ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LI, zeszyt 3 – 2003

KS. JERZY DADACZYŃSKI

MODELE SEMANTYCZNE W DZIEJACH MATEMATYKI

Teoria modeli powstała w latach trzydziestych XX w. Jej twórcą był Alfred Tarski, który wychodząc od badań nad teorią prawdy, sformułował pojęcie spełniania i cały szereg innych podstawowych pojęć teoriomodelowych[1]. *De facto* niektóre ważne twierdzenia, które można zaliczyć do klasycznych w zakresie teorii modeli, sformułowano i udowodniono wcześniej. Można tu wspomnieć twierdzenie Gödla o pełności[2] czy też twierdzenie Löwenheima-Skolema wskazujące na istnienie paradoksalnie małych czy też wielkich modeli dla teorii matematycznych. Twierdzenia te sformułowano i udowodniono już w latach dwudziestych i na początku lat trzydziestych XX w.

Zazwyczaj utrzymuje się, że teoretyczne badania modeli matematycznych, w których Tarski położył szczególny nacisk na powiązania składni (języka, w którym budowana jest teoria) z semantyką, były logiczną konsekwencją pojawienia się modeli w matematyce XIX w. Wskazuje się przy tym zazwyczaj na dwa źródła modeli w matematyce tego okresu: algebrę i geometrię.

W XIX w. powstało wiele teorii algebraicznych: teoria grup, pierścieni, ciał itd. Szczególne zasługi położyli w tym zakresie: Galois, Abel i Dedekind. Pojawienie się teorii algebraicznych było efektem superpozycji dwu czynników: wyabstrahowania z zastanych dziedzin matematyki pewnych „struktur” (algebraicznych właśnie) i dążenia – już w XIX w. – do aksjomatyzacji pewnych teorii matematycznych. Chociaż nie odróżniano wtedy jeszcze *explicite*

KS. DR JERZY DADACZYŃSKI – adres do korespondencji: ul. Łagiewnicka 17, 41-500 Chorzów.

[1] Por. A. T a r s k i. *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. Warszawa 1933.

[2] Twierdzenie Gödla o pełności mówi, że wnioskowanie semantyczne i wnioskowanie syntaktyczne są jednakowe, tzn. zdanie Φ jest wywiedlne syntaktycznie w danej teorii T wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest spełnione w każdym modelu teorii T.

teorii i modelu, syntaktyki i semantyki, to jednak zdawano sobie sprawę, że „teoria” grupy „spełniana” jest w dziedzinie liczb całkowitych czy wymiernych z – na przykład – dodawaniem. Można twierdzić, że teoria modeli była poniekąd uogólnieniem czy rodzajem teorii teorii algebraicznych, takich jak: teoria grup, pierścieni, ciał itd.

Drugie źródło modeli i „myślenia modelowego” w matematyce XIX w. wskazuje się w geometrii, a konkretnie w fakcie powstania geometrii nieeuklidesowych i całej dyskusji metageometrycznej, która z tym faktem była związana. Przy tym nie tyle istotne było zbudowanie samych teorii geometrii nieeuklidesowych, z zaprzeczonym piątym postulatem Euklidesa, przez Gaussa, Łobaczewskiego i Bolyaia, co wskazanie ich euklidesowych modeli przez Beltramiego[3] w 1868 r. i Kleina[4] w 1871 r. Istnienie modeli euklidesowych geometrii nieeuklidesowych wykorzystano potem w dowodach niesprzeczności (teorii) geometrii nieeuklidesowych i niezależności piątego postulatu Euklidesa od pozostałych postulatów. Ten wątek – wykorzystania modeli w podstawach geometrii – też znalazł swoje odzwierciedlenie w pracach Tarskiego.

Zaprezentowany szkic zdaje się potwierdzać schemat: modelami zaczęto się posługiwać w matematyce w XIX w., logiczną konsekwencją było zbudowanie teorii modeli w latach trzydziestych XX w.

Celem niniejszego opracowania jest pokazanie, że schemat ten nie uwzględnia pewnych wcześniejszych wydarzeń w dziejach matematyki i w filozofii matematyki. Modele pojawiły się w matematyce o wiele wcześniej, a w ramach jej filozofii też o wiele wcześniej, niż to się zazwyczaj przyj-

[3] Por. E. B e l t r a m i. *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*. „Giornale di mathematiche” 6:1868 s. 284-312. Współcześnie twierdzi się (por. M. J. S c a n l a n. *Beltrami's Model and the Independence of the Parallel Postulate*. „History and Philosophy of Logic” 9:1988 s. 13-34), że Beltrami, podając modele euklidesowe dla geometrii nieeuklidesowych, nie miał na celu udowodnienia ani niesprzeczności geometrii nieeuklidesowej, ani niezależności piątego postulatu od pozostałych aksjomatów geometrii euklidesowej. Dopiero J. Hoüel (*Note sur l'impossibilite de demontrer par une construction plane de la theorie des paralleles dit „Postulatum” d'Euclide*. „Giornale di mathematiche” 8:1870 s. 84-89) dostrzegł znaczenie modelu podanego przez Beltramiego dla dowodu niezależności piątego postulatu Euklidesa. Jeszcze później, bo dopiero po r. 1890, rozpoznano znaczenie istnienia modeli euklidesowych geometrii nieeuklidesowych dla dowodu niesprzeczności (względnej) tychże geometrii. W dowodzie takim korzystano też z metateoretycznej tezy, że teoria mająca model nie może być niesprzeczna. *De facto* problem niesprzeczności geometrii nieeuklidesowych redukowano do kwestii niesprzeczności geometrii euklidesowych.

[4] Por. F. K l e i n. *Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie*. „Mathematische Annalen” 4:1871 s. 573-625.

muje, pojawiły się pewne wypowiedzi, które można by zaliczyć do teoriomodelowych.

Wydaje się, że istotna wypowiedź właśnie natury teoriomodelowej zawarta jest już w *Paradoksach nieskończoności* Bernarda Bolzano[5]. Dzieło to zostało napisane w latach czterdziestych XIX w. i wydane po śmierci Bolzana przez jego ucznia Prihonskiego w Bautzen (Budziszynie) w 1851 r.[6]

W pierwszych dwunastu paragrafach *Paradoksów nieskończoności* Bolzano starał się opisać nieskończoność aktualną. Była to w istocie najdoskonalsza forma przedcantorowskiej teorii mnogości. Wśród wielu twierdzeń wypowiedział Bolzano i to, że każdy zbiór nieskończony można jednojednoznacznie odwzorować na jego podzbiór właściwy. Tę własność przyjął potem Dedekind za definicję zbiorów nieskończonych. Sam Bolzano nie podał definicji zbioru nieskończonego. Podał w istocie system twierdzeń o zbiorach nieskończonych, z których części nie dowodził. Można przyjąć, że potraktował je jako aksjomaty, był bowiem Bolzano zdecydowanym zwolennikiem zaksjomatyzowania wszystkich dyscyplin matematycznych. Innymi słowy: w pierwszych dwunastu paragrafach *Paradoksów nieskończoności* podał Bolzano pewną teorię zbiorów nieskończonych. Pojęcie zbioru nieskończonego potraktował w tej teorii jako pojęcie pierwotne. Niedowiedlne tezy stanowiły jego uwikłaną definicję[7].

Następną część swoich rozważań otworzył Bolzano następującym pytaniem: „Skoro tedy uzgodniliśmy, jakie pojęcie będziemy wiązać ze słowem *nieskończony*, i uświadomiliśmy sobie jasno części, z których je składamy,

---

[5] Jako pierwszy na teoriomodelowy charakter 13 paragrafu *Paradoksów nieskończoności* zwrócił uwagę J. Danek (*Weiterentwicklung der Leibnizschen Logik bei Bolzano*. Meisenheim am Glan 1970 s. 89 n.).

[6] W niniejszym opracowaniu posłużono się niemieckojęzycznym wydaniem *Paradoksów nieskończoności* z 1955 r. (B. B o l z a n o. *Paradoxien des Unendlichen*. Hrsg. von A. Höfler, mit Anmerkungen von H. Hahn, F. Meiner. Hamburg 1955). Polski tekst cytowany jest według przekładu Ł. Pakalskiej, zamieszczonego w: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*. Wybór i oprac. R. Murawski. Poznań 1986 s. 116-130.

[7] W 1810 r. Bolzano podał swoją koncepcję metody matematyki. Według niego metodą wspólną wszystkim teoriom matematycznym jest metoda aksjomatyczno-dedukcyjna. Wszystkie teorie matematyczne powinny być zaksjomatyzowane. Aksjomaty to prawdy obiektywnie niedowiedlne. Wszystkie terminy teorii powinny zostać zdefiniowane poza tzw. pojęciami prostymi, które można utożsamić z pojęciami pierwotnymi teorii. Można zauważyć przekonanie Bolzany, że aksjomaty są definicjami w uwikłaniu pojęć pierwotnych teorii. Bolzano miał nawet świadomość podania reguł wnioskowania (dowodzenia) – za takowe uważał tezy rozbudowanej sylogistyki arystotelesowskiej. W efekcie można uchwycić w tekście Bolzany koncepcję dowodu jako pojęcia zrelatywizowanego do pojęć aksjomatu i reguły wnioskowania (por. B. B o l z a n o. *Beyträge zur einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Prag 1810 – reprint w: *Philosophie der Mathematik*. Hrsg. von H. Fels. Paderborn 1926 s. 45-107).

to następne pytanie dotyczy jego *przedmiotowości*, tzn. sprawy, czy istnieją rzeczy, do których daje się ono zastosować, mnogości, które możemy nazwać nieskończonymi w wyjaśnionym znaczeniu?”[8]

Pytanie o przedmiotowość słowa „nieskończony”, o istnienie rzeczy, co do których daje się ono zastosować, nie jest w istocie niczym innym, jak pytaniem o istnienie modeli teorii, w której w sposób uwikłany zostało zdefiniowane (opisane) pojęcie nieskończoności. Bardzo wyraźne jest tu rozróżnienie teorii, sformułowanej w pewnym języku (potocznym), a więc pewnej syntaksy, którą Bolzano rozwinął w pierwszych dwunastu paragrafach *Paradoksów nieskończoności*, oraz modeli tej teorii – pewnych przedmiotów. Dostrzeżenie tych dwu elementów: teorii i modeli świadczy o „świadomości” semantycznej praskiego autora. W tekście Bolzany padają nawet odpowiedniki współczesnego terminu teoriomodelowego: „spełnianie” – chodzi o słowa: „zastosować do rzeczy” (*Dingen, auf die er* [*der Begriff* – przyp. J. D.] *sich anwänden läßt*] i „przedmiotowość” (*Gegenständlichkeit*).

Przykład Bolzany pokazuje, że refleksja nad zagadnieniami semantycznymi, refleksja natury teoriomodelowej – oczywiście bez skomplikowanych rozwiązań „technicznych” i użycia współczesnej terminologii – miała miejsce w filozofii już prawie sto lat przed opublikowaniem prac Tarskiego na ten temat[9]. Charakterystyczne jest też, że Bolzano w swej refleksji teoriomodelowej nie nawiązał do algebry i geometrii, a więc tych dziedzin matematyki, w których w XIX w. posługiwano się już *implicite* pojęciem modelu i które później inspirowały powstanie teorii modeli. Refleksja Bolzany rozpoczęła się od poszukiwania modeli dla przedcantorowskiej teorii mnogości.

---

[8] „Sind wir einig geworden, welchen Begriff wir mit dem Worte *unendlich* verbinden wollen, und haben wir uns auch die Bestandteile, aus denen wir diesen Begriff zusammensetzen zu einem klaren Bewußtsein erhoben: so ist die nächste Frage, ob er auch *Gegenständlichkeit* habe, d. h., ob es auch Dingen gebe, auf die er sich anwänden läßt, Mengen, die wir in der erklärten Bedeutung unendlich nennen dürfen?” (*Paradoxien des Unendlichen* par. 13).

[9] Warto przy okazji wspomnieć, że Bolzano antycypował rozwiązania Tarskiego nie tylko w zakresie teorii modeli. Dotyczy to również logiki, a bardziej szczegółowo pewnych fragmentów koncepcji teorii dedukcyjnych. Wysuwa się twierdzenie, że Bolzanowska relacja pomiędzy zdaniami – *Ableitbarkeit* – antycypowała pojęcie konsekwencji logicznej, wprowadzone przez Tarskiego (por. H. S c h o l z. *Die Wissenschaftslehre Bolzanos. Eine Jahrhundert-Betrachtung*. W: *Mathesis universalis. Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft*. Hrsg. von H. Hermes. Basel 1961 s. 219-267). Pojęcie konsekwencji logicznej Tarskiego zakłada oczywiście pojęcie modelu. Bolzano wprowadzając koncepcję *Ableitbarkeit*, też *implicite* założył pojęcie modelu, które zawarte jest w jego koncepcji metody wariacyjnej (*Variationsmethode*).

Precyzyjniejsze badania z zakresu historii matematyki pokazują jednak, że myślenie teoriomodelowe w matematyce nie rozpoczęło się dopiero w związku z powstaniem geometrii nieeuklidesowych, teorii grup Galois czy poszukiwaniem modeli dla Bolzanowskiej teorii mnogości. Można pokazać, że *implicite* modelami teorii matematycznych posługiwano się już dwa stulecia wcześniej.

Wiek XVII to ten okres w dziejach matematyki, kiedy ukształtowało się pojęcie algebry. W opracowaniach z zakresu historii matematyki wielokrotnie opisywano, jak do powstania algebry przyczyniło się wprowadzenie do arytmetyki wielkości zmiennych, symboliki oznaczającej te zmienne oraz symboliki literowej, oznaczającej stałe arytmetyczne. Istotne dla prowadzonych tu badań jest to, że powstanie algebry w XVII w. było ściśle związane z pojawieniem się w ówczesnej matematyce istotnych intuicji dotyczących istnienia modeli matematycznych.

Mimo że Eudoksos już w starożytności przedstawił – w swej teorii stosunków wielkości – rozwiązanie problemu niewymierności (przypominające w głównych zarysach konstrukcję Dedekindowską liczb rzeczywistych), to jednak dla matematyki XVII w. zagadnienie konstrukcji liczb rzeczywistych nadal stanowiło problem. Jedno z rozwiązań przedstawił Kartezjusz, posługując się wypracowanymi niedawno metodami algebraicznymi. Rozwiązanie Kartezjusza zakłada – *implicite* – pojęcie modelu.

Kartezjusz przyjął na początku pewną algebrę[10]. Gdyby tę algebrę próbować zaksjomatyzować, to okazałoby się, że chodzi o teorię opisującą własności ciał. Używając współczesnych kategorii, można by powiedzieć, że modelem tej algebry byłaby dziedzina liczb rzeczywistych (z dodawaniem i mnożeniem), gdyby w czasach Kartezjusza potrafiono poprawnie skonstruować liczby niewymierne. Następnym krokiem Kartezjusza, nie było nic innego, jak znalezienie modelu przyjętej algebry (oczywiście Kartezjusz nie posłużył się terminem „model"). Taki model znalazł on w dziedzinie odcinków płaszczyzny euklidesowej. Określił w niej działania odpowiadające algebraicznemu „dodawaniu" i „mnożeniu"[11]. „Wynikiem" tak określonych funkcji był za-

---

[10] Kartezjańska „konstrukcja" liczb niewymiernych – dokonana przy wykorzystaniu „narzędzi" teoriomodelowych – została przedstawiona na podstawie dwu opracowań: A. P. J u s z k i e w i c z. *Arytmetyka i algebra*. W: *Historia matematyki*. T. 2. Tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa 1976 s. 26-60; J. D a d a c z y ń s k i. *Filozofia matematyki w ujęciu historycznym*. Tarnów 2000 s. 102-109.

[11] Faktycznie określił Kartezjusz w dziedzinie odcinków cztery działania. Dla prowadzonych badań istotne jest to, że określił on odpowiedniki dla algebraicznego „dodawania" i „mnożenia". Szczególnym postępem w stosunku do starożytnej algebry geometrycznej było

wsze odcinek. Dziedzina odcinków z tak zdefiniowanymi działaniami „spełniała” Kartezjańską algebrę.

Następnie dokonał Kartezjusz szeregu „utożsamień”. Przy założeniu, że w dziedzinie odcinków określona jest jednostka miary, można było utożsamić każdy odcinek długości wyrażalnej całkowitą liczbą jednostek z liczbą całkowitą, natomiast każdy odcinek długości wymiernej – z liczbą wymierną. Działania na odcinkach zostały utożsamione ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem w dziedzinie liczb wymiernych. Kartezjusz poszedł jeszcze dalej. Każdy odcinek niewymierny utożsamił on z czymś, co też nazwał „liczbą” (*nombre*). Dokładniej: odcinki niewymierne zostały utożsamione z czymś, co nazwał on „liczbami głuchymi” (*nombres sourds*). Działania w dziedzinie wszystkich odcinków miały „odpowiadać” działaniom w dziedzinie liczb wymiernych, uzupełnionej o „liczby głuche”. Innymi słowy: tak rozszerzona dziedzina liczb była drugim „modelem” Kartezjańskiej algebry. „Liczby głuche” zaś, odpowiedniki odcinków niewymiernych, były „poszukiwanymi” przez Kartezjusza liczbami niewymiernymi.

Okazuje się, że ten sposób wprowadzenia liczb niewymiernych do arytmetyki zakładał istnienie daleko idących intuicji teoriomodelowych. Co pozwoliło Kartezjuszowi uzupełnić dziedzinę liczb wymiernych o „liczby głuche”, czyli liczby niewymierne? W tym celu konieczne było poczynienie dwu istotnych założeń. Po pierwsze należało założyć, że Kartezjańska algebra ma, obok dziedziny odcinków, drugi model w dziedzinie liczb. Ten drugi model nie mógł być modelem dowolnym. Trzeba było jeszcze drugiego założenia, a mianowicie tego, że model liczbowy algebry jest – używając współczesnej terminologii – izomorficzny z modelem w dziedzinie odcinków płaszczyzny euklidesowej[12]. Dopiero te założenia – w istocie swej teoriomodelowe – pozwoliły Kartezjuszowi „uzupełnić”, na podstawie „analogii” (założonego izomorfizmu modeli) z dziedziną odcinków, dziedzinę liczb o liczby niewymierne.

Generalnie zatem można stwierdzić, że już w XVII w. posługiwano się modelami w matematyce. Było to nieodłącznie związane z powstaniem bardziej „abstrakcyjnej” dyscypliny matematycznej niż wszystkie znane do tam-

---

takie określenie mnożenia odcinków, by wynik był też odcinkiem. Dla starożytnych „wynikiem” mnożenia dwu odcinków był odpowiedni prostokąt, „wynikiem” mnożenia trzech odcinków był odpowiedni prostopadłościan, natomiast mnożenie czterech odcinków było niewykonywalne.

[12] Dzisiaj powiedziano by, że chodzi o izomorfizm dwu ciał: ciała odcinków i ciała liczb rzeczywistych.

tych czasów, a mianowicie algebry. Matematycy XVII w. mieli świadomość, że algebra może posiadać model, a w istocie może posiadać więcej modeli. Co więcej, zdawano sobie sprawę, że dwa modele mogą pozostawać do siebie w tej relacji, którą współcześnie nazywa się izomorfizmem. Z własności dziedzin izomorficznych korzystano w prowadzonych badaniach matematycznych – najlepszym przykładem jest Kartezjańska „konstrukcja” liczb niewymiernych. Dokonane w tamtych czasach *implicite* rozróżnienie teorii i jej modeli świadczy o „świadomości” semantycznej matematyków XVII w. Jest też dowodem, że intuicyjnie zdawano sobie sprawę z tego, co znaczy, iż teoria spełniona jest w jakimś modelu. Już teraz zatem można stwierdzić, że teza, iż typ myślenia teoriomodelowego pojawił się dopiero w matematyce XIX w., jest znacznym uproszczeniem. Jest on wyraźnie dostrzegalny – w związku z powstaniem algebry – już w matematyce XVII w.

Wieki XVI i XVII to ten okres w matematyce, kiedy sięgnięto do dorobku antycznego. Dotyczy to przede wszystkim dorobku Eudoksosa i Archimedesa, który stanowił podstawę rozwinięcia w nowożytności metod różniczkowych i całkowych. Wydaje się jednak, że w dorobku Eudoksosa z Knidos (ur. 406 przed Chrystusem) – niewątpliwie najwybitniejszego matematyka starożytności – można dopatrzyć się także pewnych elementów myślenia teoriomodelowego.

Eudoksos – między innymi – wprowadził do matematyki pojęcie wielkości i podał aksjomatyczno-dedukcyjną teorię wielkości, która zawarta została później w V księdze *Elementów* Euklidesa[13]. Pojęcie wielkości jest – domyślnym – pojęciem pierwotnym tej teorii. Aksjomaty owej teorii, zbudowanej przez Eudoksosa, są następujące:

1. Równe temu samemu są równe między sobą;
2. I jeśli do równych doda się równe, to w sumie będą równe;
3. I jeśli od równych odejmie się równe, to reszty będą równe;
4. I pokrywające się wzajemnie są sobie równe;
5. I całość jest większa od części.

Co traktował Eudoksos jako wielkości? W istocie wiele przedmiotów matematycznych podpadało, jego zdaniem, pod to pojęcie: liczby naturalne, stosunki liczb naturalnych (czyli według współczesnej terminologii liczby wy-

[13] Zamieszczone tu wiadomości na temat teorii wielkości Eudoksosa zaczerpnięto z pracy: I. G. B a s z m a k o w a. *Grecja starożytna*. W: *Historia matematyki*. T. 1. Tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa 1975 s. 103-115.

mierne dodatnie), tzw. wielkości ciągłe, czyli odcinki, pola i objętości[14]. Co więcej, już w starożytności zaczęto definiować matematykę jako naukę o wielkościach. Znaczyło to m.in. tyle, że wszystkie przedmioty badane w matematyce „spełniają" i muszą „spełniać" aksjomaty teorii wielkości. Innymi słowy: wszystkie partykularne dziedziny matematyki musiały „spełniać" aksjomatykę teorii wielkości. Istniały zatem partykularne dziedziny matematyczne: liczb naturalnych, liczb wymiernych (dodatnich), geometria euklidesowa oraz bardziej „abstrakcyjna" teoria, a mianowicie teoria wielkości. Partykularne dziedziny matematyki starożytnej łączyło z teorią wielkości Eudoksosa to, że wszystkie one „spełniały" aksjomaty tej bardziej „abstrakcyjnej" teorii, czyli poszczególne dziedziny matematyczne były modelami sformułowanej w postaci aksjomatycznej teorii wielkości[15]. Zatem już w IV w. przed Chrystusem, w okresie największego rozkwitu matematyki antycznej, można się spotkać z teoriomodelowym myśleniem w matematyce, ze „świadomością" tego, że istnieje pewna teoria, która ma wiele modeli matematycznych. Co więcej, własności teoriomodelowe wykorzystywano *implicite* od starożytności aż do XIX w. w najczęściej spotykanej wówczas definicji matematyki, stwierdzającej, że matematyka jest nauką o wielkościach[16].

Tak więc standardowo powtarzane twierdzenie, że modelami posługiwano się w matematyce dopiero począwszy od XIX w., kiedy pojawiły się teoria grup i geometria nieeuklidesowa, nie odpowiada prawdzie. Modele – oczywiście bez towarzyszącego użycia stosownej terminologii – pojawiły się u samych początków matematyki rozumianej jako nauka, a więc w IV w. przed Chrystusem.

Co więcej, można próbować też uzasadnić twierdzenie, że teoretyczna refleksja teoriomodelowa ujawniła się również w tym samym okresie. Można ją dostrzec w niektórych wypowiedziach, współpracującego z Eudoksosem, Arystotelesa. Stagiryta, który jako pierwszy badał – z metodologicznego punktu widzenia – teorie matematyczne, podzielił je na dwie grupy: indywidualne i uniwersalne. Te drugie nazwał precyzyjniej „powszechnymi", „kato-

---

[14] Eudoksos zbudował także tzw. teorię stosunków wielkości, za pomocą której starał się rozwiązać odkryty przez Hippasosa z Metapontu problem niewymierności.

[15] Por. H. S c h o l z. *Der klassische und der moderne Begriff einer mathematischen Theorie*. „Mathematisch-physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität" 3:1953 s. 35 n.

[16] Pierwszą teorią nie będącą modelem teorii wielkości, którą wprowadzono do matematyki – po okresie wielkiego oporu znacznej części środowiska właśnie ze względu na niespełnianie przez nią piątego aksjomatu teorii wielkości Eudoksosa – była teoria mnogości Cantora. Akceptacja teorii mnogości nastąpiła dopiero na przełomie XIX i XX w.

lickimi" (od καϑ ολου)[17]. Teorią „katolicką", „powszechną" była dla Arystotelesa teoria wielkości Eudoksosa. Co stanowiło o jej powszechności? To, że zamiast udowadniać pewne „wspólne" twierdzenia dla dziedziny liczb i odcinków oddzielnie, można je było udowodnić w teorii wielkości Eudoksosa. Obowiązywały one wówczas w obu wspomnianych dziedzinach, oddzielnych dowodów nie trzeba było prowadzić[18]. Wynika stąd wyraźnie, że Arystoteles traktował teorię „katolicką", „powszechną" jako teorię, która miała kilka modeli, była „spełniana" w różnych dziedzinach matematycznych. Wypowiedział on też w istocie ważne twierdzenie teoriomodelowe, że jeśli pewna dziedzina spełnia aksjomaty jakiejś teorii, to spełnia również wszystkie konsekwencje (syntaktyczne) tego układu aksjomatów. Można się tutaj nawet dopatrywać zapowiedzi twierdzenia Gödla o pełności.

Generalnie zatem należy stwierdzić, że modelami posługiwano się w matematyce od samego początku, tzn. dokładnie od tego momentu, kiedy matematyka przestała być jedynie sztuką rachowania, a stała się nauką uprawianą za pomocą metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Od tego samego czasu towarzyszyły pojawieniu się modeli w matematyce początki refleksji teoriomodelowej w filozofii matematyki i jej metodologii. Twierdzenie, że modele pojawiły się dopiero w matematyce XIX w., a początki teorii modeli związane są z pracami Tarskiego, stanowi duże uproszczenie.

BIBLIOGRAFIA

A r i s t o t e l e s: Metaphysik, griechisch-deutsch. Hrsg. von H. Seidl. Hamburg: Meiner 1978.

– Analytica posteriora, griechisch-deutsch. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1993.

B a s z m a k o w a I. G.: Grecja starożytna. W: Historia matematyki. T. 1. Tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa: PWN 1975 s. 64-115.

B e l t r a m i E.: Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. „Giornale di mathematiche" 6:1868 s. 284-312.

B o l z a n o B.: Beyträge zur einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Prag 1810 – reprint w: Philosophie der Mathematik. Hrsg. von H. Fels. Paderborn: Schöningh 1926 s. 45-107.

[17] Por. A r i s t o t e l e s. *Metaphysik, griechisch-deutsch*. Hrsg. von H. Seidl. Hamburg 1978 K 7 p. 1064 b, 8 ff; E 1 p. 1026 a, 25 ff.

[18] Por. t e n ż e. *Analytica posteriora*, *griechisch-deutsch*. Darmstadt 1993 I 5 p. 74 a, 18 ff; I 24 p. 85 a, 37 ff; II 13 p. 96 b, 7.

– Paradoxien des Unendlichen. Hrsg. von A. Höfler, mit Anmerkungen von H. Hahn. Hamburg: F. Meiner 1955.
D a d a c z y ń s k i J.: Filozofia matematyki w ujęciu historycznym. Tarnów: Biblos 2000.
D a n e k J.: Weiterentwicklung der Leibnizschen Logik bei Bolzano. Meisenheim am Glan: Verlag Anton Hain 1970.
H o ü e l J.: Note sur l'impossibilite de demontrer par une construction plane de la theorie des paralleles dit *Postulatum* d'Euclide. „Giornale di mathematiche" 8:1870 s. 84-89.
J u s z k i e w i c z A. P.: Arytmetyka i algebra. W: Historia matematyki. T. 2. Tł. z jęz. ros. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa: PWN 1976 s. 26-60.
K l e i n F.: Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie. „Mathematische Annalen" 4:1871 s. 573-625.
M u r a w s k i R. (wybór i oprac.): Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM 1986.
S c a n l a n M. J.: Beltrami's Model and the Independence of the Parallel Postulate. „History and Philosophy of Logic" 9:1988 s. 13-34.
S c h o l z H.: Der klassische und der moderne Begriff einer mathematischen Theorie. „Mathematisch-physikalische Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität" 3:1953 s. 30-47.
– Die Wissenschaftslehre Bolzanos. Eine Jahrhundert-Betrachtung. W: Mathesis universalis. Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft. Hrsg. von H. Hermes. Basel: Benno Schwabe Verlag 1961 s. 219-267.
T a r s k i A.: Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych. Warszawa: Towarzystwo Naukowe Warszawskie 1933.

SEMANTISCHE MODELLE IN DER GESCHICHTE DER MATHEMATIK

Z u s a m m e n f a s s u n g

Allgemein sagt man, daß semantische Modelle erst in der Mathematik des XIX Jahrhunderts (Modelle der algebraischen Strukturen, Modelle der nichteuklidischen Geometrien) und die Theorie der Modelle erst im XX Jahrhundert auf (Tarski) aufgetreten sind. Diese Behauptung ist eine Vereinfachung. Man kann beweisen, daß Descartes sich geometrischer und arithmetischer Modelle seiner Algebra schon im XVII Jahrhundert bedient hat. Für Eudoxos's axiomatische Größenlehre konnte man schon im IV Jahrhundert vor Christi Geburt mathematische Modelle zeigen. Seit dem Anfang der Wissenschaftslehre und der Philosophie der Mathematik (Aristoteles) wurden auch manche Behauptungen aus dem Bereich der Theorie der Modelle ausgedrückt.

Zusammengefaßt von Jerzy Dadaczyński