. W odniesieniu do tych (niezinterpretowanych) zdań problem uzasadniania się nie pojawia.

Stanowisko Quine'a prowadzi zatem do wyróżnienia pewnej grupy pytań sensownych. Nie ma sensu zastanawiać się nad prawdziwością czy uzasadnieniem zdań matematycznych, które nie mają związku z zastosowaniami.

---

[26] Nie należy tego oczywiście rozumieć jako tezy, że zdania matematyczne są uzasadniane empirycznie. Status procedur dowodowych w matematyce pozostaje nienaruszony. Względy empiryczne zaś świadczą o tym, która teoria fizyczna winna być uznana za teorię zinterpretowaną i – konsekwentnie – jakie obiekty (w tym matematyczne) winny być włączone do naszej ontologii.

[27] Opinię taką Quine wyraża np. w: Quine 1984.

Pod tym względem stanowisko Quine'a jest podobne do stanowiska instrumentalistycznego[28].

Stanowisko filozoficzne (i metafilozoficzne) Quine'a motywuje więc konkretne decyzje metodologiczne (warto uprawiać przede wszystkim taką matematykę, jaka znajduje zastosowanie w teoriach fizycznych). To, jak traktowane jest zagadnienie prawdziwości i uzasadniania zdań matematycznych[29], wynika z następujących tez Quine'a:

(1) Pomiędzy pytaniami naukowymi a ontologicznymi nie ma różnicy rodzaju, lecz jedynie różnice stopnia; są one pytaniami tego samego typu i istnieje pomiędzy nimi „ciągłe" przejście.

(2) Teorie naukowe należy interpretować holistycznie.

(3) Należy uznać pełne zobowiązania ontologiczne teorii; nie jest uzasadniony częściowy realizm.

(4) Kryterium istnienia stanowi kwantyfikacja (należy uznać istnienie tych obiektów, które są wartościami zmiennych).

3.6. Realizm Gödla[30]

Reprezentantem innego typu stanowiska realistycznego jest Gödel. Teorie matematyczne opisują, według niego, pewien świat matematyczny, istniejący niezależnie od badającego go matematyka. Prawdy matematyczne dotyczą pojęć, które „tworzą obiektywną rzeczywistość, której nie możemy tworzyć ani zmieniać, ale jedynie postrzegać i opisywać" (Gödel 1951, s. 320). Gödel zdecydowanie odrzuca interpretacje instrumentalistyczne czy syntaktyczne, w myśl których matematyka jest jedynie składnią języka nauk empirycznych czy jedynie narzędziem ułatwiającym opis sytuacji fizycznej. Matematyka dzieli się, według Gödla, na obiektywną i subiektywną: matematyka subiektywna dotyczy zdań dowodliwych w danych systemach formalnych, a matematyka obiektywna składa się z prawd matematycznych opisujących rzeczywistość matematyczną. Pytanie o prawdziwość zdań matematycznych jest więc sensowne – tak jak każde pytanie o prawdziwość zdania dotyczącego rzeczywistości.

---

[28] Podobieństwo polega oczywiście tylko na uznaniu faktu, iż klasa sensownych problemów ma związek ze stosowalnością matematyki.

[29] Przypominam, że celem jest rekonstrukcja logiczna – zatem nawet jeśli dane zagadnienie nie było *explicite* rozważane przez danego autora, staram się pokazać, jakie tezy na temat problemu uzasadniania wynikają z przyjęcia jego stanowiska.

[30] Stanowisko Gödla prezentowane jest tu szkicowo. Dokładniejszą prezentację można znaleźć w: Wójtowicz 2002.

Pojawia się zatem pytanie, jak uzasadniać prawdziwość zdań matematycznych. Podział na matematykę obiektywną i subiektywną wskazuje, że same formalne procedury dowodowe nie wystarczą do uzasadnienia prawdziwości wszystkich zdań prawdziwych. Istnieją bowiem prawdy matematyczne wymykające się opisowi formalnemu. Nie da się (zgodnie z pierwszym twierdzeniem Gödla) zamknąć całej matematyki w jednym systemie formalnym. Konieczne jest więc odwoływanie się do kryteriów innego typu.

Gödel – w sprawie kryteriów uznawania zdań matematycznych za prawdziwe – zajmuje stanowisko odmienne od Quine'a. Quine wychodzi od analiz metanaukowych, dotyczących roli matematyki w naukach przyrodniczych, i odrzuca argumenty oparte na racjach czysto filozoficznych[31]. Tymczasem punktem wyjścia Gödla jest stanowisko zdecydowanie antyscjentystyczne, antypozytywistyczne, w którym podkreślana jest ranga zagadnień metafizycznych. W (Gödel 1961) podaje on swoistą klasyfikację stanowisk filozoficznych, dzieląc je na „lewe" i „prawe". Kryterium tego podziału jest ranga, jaka w ramach danego stanowiska nadawana jest problematyce metafizycznej. Do grupy lewej zalicza materializm, sceptycyzm, pozytywizm, do prawej – spirytualizm, idealizm i teologię. Sam deklaruje się zdecydowanie jako zwolennik grupy prawej, uważając problematykę metafizyczną za podstawową dla filozofii. W szczególności za istotny uznaje problem istnienia i natury obiektów matematycznych.

Gödel wyróżnia dwa typy procedur, stosowanych w uzasadnianiu zdań matematycznych:

(1) Oparte na swoistej intuicji, która umożliwia nam rozumienie pojęć matematycznych. Takimi podstawowymi pojęciami matematycznymi są pojęcia teorii mnogości, a mianowicie pojęcie „zbioru" i pojęcie „należenia". Intuicja umożliwia nam analizę treści pojęć („wniknięcie" w te pojęcia), co z kolei pozwala na sformułowanie aksjomatów i uznanie ich prawdziwości. Kryterium, jakim należy się tu kierować, jest swoista oczywistość aksjomatów[32].

[31] Quine reprezentuje metafilozoficzne stanowisko, w myśl którego rzeczywistość jest opisywana, identyfikowana i analizowana „w nauce, a nie w jakiejś uprzedniej wobec niej filozofii pierwszej" (Quine 1981, s. 49).

[32] Oto najbardziej charakterystyczny fragment pism Gödla dotyczący problemu intuicji: „Pomimo ich oddalenia od danych zmysłowych mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która pozwala nam budować teorie fizyczne, w oczekiwaniu, że przyszłe dane zmysłowe będą z nią zgodne, i co więcej oczekiwać, że problem, który teraz nie jest rozstrzygalny, jest mimo to sensowny i może zostać rozstrzygnięty w przy-

(2) Analiza treści pojęć na podstawie intuicji matematycznej nie jest jednak jedyną metodą uzasadniania zdań. Drugie kryterium zasadności zdań to ich owocność w badaniach matematycznych: dany aksjomat powinien zostać przyjęty, jeśli okaże się pomocny w rozwiązywaniu istniejących problemów matematycznych, dostarczy nowych metod ich rozwiązywania, umożliwi ujednolicenie metod dowodowych – etc.[33]

Pytanie o zasadność dotyczy zarówno aksjomatów – gdyż precyzują one znaczenia pewnych pojęć matematycznych – jak i zdań niezależnych, takich jak hipoteza *continuum*. Nie ma tu istotnej różnicy metodologicznej – zarówno bowiem zdania niezależne, jak i aksjomaty stanowią precyzację znaczeń pojęć matematycznych. W wypadku teorii mnogości stanowią one precyzację pojęcia „zbioru”. Intuicja, która pomaga w rozpoznaniu prawdziwości podstawowych aksjomatów, może też być zastosowana do analizy zdań niezależnych.

Aksjomaty i zdania niezależne mogą się jednak różnić co do metod uzasadniania. Kryterium owocności może być bowiem stosowane dopiero w momencie, gdy powstaną problemy, które wymagałyby rozwiązania. Tym samym może być ono stosowane dopiero do zdań niezależnych od teorii – aby można było sformułować problemy i wyróżnić klasę problemów nierozwiązalnych, konieczne jest uprzednie sformułowanie pewnej teorii.

Gödel przez długi czas prowadził badania dotyczące problemu uzasadniania nowych aksjomatów, mogących rozstrzygnąć CH. Początkowo, po udowodnieniu metodą zbiorów konstruowalnych niesprzeczności CH z ZFC, sądził, że takim wiarygodnym aksjomatem, umożliwiającym rozstrzygnięcie tej kwestii, jest aksjomat konstruowalności (V=L). Później jednak doszedł do wniosku, że jest to aksjomat zbyt restryktywny i że nie może on zostać uznany za naturalny aksjomat precyzujący pojęcie zbioru (taką opinię wyraża w:

szłości” (1947/64, s. 271). Gödel od około 1959 roku interesował się także fenomenologią; właśnie fenomenologia miała stanowić, według niego, metodę wnikania w treść pojęć matematycznych (por. także Gödel 1961). Nie rozwinął jednak swojej koncepcji intuicji, stąd wynikają trudności interpretacyjne.

[33] Charakterystyczny jest tu następujący fragment: „Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w weryfikowalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na całą dyscyplinę i dostarczające tak silnych metod rozwiązywania problemów (i to rozwiązywania konstruktywnego, tak dalece, jak jest to możliwe), że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim stopniu, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna” (Gödel 1947/64, s. 265). O tym, że w rozstrzyganiu „konkretnych” problemów matematycznych istotne mogą być „abstrakcyjne” aksjomaty dotyczące dużych liczb kardynalnych, Gödel pisał wielokrotnie.

Gödel 1947/64). Wierzył wszakże, iż uda się znaleźć naturalne aksjomaty, które rozstrzygną problem CH[34].

Stanowisko filozoficzne Gödla niewątpliwie dostarczyło mu inspiracji do badań logicznych i metamatematycznych oraz stanowiło dla niego uzasadnienie stosowanych metod. Pisał o tym w listach do Wanga (por. Wang 1974, s. 9). Także poglądy Gödla na zagadnienie prawdziwości i uzasadniania zdań matematycznych są wyrazem jego stanowiska filozoficznego. Można wskazać kilka istotnych w tym kontekście fragmentów:

(1) Podczas dyskusji nad dopuszczeniem definicji niepredykatywnych Gödel powołuje się na swoje stanowisko realistyczne, pisząc, że: „Jeśli definiowane obiekty istnieją niezależnie od naszych konstrukcji, nie ma nic absurdalnego w stwierdzeniu, że istnieją obiekty definiowalne wyłącznie w terminach ogółu obiektów, do których należą" (1944, s. 219). Odrzuca tezę, w myśl której obiekty matematyczne są jedynie naszymi konstrukcjami.

(2) Także przy okazji dyskusji nad tym, czy pytania otwarte, takie jak hipoteza *continuum*, należy uznać za prawomocne pytania matematyczne, Gödel *explicite* powołuje się na swoje stanowisko filozoficzne. Skoro bowiem istnieje obiektywna, niezależna od matematyków rzeczywistość matematyczna, to pytania o to, jaka jest ta rzeczywistość, są pytaniami uzasadnionymi, podobnie jak np. pytanie o to, jaka jest temperatura Słońca. Realizm Gödla stanowi niejako rekojmię stosowanych przez niego metod i uznania za sensowny problemu prawdziwości i uznawania zdań matematycznych. Gödel zajmuje więc stanowisko skrajnie różne od formalisty Cohena.

(3) Gödel – inaczej niż Quine – wszelkie otwarte pytania matematyczne uważa za sensowne, niezależnie od problemu zastosowań. Pytanie o ich prawdziwość i uzasadnienie jest, według Gödla, istotne poznawczo. Jego argumentacja bowiem nie opiera się na analizie struktury teorii empirycznych. Pytania matematyczne są prawomocne niezależnie od roli matematyki w naukach empirycznych, dotyczą bowiem pewnej obiektywnie, niezależnie od nas istniejącej rzeczywistości.

[34] Gödel pozostawił po sobie rękopisy, w których zaproponował aksjomaty mające umożliwić rozwiązanie problemu *continuum* (Gödel 1970a, b). Okazało się jednak, że rozumowanie Gödla zawierało błędy (por. Ellentuck 1975; Solovay 1995).

4. PODSUMOWANIE

Na jednym krańcu prezentowanych stanowisk lokuje się skrajny formalizm. Pojęcie „prawdziwości” w odniesieniu do zdań matematycznych jest – w myśl stanowiska formalistycznego – pozbawione sensu, a pojęcie „uzasadniania” dotyczy jedynie takich kwestii, jak te, czy teoria jest interesująca, czy dostarcza ciekawych zagadnień albo czy jest dostatecznie bogata.

Bardziej umiarkowane jest stanowisko Hilberta: kategoria prawdziwości przysługuje zdaniom realnym, które uzasadniamy dzięki naszej intuicji. Zdania idealne nie mogą być rozpatrywane w kategoriach prawdziwości, a ich przyjęcie uzasadniane jest poprzez wskazanie ich roli w matematyce.

Według konceptualistów zdania matematyczne są prawdziwe – odnoszą się do obiektów mentalnych. Uzasadniamy je dzięki intuicji matematycznej. Jednakże klasa zdań akceptowalnych, z punktu widzenia intuicjonisty, jest inna niż klasa zdań matematyki klasycznej.

Według Quine’a zdania matematyki mogą być prawdziwe. Kryterium tej prawdziwości jest analiza metanaukowa. Jeśli pewna teoria empiryczna zostanie uznana za zinterpretowaną, to należy przyjąć całą jej ontologię – wraz z postulowanymi w niej obiektami matematycznymi. Klasa zdań uznanych za prawdziwe zależy od analiz metanaukowych.

Gödel reprezentuje najbogatszą wersję realizmu. Każde zdanie matematyczne dotyczy rzeczywistości matematycznej; przysługuje mu więc wartość logiczna. Nie każde jednak zdanie da się rozstrzygnąć na drodze badań czysto technicznych. Aby „pokonać” zjawisko niezależności, konieczne jest odwołanie się bądź do intuicji matematycznej, bądź do analiz dotyczących roli badanych zdań w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

BIBLIOGRAFIA

C o h e n P. J. (1966), Set theory and the continuum hypothesis, New York–Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc.

C o h e n P. J. (1971), Comments on the foundations of set theory, w: Axiomatic set theory. Proceedings in Symposia in Pure Mathematics, 13, part 1, ed. D. Scott, AMS, Providence, Rhode Island.

E l l e n t u c k E. (1975), Gödel’s square axioms for the continuum, „Mathematische Annalen”, 216, s. 29-33.

Gödel K. (1940), The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, w: Gödel 1990, s. 33-101.
Gödel K. (1944), Russell's Mathematical Logic, przedrukowane w: P. Benacerraf, H. Putnam, Philosophy of Mathematics, Prentice-Hall 1964, s. 211-232.
Gödel K. (1947/64), What is Cantor's Continuum Problem?, przedrukowane w: tamże, s. 258-273.
Gödel K. (1951), Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications, w: Gödel 1995, s. 304-323.
Gödel K. (1961), The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy, w: Gödel 1995, s. 374-387.
Gödel K. (1970a), Some considerations leading to the probable conclusion, that the true power of the continuum is $\aleph_2$, w: Gödel 1995, s. 420-421.
Gödel K. (1970b), A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausile axiom about orders of growth, w: Gödel 1995, s. 422-423.
Gödel K. (1972), Some remarks on the undecidability results, w: Gödel 1990.
Gödel K. (1990), Collected Works, vol. II, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press.
Gödel K. (1995), Collected Works, vol. III, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press.
Hilbert D. (1926), Über das Unendliche, „Mathematische Annalen", 95, s. 161-190. (Tłum. pol. w: Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych, red. R. Murawski, Poznań: Wydawnictwo UAM 1986, s. 288-307).
Maddy P. (1988), Believing the axioms, I, „Journal of Symbolic Logic", 53, s. 481-511.
Moore G. H. (1982), Zermelo's axiom of choice, Springer-Verlag.
Murawski R. (1995), Filozofia matematyki, Warszawa: PWN.
Quine W. V. O. (1981), Things and Their Place in Theories, w: Theories and Things, Cambridge, Mass.: The Belknap Press of Harvard University Press, s. 1-23. (Tłum. pol.: Rzeczy i ich miejsca w teoriach, w: Metafizyka w filozofii analitycznej, red. T. Szubka, Lublin: TN KUL 1995, s. 31-52).
Quine W. V. O. (1984), Review of Parsons C. Mathematics in Philosophy, „Journal of Philosophy", 81, s. 783-794.
Sieg W. (1988), Hilbert's program sixty years later, „Journal of Symbolic Logic", 53, s. 338-348.
Simpson S. G. (1984), Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?, „Journal of Symbolic Logic", 49, s. 783-802.
Simpson S. G. (1988), Partial Realisations of Hilbert's Program, „Journal of Symbolic Logic", 53, s. 349-363.
Solovay R. M. (1995), Introductory note to *1970a, *1970b, *1970c, w: Gödel 1995.
Wang H. (1974), From mathematics to philosophy, London: Routledge and Kegan Paul.
Wójtowicz K. (1997), Na czym polega *argument z niezbędności* Quine'a?, „Edukacja Filozoficzna", 24, s. 297-306.
Wójtowicz K. (1999), Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki, Warszawa: Wydawnictwa WFiS UW, s. 212.

Wójtowicz K. (2002), Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla, Tarnów: Biblos.

ON JUSTIFICATION IN MATHEMATICS

Summary

In this article the problem of justification of mathematical axioms (in the context of traditional standpoints in the philosophy of mathematics) is discussed. Stress is laid on the methodological analysis, which concerns the notion of "justification" itself. Concrete choices, known from mathematical practice are not discussed here.

In the process of formulating an axiomatic theory, the problem of the choice of the appropriate axiom system and of the justification of this choice emerges. In particular, the following problems are connected with it:

(1) The problem of the relation between the concept of "justification" and "truth" of mathematical sentences (when the classical definition of truth is assumed).

(2) The problem which criteria of justification can be considered appropriate, and whether the problem of justification is well-posed.

(3) The problem, whether these criteria can be applied only to axioms, in the process of constructing an axiomatic theory, or also to independent sentences (after their metamathematical status has been settled. In that case, extending a theory T by an independent sentence φ or $\neg\varphi$ cannot be justified by a formal proof.)

(4) The problem, whether the choice of a particular justificatory procedure is motivated philosophically; in particular, whether the problem of justification is considered well-posed.

These questions are analysed in the context of classical philosophical standpoints in the philosophy of mathematics, such as: (1) strict formalism; (2) Hilbert's formalism; (3) mathematical instrumentalism; (4) intuitionism; (5) Quine's realism; (6) Gödel's realism. The standpoint of the "working mathematician" is also discussed.

Summarized by the Author

Słowa kluczowe: filozofia matematyki, formalizm, instrumentalizm, konceptualizm, realizm.

Key words: philosophy of mathematics, formalism, instrumentalism, conceptualism, realism.