ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LI, zeszyt 3 – 2003

KS. JERZY DADACZYŃSKI

MATEMATYKA XVIII WIEKU A KANTA FILOZOFIA MATEMATYKI

Metoda matematyki w swoich zasadniczych zrębach ukształtowała się już w starożytności. *Elementy* Euklidesa stanowiły przez wiele wieków paradygmat metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Dziś wiadomo, że jeszcze wcześniej pitagorejczycy starali się za jej pomocą budować swoją geometrię. Starożytność dała również pierwszą refleksję nad metodą – nie tylko matematyki – zawartą w *Analitykach wtórych* Arystotelesa.

Metodę *Elementów* Euklidesa stosowano jednak do XIX w. wyłącznie w geometrii. Niewiele też powstało do początku XIX w. istotnych przyczynków z zakresu metodologii matematyki, rozwijających koncepcję Arystotelesa. W zasadzie można by listę autorów ograniczyć do dwu nazwisk: Pascala i Bolzana.

Wiek XIX przyniósł rozszerzenie stosowania metody aksjomatyczno-dedukcyjnej w matematyce. Powstały geometrie nieeuklidesowe i pierwsze struktury algebraiczne – grupy. Rozwój istotnego narzędzia matematyki, jakim jest logika, i kryzys podstaw matematyki, spowodowany odkryciem antynomii teoriomnogościowych na przełomie XIX i XX w., szybko doprowadziły do sformułowania powszechnie obowiązujących standardów w zakresie metody matematyki.

Określenie obowiązujących standardów metodologicznych wiąże się z osobą Davida Hilberta. W ramach zbudowanego przez siebie programu formalizmu[1] postulował on zaksjomatyzowanie wszystkich teorii matematycznych.

KS. DR JERZY DADACZYŃSKI – adres do korespondencji: ul. Łagiewnicka 17, 41-500 Chorzów.

[1] Przyczyną powstania programu formalizmu (podobnie jak intuicjonizmu) był kryzys w podstawach matematyki, spowodowany odkryciem antynomii teoriomnogościowych, nato-

Matematyka miała zostać sformalizowana, czyli „przełożona” na język symboliczny. W ten sposób miała ona stać się ciągiem formuł, które są skończonymi ciągami symboli. Wypada w tym miejscu wtrącić, że ten postulat nie jest realizowany ze względów pragmatycznych przez autorów wielu podręczników po dzień dzisiejszy. Są one jednak pisane w ten sposób, że ich zawartość można sformalizować, dla istotnych zaś twierdzeń podaje się dowody sformalizowane. Wreszcie postulował Hilbert, by podano na metapoziomie listę wszystkich reguł przekształcania formuł, czyli reguł wnioskowania.

Dopiero wprowadzenie takich standardów metodologicznych do matematyki pozwalało ostatecznie na wprowadzenie do metodologii matematyki pojęcia dowodu matematycznego jako pojęcia zrelatywizowanego do zbioru aksjomatów danej teorii i akceptowanych na jej gruncie reguł dowodzenia (przekształcania formuł matematycznych). Najogólniej mówiąc, dowodem jest taki ciąg formuł, który zaczyna się od wyrażeń przyjętych jako założenia dowodu (mogą nimi być wyłącznie aksjomaty danej teorii i wyrażenia już w niej poprawnie dowiedzione), następnie zawiera wyrażenia otrzymane z założeń w wyniku przekształceń dozwolonych przez reguły dowodowe, potem wyrażenia otrzymane w ten sam sposób z tych ostatnich itd. Jako ostatnie ogniwo przekształceń formuł występuje formuła dowodzona.

Jak już wyżej zasygnalizowano, nie wszystkim dowodom we współczesnej matematyce nadaje się taki charakter formalny, czasami dowody są półformalne. Każdy jednak dowód może być przekształcony na dowód ściśle sformalizowany i w takiej postaci przedstawiony.

W każdym razie w procesie dowodzenia uwzględnia się jedynie ustalony język teorii, zbiór jej aksjomatów, reguły dowodzenia (sformułowane na metapoziomie) i formuły dotychczas poprawnie dowiedzione. Żaden inny czynnik nie ma i nie może mieć jakiegokolwiek „udziału” w dowodzie. Znaczy to również tyle, że w procesie dowodzenia nie wolno się odwoływać do żadnych form oglądowości: rysunków, wykresów, doświadczenia świata fizycznego, eksperymentów fizycznych oraz ich wyobrażeń. Dotyczy to wszystkich teorii matematycznych, a więc również geometrii (euklidesowej) i analizy[2].

---

miast celem tego programu było przede wszystkim udowodnienie niesprzeczności matematyki. Dowód taki wykluczałby groźbę kolejnych „kryzysów podstaw”, które niewątpliwie byłyby powodowane odkrywaniem ewentualnych, nie znanych dotąd, antynomii w matematyce.

[2] Warto wspomnieć w tym miejscu o eksperymencie dydaktycznym, który przeprowadzili pracownicy Wydziału Matematyki Uniwersytetu Śląskiego pod kierownictwem prof. Lecha Dubikajtisa w IV Liceum Ogólnokształcącym w Katowicach w latach 1973-1978. Uczniom dwu klas wykładano geometrię euklidesową jako system aksjomatyczno-dedukcyjny i sformalizowany, bez odniesienia do jakichkolwiek form oglądowości. Celem eksperymentu było przetesto-

Wymóg nieoglądowości dowodów, zawarty we współczesnej metodologii matematyki, który zadomowił się tam ostatecznie od czasów Hilberta, wydaje się oczywisty i niepodważalny[3]. Dziwne może nawet wydać się przypuszczenie, że kiedykolwiek można było wypowiedzieć twierdzenie przeciwne.

Był jednak taki okres w dziejach metodologii matematyki – a precyzyjniej: w dziejach filozofii matematyki – kiedy twierdzono, że dowodząc tez matematycznych, nie tylko można, ale wręcz koniecznie trzeba odwoływać się do pewnych form oglądowości, do pewnego rodzaju przedstawień naocznych.

Twórcą tego poglądu był Immanuel Kant. Jest to o tyle paradoksalne, że właśnie do estetyki transcendentalnej Kanta odwoływał się Hilbert – pochodzący również z Królewca – budując filozoficzne podstawy formalizmu.

Najdonioślejszą tezą Kanta z zakresu epistemologii matematyki było twierdzenie, że sądy matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*. Aprioryczny charakter sądów matematyki zapewniał jej tezom walor powszechności i konieczności[4]. Według myśliciela z Królewca sądy analityczne były ufundowane na pewnej zasadzie budowy tychże sądów, mianowicie zasadzie identyczności. Podobnie – według niego – istniała dokładnie jedna zasada, na której opiera się budowa sądów syntetycznych, tzw. zasada sądów syntetycznych. Styl *Krytyki czystego rozumu* sprawił, że zasada ta nie została tam klarownie ujęta i nie była czytelna dla odbiorcy. Dlatego Kant doprecyzował później tę zasadę, stwierdzając, że sądy syntetyczne są możliwe jedynie pod warunkiem, iż pod pojęcie (*Begriff*) podmiotu sądu podpada pewne wyobrażenie (*Anschauung*)[5].

Zasadę tę można wywnioskować również z zestawienia niektórych fragmentów *Krytyki czystego rozumu*. Kant podkreślił tam, że (1) synteza dwóch rozłącznych pojęć, z których budowane są sądy syntetyczne, musi być zawsze „zapośredniczona" przez pewne *X*, trzecie przedstawienie (*Vorstellung*), które

wanie, czy właśnie takim systemem można zastąpić w klasach licealnych – o profilu matematycznym – geometrię wyłożoną w podręczniku Krygowskiej.

[3] Nie bierze się w tym wypadku pod uwagę filozoficznych podstaw systemów wyrosłych z inspiracji szkoły intuicjonistycznej.

[4] Przedstawione tu uzasadnienie, że Kant postulował konieczność odwoływania się w dowodzeniu sądów matematyki do wyobrażeń apriorycznych, a więc jakiejś formy naoczności, oparta jest na pracy J. A. Coffy *Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism* („The Journal of Philosophy" 79:1982 s. 682). Por. też: J. A. C o f f a. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station*. Cambridge 1991 s. 7-21.

[5] „[...] synthetic judgments are only possible under the condition that an intuition underlies the concept of their subject" (*Immanuel Kant's saemtliche Werke: in chronologischer Reihenfolge*. Bd. 8. Hrsg. von G. Hartenstein. Leipzig 1868 s. 241 (tł. J. A. Coffa – cyt. za: C o f f a. *Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism* s. 682).

nie jest bezpośrednio obecne w sądzie syntetycznym jako konstytutywne[6]. Na innym miejscu stwierdził on, że (2) z samych czystych pojęć nie może być wyprowadzona żadna wiedza syntetyczna, a jedynie analityczna[7]. Poza tym Kant był zawsze zwolennikiem tezy, że (3) zbiór wszystkich przedstawień (*Vorstellungen*) jest sumą mnogościową dwu rozłącznych zbiorów: zbioru pojęć (*Begriffe*) i zbioru wyobrażeń (*Anschauungen*)[8]. Z zestawienia tez (1), (2) i (3) wynika, że podstawa budowy sądów syntetycznych musi leżeć w wyobrażeniu. Wyobrażenie to podpada – zgodnie z tym, co powiedziano wcześniej – pod pojęcie podmiotu sądu syntetycznego.

Powyższa zasada dotyczy – według Kanta – wszystkich sądów syntetycznych. Rozróżniał on jednak dwa typy sądów syntetycznych: syntetyczne *a posteriori* i syntetyczne *a priori*. Jest oczywiste, że podstawą sądów syntetycznych *a posteriori* były wyobrażenia kształtowane na podstawie „materia-

[6] „Aber bei synthetischen Urteilen a priori fehlt dieses Hilfsmittel ganz und gar. *Wenn ich über den Begriffe A hinausgehen soll*, um einen andern B, als damit verbunden zu erkennen, was ist das, worauf ich mich stütze, und wodurch die Synthesis möglich wird, da ich hier den Vorteil nicht habe, mich im Felde der Erfahrung danach umzusehen? […] Was ist hier das *Unbekannte* = X, worauf sich der Verstand stützt, wenn er außer dem Begriff von A ein demselben fremdes Prädikat B aufzufinden glaubt, *welches er gleichwohl damit verknüpft zu sein erachtet?* Erfahrung kann es nicht sein, weil der angeführte Grundsatz nicht allein mit größerer Allgemeinheit, sondern auch mit dem Ausdruck der Notwendigkeit, mithin gänzlich a priori und aus bloßen Begriffen, diese zweite Vorstellungen zu der ersteren *hinzugefügt*" (*Kritik der reinen Vernunft*. Hamburg 1976 B 12-13); „Da also Erfahrung, als empirische Synthesis, in ihrer Möglichkeit die einzige Erkenntnisart ist, welche aller anderen Synthesis Realität gibt, so hat diese als Erkenntnis a priori auch nur dadurch Wahrheit (Einstimmung mit dem Objekt), daß sie nichts weiter enthält, als was zur synthetischen Einheit der Erfahrung überhaupt notwendig ist. Das oberste Principium aller synthetischen Urteile ist also: ein jeder Gegenstand steht unter den notwendigen Bedingungen der synthetischen Einheit des Mannigfaltigen der Anschauung in einer möglichen Erfahrung. Auf solche Weise sind synthetische Urteile a priori möglich, wenn wir die formalen Bedingungen der Anschauung a priori, die Synthesis der Einbildungskraft, und die notwendige Einheit derselben in einer transzendentalen Apperzeption, auf ein mögliches Erfahrungserkenntnis überhaupt beziehen, und sagen: die Bedingungen der Möglichkeit der Erfahrung überhaupt sind zugleich Bedingungen der Möglichkeit der Gegenstände der Erfahrung, und haben darum objektive Gültigkeit in einem synthetischen Urteile a priori" (tamże A 157-158, B 196-197).

[7] „[…] so ist klar, daß aus bloßen Begriffen gar keine synthetische Erkenntnis, sondern lediglich analytische erlangt werden kann" (tamże A 47, B 64-65).

[8] W niniejszym opracowaniu przyjęto, że niemieckie słowo *Anschauung* będzie oddawane polskim terminem „wyobrażenie". W polskiej literaturze z zakresu filozofii matematyki posługiwano się czasami w tłumaczeniu Kantowskiego terminu *Anschauung* słowem „intuicja" (por. I. Dąmbska. *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX w.* „Archiwum Historii i Myśli Społecznej" 24:1978 s. 167-213). Sugerowano się wtedy zapewne tym, że termin ten tradycyjnie w anglojęzycznych opracowaniach zastępuje się słowem *intuition*.

łu" empirycznego. Można by je nazwać wyobrażeniami aposteriorycznymi lub empirycznymi. Jednakże takie wyobrażenia nie mogły być podstawą syntezy pojęć prowadzącej do powstania sądów syntetycznych *a priori* właśnie ze względu na to, że zawierały one „materiał" empiryczny. Dlatego Kant zmuszony został do wprowadzenia – czy też postulowania istnienia – czystych, nieempirycznych wyobrażeń jako podstawy budowania sądów syntetycznych *a priori*. Sądy matematyki należą – według Kanta – do tej właśnie kategorii sądów. Dlatego można twierdzić, że według jego koncepcji podstawą każdego sądu matematyki jest czyste wyobrażenie – można by dodać: czyste (aprioryczne) wyobrażenie przedmiotu podpadającego pod pojęcie podmiotu sądu. Trzeba jeszcze przypomnieć, w jakim znaczeniu czyste wyobrażenie jest podstawą syntezy pojęć prowadzącej do powstania sądu syntetycznego *a priori*, sądu matematyki. Nie chodzi o dowolną syntezę dwu – zakresowo rozłącznych – pojęć. Chodzi o taką syntezę, której „produkt" – sąd syntetyczny *a priori* – opisywałby pewien stan rzeczy, był z nim zgodny, a więc prawdziwy. Czyste (aprioryczne) wyobrażenia są więc podstawą prawdziwych sądów matematyki, takiej syntezy pojęć, która gwarantuje prawdziwość sądów matematyki. Zatem proces syntezy pojęć, oparty na odwołaniu do apriorycznego wyobrażenia przedmiotu podpadającego pod pojęcie podmiotu sądu, był dla Kanta tożsamy z dowodem prawdziwości sądu matematycznego. Innymi słowy – według Kanta – we wszystkich dowodach matematycznych konieczne było odwoływanie się do apriorycznych wyobrażeń, a zatem do pewnego rodzaju nieempirycznego poglądu[9]. Jest to ostatecznie, jak pokazano, konsekwencją Kantowskiej tezy, że sądy matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*.

Pogląd Kanta jest zatem, jak to już sygnalizowano wcześniej, niezgodny z podstawowym twierdzeniem obecnej metodologii matematyki i praktyki

[9] Tę koncepcję Kanta najlepiej obrazują prezentowane przez niego „szkice" dowodów twierdzeń matematycznych: „Nehmet nur den Satz: daß durch zwei gerade Linien sich gar kein Raum einschließen lasse, mithin keine Figur möglich sei, und versucht ihn aus dem Begriff von geraden Linien und der Zahl zwei abzuleiten; oder auch, daß aus drei geraden Linien eine Figur möglich sei, und versucht es ebenso bloß aus diesen Begriffen. Alle eure Bemühung ist vergeblich, und ihr seht euch genötigt, zur Anschauung eure Zuflucht zu nehmen, wie es die Geometrie auch jederzeit tut. Ihr gebt euch also einen Gegenstand in der Anschauung; von welcher Art aber ist diese, ist es eine reine Anschauung a priori oder eine empirische? Wäre das letzte, so könnte niemals ein allgemeingültiger, noch weniger ein apodiktischer Satz daraus werden: denn Erfahrung kann dergleichen niemals liefern. Ihr müßt also euren Gegenstand a priori in der Anschauung geben, und auf diesen euren synthetischen Satz gründen" (*Kritik der reinen Vernunft* A 47-48, B 65).

matematycznej. Współczesne stanowisko można by za pomocą terminologii Kantowskiej oddać następująco: matematyka jest wiedzą czysto pojęciową[10], w żadnym dowodzie nie można się odwoływać do jakichkolwiek wyobrażeń (empirycznych czy apriorycznych)[11].

Twierdzenie Kanta jest zatem współcześnie twierdzeniem egzotycznym. Trzeba jednak postawić pytanie, czy było ono takim również w czasach jemu współczesnych. Czy metodologiczny wymóg stawiany przez Kanta dowodom matematycznym był obcy praktyce matematycznej XVIII w., czy też raczej z niej wynikał ewentualnie stanowił dla niej filozoficzną, epistemologiczną podbudowę.

Kant sam udzielił odpowiedzi na postawione tutaj pytanie. W cytowanym fragmencie *Krytyki czystego rozumu*, w którym uzasadniał konieczność odwoływania się do wyobrażeń apriorycznych w dowodach twierdzeń matematycznych, stwierdził on, że taka właśnie jest praktyka stosowana w matematyce[12]. Zatem w jego przekonaniu uzasadnienie w ramach jego epistemologii takiej konieczności było teoretycznym uzasadnieniem tego, co działo się, co praktykowano w matematyce XVIII w.

Kant dobrze znał matematykę sobie współczesną. Dominującą dyscypliną matematyki XVII- i XVIII-wiecznej była burzliwie rozwijająca się analiza. W owym czasie dyscyplina ta nie miała jeszcze ugruntowanych podstaw. Trwały gorące dyskusje dotyczące tego zagadnienia. Brak wypracowanej koncepcji liczb rzeczywistych i pojęcia granicy sprawił, że dyscyplina ta była związana szeregiem „sprzężeń zwrotnych” z mechaniką i geometrią. Nie tylko odwoływano się do poglądu z zakresu mechaniki czy geometrii, dowodząc twierdzeń analitycznych. W istocie cała analiza była „ujmowana”, „opisywana” w kategoriach mechanicznych i geometrycznych.

[10] Można by też powiedzieć, że matematyka jest nauką posługującą się znakami, symbolami. Co owym znakom (*resp.* pojęciom) odpowiada – i w jakiej rzeczywistości – tego na poziomie przedmiotowym się nie rozstrzyga. Takie stanowisko można by nazwać „metodycznym nominalizmem”.

[11] Twierdzenie to oczywiście jest obowiązujące w tym zakresie matematyki, który nazwać by można kontekstem jej uzasadnienia, czego wytworem są podręczniki i artykuły. Natomiast w kontekście odkrycia twierdzenie sformułowane powyżej nie jest prawdziwe. Twórczy matematycy, niejednokrotnie dochodząc do sformułowania pewnych twierdzeń, mogą się posługiwać i rzeczywiście posługują się różnymi formami poglądu, również tymi, które w terminologii Kantowskiej trzeba by określić jako nieempiryczne wyobrażenia.

[12] „[…] und versucht es ebenso bloß aus diesen Begriffen. Alle eure Bemühung ist vergeblich, und ihr seht euch genötigt, zur Anschauung eure Zuflucht zu nehmen, wie es die Geometrie auch jederzeit tut” (*Kritik der reinen Vernunft* A 47, B 65).

W kategoriach mechanicznych wyraził podstawowe problemy i zagadnienia rachunku różniczkowego i całkowego jeden z jego twórców, Isaak Newton. „Podobnie jak geometria była dla Newtona częścią mechaniki ogólnej, mającej do czynienia z dokładnymi pomiarami, tak nową analizę traktował on, w gruncie rzeczy, jako część mechaniki ogólnej, rozważając ruch w jego najbardziej abstrakcyjnej postaci. Za pomocą terminów mechaniki sformułowane są przede wszystkim dwa problemy, do których można sprowadzić wszystkie zagadnienia analizy:

1. Długość przebytej drogi jest stale (tzn. w każdej chwili) dana; należy znaleźć prędkość ruchu w określonym czasie.

2. Prędkość ruchu jest stale dana; należy znaleźć długość drogi przebytej w odpowiednim czasie”[13].

Związek mechaniki z analizą, zauważalny u samych początków tej ostatniej dyscypliny, zaznaczył się nie tylko tym, że jej podstawowe pojęcia i problemy wyrażano w kategoriach mechanicznych. Dotyczyło to również całego myślenia matematycznego. Bardzo często posługiwano się analogiami i wyobrażeniami przestrzennymi czy też fizycznymi jako środkami służącymi dowodzeniu i uzasadnianiu twierdzeń z zakresu analizy[14]. Najlepszym zobrazowaniem tej tendencji jest dzieło C. MacLaurina z 1742 r.[15] Autor starał się w nim oprzeć analizę na intuicjach fizyczno-geometrycznych, odwołując się do aksjomatów natury mechanicznej.

Podobna tendencja dała się zauważyć w pierwszych podręcznikach analizy, jeszcze z końca XVII w., napisanych przez J. Bernoullego oraz G. de L’Hospitala. Zawierały one bardzo ograniczony zbiór pojęć analitycznych; wszystkie zostały zilustrowane rysunkami. Zbiór reguł i twierdzeń też był niewielki. Natomiast dominującą część tych podręczników zajmowały zastosowania i zadania o charakterze geometrycznym oraz mechanicznym i optycznym[16].

---

[13] A. P. Juszkiewicz. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. W: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. Tł. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa 1976 s. 256.

[14] Por. tenże. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. W: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*. T. 3. Tł. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa 1977 s. 263.

[15] *A Treatise of Fluxions*. Vol. 1-2. Edinburgh 1742. Por. A. P. Juszkiewicz. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. W: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia* t. 3 s. 283-288.

[16] Por. A. P. Juszkiewicz. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. W: *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia* t. 3 s. 263.

Warto podkreślić, że również w ramach tego nurtu badania podstaw analizy z XVIII w., w którym wyraziła się już „nowatorska” tendencja do oparcia tej dyscypliny na pojęciu granicy, widoczne jest odwoływanie się w określaniu znaczenia tego pojęcia do kategorii geometrycznych. B. Robinsowi i J. Jurinowi geometryczne przykłady ciągów figur wpisywanych w daną figurę lub opisywanych na danej figurze posłużyły do wyrażenia mglistej w istocie koncepcji granicy. W swoich przykładach odwoływali się oni zresztą do antycznej metody wyczerpywania Eudoksosa, służącej do obliczania wielkości figur geometrycznych, która sama w sobie zawierała już zalążki idei granicy[17]. Również J. d’Alembert, który twierdził, że metodę granic I. Newtona trzeba wyzwolić z pojęć ruchu i prędkości – pojęć należących do mechaniki – podając swoją ideę granicy w *Encyklopedii*, nie wyraził jej w istocie w kategoriach arytmetycznych. Od razu odwołał się do geometrycznego przykładu, nawiązując, podobnie jak B. Robins i J. Jurin, do metody wyczerpywania Eudoksosa[18].

Można zatem generalnie stwierdzić, iż rzeczywiście w matematyce XVIII-wiecznej nagminnie praktykowano odwoływanie się w rozumowaniach, dowodach do poglądu geometrycznego czy mechanicznego. Więcej – podstawowe kategorie, którymi się posługiwano, opisywano, wyrażano czy wyjaśniano przez odwołanie się do takiego poglądu. Analiza – nie mająca solidnych podstaw – była dyscypliną uzależnioną od poglądu, opartą na nim. Zatem praktyka matematyki XVIII-wiecznej była zgodna z tezą epistemologiczno-metodologiczną Kanta, że w dowodach należy się odwoływać do jakiejś formy poglądu – w jego terminologii: do wyobrażeń *a priori*.

Zbieżność praktyki matematycznej XVIII w., która dopuszczała bardzo często odwoływanie się w dowodzeniu twierdzeń analizy do poglądu, z epistemologicznym twierdzeniem Kanta, że podstawą syntezy pojęć prowadzącej do powstania sądów syntetycznych *a priori* – a więc i sądów matematyki – są wyobrażenia *a priori*, pozwala postawić hipotezę dotyczącą powodów przyjęcia przez Kanta istnienia sądów syntetycznych *a priori* i sformułowania twierdzenia, iż sądy matematyki są właśnie tego typu sądami.

Hipotezę tę można by ująć następująco: przyczyną wprowadzenia przez Kanta do epistemologii sądów syntetycznych *a priori* była praktyka matematyczna XVIII w. W dowodach z zakresu analizy, geometrii odwoływano się do różnych form poglądu. Nie posługiwano się w dowodach matematycznych

---

[17] Por. tamże s. 282.
[18] Por. tamże s. 264, 296.

samymi pojęciami. Kant, który dość wcześnie ugruntował dychotomię: albo pojęcie, albo wyobrażenie i był świadom tego, jak powszechnie posługiwano się oglądem w dowodach matematyki XVIII w., przyjął w konsekwencji, że w dowodach matematycznych koniecznie należy posługiwać się – obok pojęć – wyobrażeniami. Musiał to być specjalny typ wyobrażeń, mianowicie wyobrażeń nieempirycznych, apriorycznych. Tylko ich aprioryczny charakter gwarantował matematyce cechy powszechności i konieczności. Niewątpliwie zauważył też Kant wynikającą stąd różnicę pomiędzy dwoma „spokrewnionymi”, według Leibniza, gałęziami wiedzy: logiką i matematyką. Logika znana Kantowi, czyli sylogistyka arystotelesowska, była niewątpliwie wiedzą wyłącznie pojęciową – operowano w niej, w jej dowodach, tylko pojęciami. Natomiast w dowodach matematycznych koniecznie trzeba było – o czym przekonany był Kant – odwoływać się również do wyobrażeń (apriorycznych) przedmiotów opisywanych w dowodzonych twierdzeniach. Mógł stąd Kant wyprowadzić wniosek, że w konsekwencji musi istnieć jakaś zasadnicza różnica pomiędzy sądami logiki i matematyki. Sądy obu gałęzi wiedzy były niewątpliwie aprioryczne. W tym zakresie nie było pomiędzy nimi różnicy. Zdaniem Leibniza sądy logiki – i również matematyki – były analityczne. Kant podtrzymał tezę Leibniza o analitycznym charakterze sądów logiki, natomiast sądom matematyki odmówił tej cechy – jak można przypuszczać – właśnie ze względu na posługiwanie się w dowodach również takimi przedstawieniami, które nie były pojęciami, a więc były wyobrażeniami. Aby zbudować sąd analityczny – sąd logiki – wystarczyło *de facto* dokonać analizy pojęć, które w sądzie tym miały pełnić funkcję podmiotu i predykatu. Do zbudowania prawdziwego sądu matematyki to nie wystarczało – istniała konieczność odwołania się do apriorycznego wyobrażenia przedmiotu mającego podpadać pod pojęcie podmiotu sądu. Zatem sądy matematyki nie były analityczne. Sądy nieanalityczne określił Kant jako syntetyczne. Stąd wniosek, że matematyka posługuje się sądami syntetycznymi (*a priori*). Kolejny wniosek to ten, że ponieważ sądy matematyki istnieją, to generalnie istnieją sądy syntetyczne *a priori*.

Być może – taką stawia się tutaj hipotezę – właśnie w ten sposób, wychodząc od zastanej praktyki matematycznej XVIII w., doszedł Kant do przekonania o istnieniu sądów syntetycznych *a priori*, którymi miały być m.in. sądy matematyki. Proces dochodzenia przez niego do przekonania o istnieniu sądów syntetycznych *a priori*, zarysowany w tejże hipotezie, miałby kierunek przeciwny do rozumowania zawartego w *Krytyce czystego rozumu*. W dziele tym wyszedł Kant od założenia, że sądy matematyki są syntetyczne *a priori*, i wydedukował stąd, za pomocą dodatkowych założeń, że w dowodach twierdzeń matematycznych należy się odwoływać do apriorycznych wyobrażeń przedmiotów matematycznych. Ta konsekwencja była korroborowana przez stan faktyczny matematyki XVIII-wiecznej. Natomiast punktem wyjścia hipotetycznego rozumowania, prowadzącego do przyjęcia przez Kanta istnienia sądów syntetycznych *a priori*, byłaby XVIII-wieczna praktyka matematyczna. Konieczny dla dowodów pogląd został w terminologii Kantowskiej określony jako wyobrażenie *a priori*. Konieczność odwoływania się w dowodach do tego typu wyobrażeń została wyjaśniona przyjęciem tezy, że sądy matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*.

Uzasadnianą w niniejszym tekście hipotezę można uogólnić następująco: prawdopodobnie praktyka matematyczna XVIII w. zdeterminowała w znacznym stopniu istotę epistemologii Kanta.

Na zakończenie wypada postawić pytanie, kiedy dokonało się przejście od Kantowskiej metodologii matematyki do metodologii utrzymanej w duchu hilbertowskim. W istocie stało się to bardzo szybko. W 1810 r. Bernard Bolzano wysunął tezę, że w dowodzeniu twierdzeń matematycznych nie trzeba i nie należy się odwoływać do jakichkolwiek wyobrażeń empirycznych czy nieempirycznych. Jego zdaniem matematyka jest nauką opartą wyłącznie na pojęciach[19]. Jednakże to twierdzenie było niespójne ze stanem matematyki początku XIX w. Dlatego Bolzano – podtrzymując swą tezę epistemologiczno-metodologiczną – przystąpił do reformy podstaw analizy. W 1817 r. ukazało się jego dziełko *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Bolzano pokazał w nim, jak podstawowe twierdzenia analizy można dowodzić bez odwoływania się do jakiegokolwiek poglądu, jakichkolwiek wyobrażeń – za pomocą metody, którą współcześnie określa się jako analityczną. Co więcej, wyraził on przekonanie, że całą matematykę można zreformować w tym duchu. Skoro matematykę można było – a zdaniem Bolzana: należało – uprawiać zgodnie z proponowanymi przez niego wskazówkami metodologicznymi, to zbędne okazywało się założenie Kanta, że twierdzenia matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*. Bolzano odrzucił tezę Kanta w swym fundamentalnym dziele *Wissenschaftslehre*.

[19] Por. B. B o l z a n o. *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*. Prag 1810 – reprint w: *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum. Czechoslovak Studies in the History of Science*. Prague 1981. Special Issue 12.

BIBLIOGRAFIA

B o l z a n o B.: Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik. Prag: Verlag Kaspar Widtmann 1810 – reprint w: Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum. Czechoslovak Studies in the History of Science. Prague 1981. Special Issue 12.

– Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag: Verlag Gottlieb Haaße 1817 – reprint w: Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum. Czechoslovak Studies in the History of Science. Prague 1981. Special Issue 12.

– Wissenschaftslehre. Stuttgart: Friedrich Frommann Verlag 1977.

C o f f a J. A.: Kant, Bolzano and the Emergence of logicism. „The Journal of Philosophy" 79:1982 s. 679-689.

– The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station. Cambridge: Cambridge University Press 1991.

D ą m b s k a I.: Idee kantowskie w filozofii matematyki XX w. „Archiwum Historii i Myśli Społecznej" 24:1978 s. 167-213.

Immanuel Kant's saemtliche Werke: in chronologischer Reihenfolge. Bd. 8. Hrsg. G. Hartenstein. Leipzig: Voss 1868.

J u s z k i e w i c z A. P.: Rachunek różniczkowy i całkowy. W: Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia. T. 2. Tł. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa: PWN 1976 s. 234-312.

– Rachunek różniczkowy i całkowy. W: Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia. T. 3. Tł. S. Dobrzycki. Red. A. P. Juszkiewicz. Warszawa: PWN 1977 s. 262-403.

K a n t I.: Kritik der reinen Vernunft. Nach der ersten und zweiten Original-Ausgabe (mit Gegenüberstellung der erheblich von einander abweichenden Abschnitte). Hamburg: Verlag Felix Meiner 1956.

M a c L a u r i n C.: A Treatise of Fluxions. Vol. 1-2. Edinburgh: Ruddimans 1742.

DIE MATHEMATIK DES ACHTZEHNTEN JAHRHUNDERTS UND DIE KANTSCHE PHILOSOPHIE DER MATHEMATIK

Z u s a m m e n f a s s u n g

Die moderne Methodologie der Mathematik verbietet in mathematischen Beweisen irgendwelche Berufung auf irgendeine Anschaulichkeit. Kant, der angenommen hat, daß mathematische Urteile synthetische und apriorische Urteile sind, hat in der Konsequenz behauptet, daß in mathematischen Beweisen eine Berufung auf apriorische Anschauungen notwendig ist. Die Kantsche Behauptung stimmte mit der faktischen Lage der Mathematik des achtzehnten Jahrhunderts überein. Damals hat man sich in der Analyse sehr häufig auf geometrische und mechanische Anschaulichkeiten berufen. In diesem Artikel wurde die Hypothese gestellt, daß Kant angenommen hat, daß die mathematischen Urteile synthetische Urteile *a priori* sind (die Kosequenz dessen war, daß in mathematischen Beweisen eine Berufung auf apriorische Anschauungen notwendig ist), um die faktische Lage der Mathematik des achtzehnten Jahrhunderts theoretisch aufzuklären.

Zusammengefaßt von Jerzy Dadaczyński