A R T Y K U Ł Y

ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LI, zeszyt 3 – 2003

ZBIGNIEW KRÓL

O PLATONIZMIE W TEORII MNOGOŚCI

I. APOFANTYKA PLATONIZMU

Nasze rozważania rozpoczniemy od kilku apofantycznych uwag. Platonizm nie jest poglądem „zewnętrznym” w stosunku do matematyki, chociaż często, z wielu powodów, jest tak rozumiany. Ktoś zajmuje się matematyką i po zakończeniu pracy zaczyna twierdzić, że zajmuje się pozaczasowymi, niezmiennymi, niefizycznymi oraz idealnymi przedmiotami. Niekiedy podczas pracy matematyk ma nieodparte „wrażenie”, że styka się z platońską rzeczywistością, lecz może zapomnieć o tym przeświadczeniu i pracować dalej, „zawieszając” jego obowiązywanie. Z drugiej strony filozof („ontolog”), nie zajmujący się matematyką, poucza, czym się ona zajmuje. Oto uniesprzeczniająca ontologia doprowadza do poznania bytu bez doświadczenia go.

Wydaje się więc, że platonizm to pogląd neutralny dla tez i teorii matematycznych. Można przecież być matematykiem, nie wierząc w „platoński mit”, wręcz określając się jako antyplatonik (np. intuicjoniści). Metodologiczna czystość także wymaga, aby nie mieszać ontologii i nauki (por. np. [Carnap 1950]; [Curry 1951]; [F, B-H, L 1973]).

Nie o taki, „zewnętrzny” platonizm tu chodzi. Nazwijmy ten rodzaj „zewnętrznego” platonizmu nieźródłowym platonizmem ontologicznym. Platonizm, który wydobywa dokładniejsza analiza, jest w a r u n k i e m uprawiania matematyki, i to do tego stopnia, że można być „nieświadomym plato-

DR ZBIGNIEW KRÓL – doktor nauk humanistycznych; adres do korespondecji: e-mail: zbigkrol@wp.pl

nikiem" (jak np. Carnap w [Carnap 1931]). Gödel wyraźnie o tym pisze (por. [Gödel 1944], np. s. 454). Jest to analogiczne (ale tylko analogiczne) do – przykładowo – nieuświadomionego posługiwania się aksjomatem wyboru, nie tylko przez Cantora (por. [Cantor 1895], np. s. 293), lecz również przez matematyków zwalczających otwarcie ten aksjomat (Lebesgue, Borel). Ilu dawniejszych matematyków zdawało sobie wyraźnie sprawę z tego, że przeprowadzając dowód *reductio ad absurdum*, dowód „nie wprost", zakładają niesprzeczność systemu? Możliwość takich dowodów traktuje się raczej jako lokalnie oczywistą: niesprzeczność systemu nie jest przecież *explicite* aksjomatem np. geometrii euklidesowej, znanej od starożytności. Dowody takie przeprowadzano, zanim powstał system sformalizowany i metateoria; są one (hermeneutycznie) wyrazem przekonania (= nieuświadomionej aktowo składowej rozumienia), iż rzeczywistość matematyczna jest dobrze i wprzód-określona, „już-tam-obecna".

Inny problem to jak w tradycyjnym obrazie platonizmu opisać platonizm b e z idealnych obiektów, pojętych jako byty w przedmiotowej (rzeczowo--obecnościowej) koncepcji bytu?

Jest to stanowisko – nazywamy je „platonizmem jako sposobem istnienia prawdy w matematyce" (pl.Tr) – obecne już u Platona (por. A r y s t o t e l e s. *Metafizyka* 990 b) i poprzez Kartezjusza (*Rozprawa o metodzie* cz. IV), Kanta doprowadza do Husserla (np. [Husserl 1900-1901, 1913] s. 124), Fregego, Gödla i Wanga (por. [Wang 1991]). Pl.Tr wyrasta z hermeneutycznej struktury: obiektowość kontra obiektywność wiedzy matematycznej[1].

Czy aprioryczne kategorie zmysłowości w estetyce transcendentalnej Kanta są „bytami" w tradycyjnym pojęciu? Wyjaśnienie ich sposobu bycia odsyła raczej do ontologii podmiotu.

Powstanie teorii mnogości (TM) doprowadziło do (hermeneutycznego) przewrotu. Matematyka okazała się oto nauką o zbiorach, a nie, jak np. w starożytności, nauką o wielkościach czy, jak w XIX w., nauką o liczbach (por. arytmetyzację matematyki). Jutro, być może, okaże się nauką o kategoriach i toposach. Matematycy starożytni zajmowali się (podobno) zbiorami,

---

[1] Więcej informacji na ten temat i literaturę przedmiotu zawiera praca [Z. K.]. Wyróżniono tam szereg typów platonizmu, które jednak nie są klasyfikacją w sensie metodologicznym. Są one składowymi sytuacji hermeneutycznej w matematyce, w której ramach dokonują się poszczególne rozstrzygnięcia ontologiczne. W [Z. K.] omówiono np. nieźródłowe platonizmy ontologiczne, w tym strukturalizm i pl.TM, platonizmy semantyczne, różne rodzaje platonizmów epistemologicznych, pl.Metod., platonizm hermeneutyczny, platonizm jako sposób istnienia prawdy w matematyce, platonizm jako sposób istnienia nieskończoności, platonizm pragmatyczny, a także różne typy konstruktywizmów i akonstruktywizmów etc.

lecz nie zdawali sobie z tego sprawy. Teoriomnogościowy nurt w podstawach matematyki jest z hermeneutycznego punktu widzenia interpretacją.

Centralna rola TM w matematyce i możliwość formalnej redukcji wszystkich (?) teorii matematycznych do TM doprowadziły do odkrycia podstawowej roli pojęcia zbioru w matematyce. Jeżeli tak jest, to – zdaniem niektórych – ontologia matematyki da się także „zredukować” do ontologii TM.

Pogląd ten nazywa się platonizmem teoriomnogościowym i przybiera wiele różnych postaci[2]. Ma on niewiele wspólnego z platonizmem teorii mnogości, którego dotyczy niniejszy artykuł.

Platonizmowi teoriomnogościowemu (pl.TM) przeczy szereg faktów.

Najpierw: cóż to jest teoria mnogości? Skoro Matematyka = Teoria Mnogości, to który system TM uznać za „właściwy”? Czy jest to teoria mnogości ZF (Zermelo-Fraenkela), ZFC (ZF + AC, czyli aksjomat wyboru), ZFA (ZF z atomami), ZFCG (ZF z aksjomatem globalnego wyboru), NBG (system von Neumanna-Bernaysa-Gödla), NBGCG, Z2 (system Zermelo II rzędu), N (system von Neumanna), KM (system Morse’a-Kelleya), ZM (system ZF + liczby kardynalne Mahlo), $ZF^{\#}$ (system ZF + aksjomat stwierdzający istnienie przynajmniej jednej liczby kardynalnej nieosiągalnej i ogólnie systemy z różnymi aksjomatami dotyczącymi „dużych” liczb kardynalnych), ST2 (por. [F, B-H, L 1973] s. 142 n.), któryś z systemów Bernaysa B ([Bernays 1958]), A (system Ackermanna [Ackermann 1956]), system PM (z *Principia mathematica* – teoria typów) i inne jego wersje T, T* ([F, B-H, L 1973] rozdz. III), NF (system Quine’a New Foundations), ML (system Quine’a, Mathematical Logic), system Wanga S, systemy Lorentzena, Leśniewskiego, Fitcha, TM intuicjonistyczna, systemy semizbiorów Vopěnki itd. itd. czy jeszcze inna teoria mnogości?

Jeśli matematyka jest teorią zbiorów, to którą konkretnie? Wymienione systemy nie są przecież zachowawczymi rozszerzeniami jakiejś jednej teorii mnogości. Nawet jeśli (jak to np. zachodzi dla ZF i NBG) jedna teoria jest zachowawczym rozszerzeniem drugiej (tzn. w NBG każde twierdzenie dotyczące zbiorów jest też twierdzeniem dotyczącym zbiorów ZF i odwrotnie), to np. NBG dopuszcza dwa rodzaje „obiektów”: zbiory i klasy właściwe, a więc jej „ontologia” (w sensie np. teorii zobowiązań ontologicznych Quine’a) różni się od „ontologii” ZF. Wymienione wyżej systemy nie są różnymi zachowawczymi rozszerzeniami, lecz istotnie różnią się, np. ZF(C) i KM. KM nie jest zachowawczym rozszerzeniem ZF: w KM możemy dowieść nieskończenie

[2] Por. [Z. K.].

wielu twierdzeń dotyczących tylko zbiorów, które nie są dowodliwe w ZF (czy NBG; por. [Kreisel, Levi 1968], tw. 10, 11), w szczególności można dowieść negacji Drugiego Aksjomatu Restrykcji ([Kreisel, Levi 1968] s. 116; por. [F, B-H, L 1973] par. 7. 5).

Sytuacja w TM jest taka, że mamy wiele istotnie różnych systemów. Podsumował to kilkadziesiąt lat temu Mostowski ([Mostowski 1967] s. 82): „[...] usiłujemy pokazać, że istnieje wiele istotnie różnych pojęć zbioru, które są równie zasadne jako intuicyjna baza dla teorii zbiorów. [...] Redukcja matematyki do teorii zbiorów dostarczałaby zadowalającej podstawy dla matematyki, jeżeliby teoria mnogości była jasną i dobrze rozumianą dziedziną nauki. Niestety tak nie jest”.

Ponieważ nie wszystkie wymienione (i nie wymienione) systemy dadzą się wzajemnie „przetłumaczyć” i wyrazić jeden w drugim, to czy te pozostałe, nieredukowalne, nie są już matematyką? A co z ich „ontologią”: czy jest inna, czy w ogóle jej nie ma...?

Ponadto żaden z systemów teorii mnogości nie wyczerpuje też wszystkich prawd o zbiorach, klasach etc. Wobec nieprzezwyciężalnej konieczności istnienia zdań nierozstrzygalnych w systemach TM, poszukiwania coraz to nowych aksjomatów (np. dotyczących dużych liczb kardynalnych) i nowych teorii należałoby przyjąć, że musimy zaczekać na „ukończoną” postać TM, by uprawiać ontologię matematyki według zaleceń pl.TM[3]. Obecnie większość najciekawszych wyników (*independence results*) i metod w TM polega na pracy niejako „obok” tych systemów lub „wewnątrz” nich, ale przy odniesieniu do czegoś „zewnętrznego” (*forcing*).

Trzeba dokładnie wiedzieć, co stwierdzamy mówiąc o redukcji „całej” matematyki np. do ZFC. Jeśli zajmujemy się algebrą i podajemy definicję, powiedzmy, grupy czy pierścienia, to przecież posługujemy się intuicyjnym (nieformalnym, niesystemowym) pojęciem zbioru. Definicje te są dla wszystkich neopozytywistów i analityków jasne. Prawie nikt nie zastanawia się dokładnie, jakim pojęciem zbioru posługujemy się w tym wypadku. Faktycznie pracujemy tu raczej w ZFA niż w ZFC. Co ze zbiorami nie uporząd-

[3] „Dość zaskakujące jest to, że w ZFC możemy określić wszystkie zwykłe matematyczne obiekty i udowodnić ich własności. Niewątpliwie pokazuje to, że ZFC jest bardzo silnym systemem aksjomatycznym. Tym niemniej nie jesteśmy skłonni przeceniać tego faktu. Byłoby błędne i bezużyteczne utożsamiać matematykę z ZFC lub rozpatrywać ZFC jako podstawy matematyki. Taki pogląd doprowadziłby do tego, że obiekty nieokreślalne w ZFC nie byłyby uznane za obiekty matematyczne, a fakty niedowodliwe w ZFC – za matematyczne fakty. Byłoby to bezpłodne ograniczenie matematyki”. Por. Shenfield w: [Barwise 1977] s. 330.

kowanymi liniowo w ZFA? W ZF(C) przecież każdy zbiór jest dobrze, a więc i liniowo uporządkowany. Ścisła „redukcja" wydaje się czymś trochę sztucznym z uwagi na bieżące potrzeby algebry, mimo że sama w sobie jest bardzo pouczająca.

Użycie intuicyjnej teorii mnogości jako hermeneutycznej składowej rozumienia w algebrze pokazuje, jak to, co oczywiste (grupa = zbiór), domaga się analizy, która może przebiegać w różnych kierunkach (ZFC, ZFA ...) – różnych z uwagi np. na ograniczenia twierdzenia o przeniesieniu Jecha-Sochora (por. np. [Barwise 1977] rozdz. B. 2; [Jech 1978] s. 197-215).

Redukcja matematyki może przebiegać w różnych kierunkach nawet w tym samym systemie (por. skolemizację, „wieloredukcję Benacerrafa" [Benacerraf 1965]). Nawet w samej TM da się wyrazić istotną część matematyki klasycznej (w sensie intuicjonistycznym) w różnych systemach. Oznacza to, że redukcja jest tylko interpretacją w sensie hermeneutyki, a nie utożsamieniem, zwłaszcza ontologicznym.

W systemie von Neumanna (por. [von Neumann 1925]) pojęciem pierwotnym nie jest pojęcie zbioru, lecz pojęcie funkcji. Pl.TM zdaje się nic nie wiedzieć (por. [Wójtowicz 1999]; [Maddy 1990] etc.), że istnieje alternatywna do teoriomnogościowej aksjomatyzacja TM w teorii kategorii, gdzie wśród terminów pierwotnych nie ma w ogóle ani pojęcia zbioru, ani pojęcia relacji należenia do zbioru (por. [Lawvere 1964]). W związku z kategorialną teorią mnogości (KTM) warto wspomnieć o wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości modeli w ZF(C) i KTM i o tym, że jeden topos może być modelem dla teorii wyższych rzędów (gdyż dla zmodelowania każdego rzędu używamy tylko jednego kategorialnego obiektu z toposu); por. [Goldblatt 1979]; [Lawvere 1964]; [Osius 1974]; [Freyd 1972]; [Mac Lane 1971]; [Mitchel 1972]. Dlaczego więc ontologia matematyki ma być ontologią zbiorów, a nie np. toposów czy funkcji?

Pl.TM jest często łączony z „tezą o logice I rzędu" (Quine, zob. niżej). Nawet w ZF(C) I rzędu cały czas pracujemy w „drugorzędowych" (i więcej) strukturach, stanowiących tło dla naszych rozważań (por. choćby układ i metodę wykładu w: [Jech 1978]). Przykłady: pojęcie liczby kardynalnej mierzalnej wymaga definicji III rzędu (w logice predykatów), ani hierarchia kumulatywna zbiorów, ani struktura składająca się z liczb porządkowych wraz z porządkującą je relacją nie są definiowalne przez żadną formułę o skończonym czy nawet pozaskończonym rzędzie; definicja prawdy Tarskiego dla systemu I rzędu nie jest formułą I rzędu w tym systemie (por. [Hanf, Scott 1961] s. 445; [Kreisel 1967] s. 86 n.).

Wskazuje to na fakt pracy w „modelu intuicyjnym” i permanentnego „wychodzenia” poza system i ustalone przez niego formalne ramy. Także brak absolutnych dowodów niesprzeczności wskazuje, że zakładana niesprzeczność wynika z istnienia modelu intuicyjnego.

A oto przykłady pojęć niedefiniowalnych w logice I rzędu: dobre uporządkowanie, progresja, poprzedzanie, nieskończoność, przeliczalność, identyczność (chyba że w logice I rzędu z identycznością; por. [Boolos 1975]).

Nie każda teoria zbiorów pozwala na wyrażenie całej klasycznej matematyki, np. „teoria zbiorów” w intuicjonizmie, która jest alternatywna, nie stanowi „podzbioru” czy jakiegoś zawężenia klasycznej teorii zbiorów.

Znajomość KTM jest warunkiem wystarczającym do odrzucenia pl.TM: nie jest prawdą, że wszystko jest zbiorem lub jest „izomorficzne” z jakimś zbiorem. Przykładowo: teoriomnogościowa definicja funkcji jest tylko jedną z możliwych „symulacji” tego – intuicyjnie danego – pojęcia. Fenomenologicznie intuicja geometryczna nie jest redukowalna do intuicyjnego pojęcia zbioru.

Podsumowując: platonizm teoriomnogościowy jest poglądem nieadekwatnym. Okaże się, że nawet jako ontologia TM jest nieźródłową, niezaawansowaną ontologicznie analizą.

Na tym zakończymy apofantyczną część naszych rozważań.

II. PLATONIZM W TEORII MNOGOŚCI

Na czym więc polega „wewnętrzny” platonizm w matematyce, a w TM w szczególności? Teoria mnogości uznana została pod tym względem za archetypiczny przypadek platońskiej teorii matematycznej[4].

---

[4] W analizie tej pomocne by były nasze rozróżnienia na obiekty pierwotnie (strukturalnie) i wtórnie (logicznie) platońskie (por. [Z. K.]). Obiekty pierwotnie platońskie z racji swojej struktury „domagają się” – w sensie kategorialnej analizy logiki – użycia określonego typu logiki, np.: poset dyskretny Pd: model dla prawa wyłączonego środka $Pd \models a \vee \sim a$, poset ukierunkowany Pk: $Pk \models \sim a \vee \sim\sim a$, toposy boolowskie. Z kolei kategoria $Set^{\rightarrow}$ („funkcji między zbiorami”), Set^2 (kategoria produktowa lub kategoria funktorów z posetu **2** w kategorię Set), poset **2** itd. są przykładami obiektów, którymi nie rządzi prawo wyłączonego środka. Por. [Goldblatt 1979] – tam definicje i dowody. Także obiekty w intuicjonistycznej koncepcji zbioru: *spread* i *species* (np. *spread* reprezentujący kontinuum) nie spełniają praw logiki klasycznej (por. np. [Heyting 1966]). W artykule nie analizujemy koncepcji obiektów zawierających tzw. *partial elements* (por. [Goldblatt 1979]).

W pierwotnym otwarciu sfery tego, co matematyczne, „przeświadczenie" o istnieniu, obecności, określoności, zastaności „rzeczywistości" matematycznej znajduje wyraz w dających się ściśle opisać metodach matematycznych. To „przeświadczenie" nie powstaje w wyniku świadomego aktu wyboru matematyka, lecz przejawia się na przykład w przekonaniu o rozwiązywalności każdego – dobrze postawionego – zagadnienia matematycznego. Użycie zasady wyłączonego środka i prawa podwójnego przeczenia, klasycznie pojętej negacji, a także definicji niepredykatywnych (i ogólniej: niepredykatywność) okazują się m e t o d a m i matematycznymi wyrastającymi z platońskiego traktowania przedmiotu badań matematycznych. To platońskie nastawienie umożliwia użycie symboliki, budowę metateorii: „spojrzenie z zewnątrz" (reifikacja) na system.

1. PLATONIZM JAKO METODA BADANIA MATEMATYCZNEGO W TM

Powyższe oraz szereg innych metod proponujemy rozważać pod ogólnym określeniem „platonizm jako metoda badania w matematyce" (pl.Metod.). Metody te z kolei wskazują na „niekonstruktywne" odniesienie się matematyka do rzeczywistości: następuje w nich raczej ostensywne wskazanie, „zastanie" obiektu niż jego *explicite* dokonana konstrukcja. Obiekt jakoś już jest „otwarty" (dany) dla podmiotu, zanim powstanie system aksjomatyczny, teoria etc. Nie możemy tego w ogólności rozważać w tym miejscu. Sytuacja domaga się hermeneutycznej analizy i ontologii (por. [Z. K.]).

Beth stwierdza ([Beth 1956] s. 41; [Beth 1959] s. 464 n.), że platonizm z poziomu dyskusji akademickiej przeniósł się na płaszczyznę, gdzie rozważa się argumenty „za" i „przeciw" określonym (platońskim) metodom *stricte* matematycznym. *Casus* konstruktywizm – platonizm jest tylko jednym z tego przejawów, a wystąpienie Brouwera trzeba rozważać jako epizod w tej dyskusji.

Użycie prawa podwójnego przeczenia, zasady wyłączonego środka i przekonanie o rozwiązywalności każdego matematycznego problemu są wyrazem platonizmu – jak pokazali np. intuicjoniści[5].

W przypadku prawa podwójnego przeczenia intuicjoniści argumentują, że z faktu niemożliwości podania (konstruktywnego) dowodu dla p nie wynika automatycznie istnienie dowodu dla $\sim p$, więc z $\sim\sim p$ nie wynika p (przy ogra-

[5] [Brouwer 1923, 1954]; [Brouwer 1927]; [Brouwer 1927 a]; [Hilbert 1925]; [Kołmogorow 1925]; [Weyl 1927]; [Bernays 1935].

niczeniu się do zdań logiki intuicjonistycznej IL tzw. system Heytinga). Jeśli więc w logice klasycznej stosujemy dowodzenie „nie wprost", oznacza to, iż rzeczywistość matematyczną traktujemy jako daną i już określoną – uznajemy bowiem pewne prawdy bez podania dowodu (często utożsamianego z podaniem pewnej „konstrukcji"). Zamiast przeprowadzenia dowodu zadowalamy się rozumowaniem, które z zaprzeczenia danego stwierdzenia dochodzi do sprzeczności z innymi, już uznanymi prawdami, i ten fakt traktujemy jako automatyczny argument za prawdziwością danego stwierdzenia. Dlatego formaliści (np. Hilbert) twierdzili, że „istnieć to znaczy być niesprzecznym" ewentualnie w ramach pewnej szerszej (hermeneutycznej) struktury (Bernays: „bezogene Existenz"; por. [Bernays 1950]).

Prawo podwójnego przeczenia i prawo wyłączonego środka są wyrazem przekonania, iż rzeczywistość matematyczna istnieje niezależnie od naszych konstrukcji i jest dobrze określona. Na tym przekonaniu oparte jest „klasyczne", sięgające np. Arystotelesa, pojęcie negacji (jak pokazujemy [Z. K.], Platon rozumiał negację raczej tak jak intuicjoniści). Prawa te są „zakodowane" np. w ZF(C) wśród aksjomatów logicznych teorii. Konsekwencje tego są nie tylko „formalne". Można pokazać, że wyniki typu Gödla pojawiają się już w systemach, w których użyto klasycznie pojętej negacji, a które nie mają ż a d n y c h reguł inferencji (por. [Z. K.], gdzie przedyskutowano bardziej szczegółowo sprawę konstruktywności i niekonstruktywności twierdzeń i dowodów Gödla i Tarskiego).

Bernays w I tomie *Grundlagen* [...] ([Hilbert, Bernays 1934] s. 20) pisze: „W teorii liczb liczby są traktowane tak, jakby leżały naprzeciw nas, w algebrze wyrażenia symboliczne z danymi liczbowymi współczynnikami wszystkie leżą naprzeciw nas".

Jak bardzo wymieniona platońska postawa jest istotna dla zbudowania teorii mnogości, pokazuje np. intuicjonistyczna teoria zbiorów, gdzie próbuje się ograniczyć tę postawę.

Jeśli porównamy (aby przeprowadzić to porównanie, trzeba z a ł o ż y ć prawo wyłączonego środka)[6] TM klasyczną i intuicjonistyczną, to w tej ostatniej cała teoria alefów (i ogólnie zbiorów dobrze uporządkowanych) o mocach większych niż $\aleph_0$ jest odrzucona jako nie mająca matematycznego (konstruktywnego) sensu. Z drugiej strony, jak pokazał Gentzen, zasada indukcji pozaskończonej jest formalizowalna w systemie IL Heytinga. W intuicjo-

[6] Ciekawym problemem jest rozważenie dla klasycznej matematyki intuicjonistycznej metateorii.

nistycznej teorii kontinuum nie obowiązuje np. prawo trychotomii i nie ma nadziei na dowód nawet słabszych wersji (niepredykatywnego) twierdzenia Bolzana-Weierstrassa (por. np. [Heyting 1966]).

W ogólności nie można uważać intuicjonizmu w jego obecnej postaci za kierunek destrukcyjny (jak jest np. w: [Gödel 1947, 1964]), lecz jako twórczą alternatywę – inny sposób myślenia. Z matematycznego punktu widzenia algebry boolowskie są szczególnym przypadkiem szerszej struktury algebr Heytinga (na których jest walentna IL). Kategorialna analiza logiki pokazuje, że IL opisuje szerszą matematyczną strukturę niż np. boolowska ZF(C) (por. [Goldblatt 1979]). Paradoksalnie: arcyplatońska TM w swej kategorialnej wersji korzysta z uznanej za antyplatońską IL.

Istotne jest to, że intuicjonizm w sensie pl.Metod. (i platonizmu hermeneutycznego w rozumieniu [Z. K.]) jest też platonizmem. Zauważają to Gödel i Wang ([Wang 1991]; [Wang 1963] s. 43 n.). Po pierwsze, obecny jest w nim, pomimo ogólnie konstruktywnej postawy, pewien „idealny" element: nie ograniczamy się tylko do tego, co zostało skonstruowane *explicite*, lecz przyjmujemy także za dostępne dla nas to, co m o ż e być skonstruowane. „Istnieć" znaczy „być konstruowalnym" (a nie „skonstruowanym"). Wskutek tego niektóre *species* nie są ściśle *explicite* skonstruowane i nie są skończone (finitystyczne). Tak jest np. ze *species* tworzącą kontinuum. Ta „idealność" (brak ograniczenia do tego, co faktycznie jest skonstruowane) pojawia się też w przypadku „rozpostarcia" (*spread*), na mocy praw Γ. W dowodzie kluczowego dla analizy intuicjonistycznej twierdzenia „o wachlarzu" (*fan theorem*) platońskie są np. *spread* K i *species* C (por. [Heyting 1966] s. 43; *species* są odpowiednikami zbiorów uzyskiwanych za pomocą aksjomatu komprehensji w klasycznej teorii zbiorów).

Do czasu wystąpienia Brouwera platońskie tło „stojące za" zasadami wyłączonego środka i podwójnego przeczenia było przykładem „cichego", nieuświadomionego platonizmu. Koncepcja liczb naturalnych jest w intuicjonizmie niepredykatywna pomimo tego, że definicje niepredykatywne są wykluczone przez zajęcie postawy konstruktywnej (por. [Heyting 1966] s. 38). W ogólnym przypadku zasada indukcji matematycznej (uzyskana z koncepcji liczb naturalnych) jest nieusuwalnie niepredykatywna (por. niżej). Za platońską składową pola hermeneutycznego w intuicjonizmie można uznać odniesienia do całości „wszystkich dowodów" i całości „wszystkich konstrukcji" (por. [Wang 1963] s. 43).

Intuicjonizm jest semikonstruktywizmem (por. stanowiska signifiki i ultraintuicjonizmu). Sposób istnienia tego, co raz skonstruowane, nie jest wyjaśniany w intuicjonizmie.

Dotykamy tu kolejnego, fundamentalnego dla matematyki (pl.Metod.) zagadnienia niepredykatywności i definicji niepredykatywnych. Wang uznaje problem niepredykatywności za bardziej fundamentalny i istotny dla matematyki niż np. o wiele słynniejsze zagadnienia: hipotezy kontinuum i aksjomatu wyboru ([Wang 1963]).

Definicje niepredykatywne polegają na określaniu pewnego obiektu przez odniesienie się (odwołanie) do większej, nie zdefiniowanej i nie skonstruowanej wcześniej *explicite* całości (klasy) obiektów. Użycie definicji niepredykatywnych jest więc uprawomocnieniem dla metody jedynie wskazywania czegoś, bez uprzedniej konstrukcji czy definicji.

W ZF z niepredykatywnością spotykamy się np. przy aksjomacie nieskończoności, który stwierdza istnienie zbioru indukcyjnego (tzn. zbioru zawierającego zbiór pusty i takiego, że razem z każdym swoim elementem x zawiera element $x \cup \{x\}$). Za pomocą zbioru indukcyjnego definiujemy zbiór liczb naturalnych N jako najmniejszy zbiór indukcyjny (czyli zbiór indukcyjny zawierający się w każdym zbiorze indukcyjnym). Odwołujemy się tu do „całości zawierającej wszystkie zbiory indukcyjne” ($\{y$: y jest zbiorem i y jest indukcyjny$\}$). Co tu się właściwie dzieje, stanie się bardziej jasne, gdy niżej wyróżnimy zbiory i klasy właściwe.

Niekonstruktywność jest tu podwójna. Po pierwsze stwierdzamy – postulujemy istnienie zbioru indukcyjnego, a po drugie stwierdzamy – odwołujemy się do klasy, której elementami są wszystkie takie zbiory. Obydwie „całości” nie są skończone (finitarne) i nie da się ich wytworzyć w skończonej liczbie kolejnych kroków konstrukcji (zob. niżej platonizm jako sposób istnienia nieskończoności).

Jest faktem, że przeciętny czytelnik (np. Carnap; por. [Carnap 1931]) może zrozumieć teorię matematyczną (nie: stworzyć) nie zauważając, co właściwie się tu dzieje, tzn. że niejako wychodzimy w tym wypadku poza formalizm, a nasze „napisy” jedynie to sankcjonują.

W wyniku pojawienia się antynomii dokładne analizy pokazały, że za antynomie odpowiedzialna jest nieograniczona platońska postawa, a konkretnie właśnie posługiwanie się całościami niepredykatywnymi (por. np. [Russell 1908]).

Dla przykładu rozważymy prostą interpretację (zakładającą, jak się okaże, aksjomaty komprehensji i ekstensjonalności – zob. niżej: „rachunek K”) antynomii Russella „zbioru wszystkich zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami”.

(1) $\mathrm{x} \in \mathrm{r} \leftrightarrow \mathrm{x} \notin \mathrm{x}$ (definiujemy zbiór r, którego elementami są te zbiory x, które nie są swoimi elementami)

Gdy pytamy, czy $\mathrm{r} \in \mathrm{r}$ („podstawiamy” x/r), otrzymujemy sprzeczność.

Oczywiście w ZF struktury typu $x \in x$ są wykluczone przez aksjomat regularności (przykładem takiej struktury jest „całość zawierająca wszystkie zbiory nieskończone”, która sama jest nieskończona – oznacza to, że nie jest ona zbiorem (obiektem) w ZF). Okazuje się, że jeśli zaprzeczymy istnieniu („wykluczymy struktury typu ...”) całości, z a n i m (w sensie logicznym, a nie czasowym, co znajduje potem ścisłe określenie w koncepcji liczb porządkowych) określono jej elementy – czyli jeśli zajmiemy konstruktywną postawę – to w (1) nie możemy za *x* podstawić *r*. Jest to wynik tego, że najpierw musimy określić *x*, aby utworzyć zbiór *r*: $\{x: x \in r\}$, a dopiero „potem” możemy użyć „r” jako gotowej całości.

Intuicyjne (przedformalne) pojęcie stopniowo tworzonej struktury, tzw. iteracyjna koncepcja zbioru, gdzie wychodząc od danej podstawy (atomy, zbiór pusty), konstruujemy wszystkie inne zbiory i każdy zbiór pojawia się „później” niż jego elementy, a elementy (same będące zbiorami) mogą tworzyć zbiór, gdy pojawiły się już wcześniej na niższym poziomie niż ten zbiór – jest źródłem aksjomatów ZFC. Kreisel pisze ([Kreisel 1967] s. 83): „Żeby uniknąć prostego nieporozumienia, zauważmy: to, o czym tu mówimy, jest intuicyjnym pojęciem typu kumulatywnego, dostarczającego koherentnego ź r ó d ł a aksjomatów [...]” Wang pisze ([Wang 1963] s. 543): „Jest uderzającym faktem, że ludzie tworzą teorię zbiorów poprzez szerokie zwracanie się do intuicji i że istnieje prawie powszechna zgoda co do poprawności i niepoprawności rezultatów otrzymywanych w ten sposób, jak w przypadku rezultatów odnoszących się do zbiorów. Iteracyjne pojęcie zbioru jest i n t u i c y j n y m pojęciem i t o intuicyjne pojęcie nie prowadzi do sprzeczności”.

Można pokazać, że wszystkie aksjomaty ZFC są prawdziwe w iteracyjnej koncepcji zbioru (por. [Boolos 1971]; [Barwise 1977] rozdz. B. 1). W związku z niepredykatywnością indukcji matematycznej zwróćmy uwagę, że kolejne stopnie konstrukcji zakładają metasystemową, intuicyjną koncepcję liczb naturalnych.

Iteracyjna koncepcja zbioru pozwala uniknąć antynomii Russella. Czy jednak iteracyjna koncepcja zbioru jest na tyle konstruktywna, by nie być platońską? Otóż nie: nic w niej nie mówimy o tym, że zbiory w poszczególnych stadiach mogą być definiowane tylko predykatywnie. Dlatego jeśli dopuszczamy dowolne definicje (a więc i niepredykatywne) zbiorów na poszczególnych poziomach, to mamy do czynienia z „maksymalną iteracyjną” koncepcją zbioru. Z tego powodu Wang ([Wang 1963]) nazywa maksymalną iteracyjną koncepcję zbioru platonizmem.

Gödel opracował maksymalnie konstruktywną (minimalną) koncepcję iteracyjną zbioru, gdzie zbiory na poszczególnych poziomach są konstruowane tylko w ściśle określony, konstruktywny sposób za pomocą 10 (a właściwie ośmiu, gdyż dwie operacje Gödla są definiowalne przez pozostałe, ale komplikuje to trochę dowody) dokładnie określonych operacji tworzenia zbiorów. Otrzymana hierarchia tzw. zbiorów konstruktywnych L jest minimalnym (tzn. zawartym w każdym innym tranzytywnym modelu ZF) tranzytywnym modelem dla ZF(C), zawierającym wszystkie liczby porządkowe. Zarazem jest to model, gdzie prawdziwe są AC (aksjomat wyboru) i CH (hipoteza kontinuum).

Nawet jeśli każdy zbiór w naszym uniwersum jest konstruowalny, z uwagi na inne, wymienione już metody, TM z V = L jest platońska (np. z uwagi na platonizm jako sposób istnienia nieskończoności czy użytą logikę). Trzeba jednak zaznaczyć, że AC jest już bardziej „konstruktywny". To samo stwierdzamy w przypadku modelu HOD (*hereditarily ordinal-definable sets*).

Konstruktywność w iteracyjnej koncepcji zbioru (nawet tej z V = L) jest tylko czymś wtórnym. Dopuszczamy konstruktywne (np. predykatywne) definiowanie w stosunku do koncepcji, która postuluje istnienie pewnych obiektów. Aksjomaty pary, sumy, zbioru potęgowego są bardzo silnymi egzystencjalnymi z a ł o ż e n i a m i (por. [Mostowski 1967]). Postulujemy w nich i jedynie stwierdzamy, że są uprawnione pewne całości, których *explicite* nie skonstruowaliśmy ani nie skonstruujemy. Aksjomaty te są relacjami, komunikatami z naszych przedformalnych badań. Dlatego są platońskie w sensie pl.Metod. (i platonizmu hermeneutycznego).

Widzimy, że aksjomat nieskończoności i definicja liczb naturalnych (w ZF) „zaburzają" iteracyjną koncepcję zbioru i są wręcz z nią „sprzeczne".

W przypadku innych antynomii również mamy do czynienia z „platońskimi" całościami, np. w antynomii Burali-Fortiego zbioru wszystkich liczb porządkowych Ord: załóżmy, że Ord jest całością zawierającą wszystkie liczby porządkowe i że jest ona zbiorem. Ponieważ Ord jest zbiorem, istnieje taka liczba porządkowa α, która jest typem porządkowym zbioru Ord (na mocy twierdzeń udowodnionych wcześniej, np. w koncepcji zbioru Cantora), a więc $\alpha \in$ Ord i $\alpha \cup \{\alpha\} \in$ Ord (na mocy pewnych własności liczb porządkowych w sensie von Neumanna, tzn. zbiorów tranzytywnych i dobrze uporządkowanych). W antynomii Richarda taką platońską całością jest zbiór „wszystkich nazw" etc.

Platońską (*naive*) koncepcję zbioru „formalizuje się" za pomocą dwóch aksjomatów (rachunek K): komprehensji i ekstensjonalności. Aksjomat ekstensjonalności stwierdza, że zbiory mające te same elementy są identyczne (możliwe są różne koncepcje identyczności; por. [F, B-H, L 1973]). Aksjomat komprehensji (pewnik abstrakcji) pozwala utworzyć jeden obiekt z dowolnej wielości „elementów" (Cantor, Hermes etc.): dla każdej formuły $\varphi(x)$ istnieje zbiór tych x-ów, które spełniają tę formułę $\{x: \varphi(x)\}$. (Dokładne sformułowanie „rachunku K" por. np. [Boolos 1971]; [F, B-H, L 1973]; [Beth 1965]).

Aksjomat komprehensji prowadzi do sprzeczności: jeśli zdefiniujemy zbiór wszystkich zbiorów $V = \{x: x = x\}$ i zbiór $\{x: \varphi(x)\}$, gdzie $\varphi(x) =$ „$x \notin x$", otrzymamy sprzeczność. Nie oznacza to „nieistnienia" V ani nie oznacza niemożliwości umysłowego utworzenia $\{x: x \notin x\}$. Oznacza to tylko, że obiekty takie nie mogą być obiektami p e w n y c h systemów, np. ZF, o ile systemy te mają być niesprzeczne. W innych systemach, np. NF Quine'a, można posługiwać się zbiorem uniwersalnym. Aksjomat komprehensji jest wyrazem naszej intencjonalnej (świadomościowej) zdolności do tworzenia dowolnych całości (co znajduje wyraz w językach naturalnych) bez potrzeby martwienia się o sprzeczność.

Jedną ze strategii (pozaformalnych) budowania TM (por. [Maddy 1988]) jest doktryna *limitation of size*. Pozwala ona na używanie „kompresji" dowolnej wielości w jedność, a więc także niepredykatywnej, pod warunkiem, że ograniczamy się do elementów należących do już wcześniej określonego zbioru (ale niekoniecznie skonstruowanego!). Tak więc aksjomat separacji (aksjomat wyróżniania, którego logicznym „rdzeniem" w różnych systemach jest schemat $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$ i x, y są zbiorami) w ZF dopuszcza definicje niepredykatywne (aksjomat separacji: $\forall z \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x))$, x, y, z są zbiorami; tu: $\varphi(x)$ jest niepredykatywne, jeżeli może zawierać zmienną związaną tego samego „poziomu" w iteracyjnej koncepcji zbioru albo typu w teorii typów co y).

Aksjomat separacji narzuca ograniczenia na definiowanie niepredykatywne, np. w ZF, ale nie pozbywa się tej metody. Analogicznie niepredykatywne są np. teoria typów PM (na mocy tzw. aksjomatu redukowalności) czy teoria von Neumanna (aksjomat IV. 2; por. [von Neumann 1925]), NBG (pomimo tego, że zawiera predykatywny aksjomat komprehensji dla klas w przeciwieństwie do jawnie niepredykatywnego aksjomatu niepredykatywnej komprehensji dla klas, np. w systemie Morse'a; por. [F, B-H, L 1973] par. 7. 4, 7. 5), NF, ML ...

Aby nie zagubić się w szczegółach technicznych, zwracamy jedynie uwagę na problem niepredykatywności. W jaki sposób konkretnie pojawiają się one, por. np. [F, B-H, L 1973]; [Wang 1963]; o tym, że są one egzystencjalnym, ontologicznym, a nie tylko formalnym problemem (jak np. dla Carnapa [Carnap 1931]) por. [Gödel 1944].

Czy matematyka i TM mogą się obejść bez niepredykatywności? Nie da się zrekonstruować całej matematyki klasycznej w predykatywny sposób. Rozważa to analiza predykatywna (por. [Feferman 1964], a wcześniej [Weyl 1918] cz. 5). Jest to z kolei związane z nieusuwalną niepredykatywnością indukcji matematycznej.

Gdy (niepredykatywnie) zdefiniujemy zbiór liczb naturalnych N, np. w ZF, indukcja matematyczna jest dowodliwą własnością N. Różne próby uniknięcia niepredykatywności okazują się tylko przesunięciami problemu: zawsze musimy założyć, że coś jest d a n e (por. [Parsons 1992]). Na przykład jeśli zdefiniujemy predykat Na = „*a* jest liczbą naturalną”

$$Na = \forall y[\mathrm{Fin}\ y \wedge x \in y \wedge \forall x\ ((Sx \in y \rightarrow x \in y) \rightarrow 0 \in y)] \wedge$$
$$\exists y[\mathrm{Fin}\ y \wedge a \in y \wedge \forall x\ (Sx \in y \rightarrow x \in y)]$$

za pomocą Fin y = „*y* jest zbiorem skończonym” i Sx = „następnik *x*” (czyli jeśli ograniczymy się do finitystycznych, konstruktywnych liczb *n*, por. analogicznie: kwantyfikatory o ograniczonym zakresie), to musimy użyć niepredykatywnego schematu separacji, żeby udowodnić indukcję matematyczną dla predykatów zawierających klasyczne kwantyfikatory.

Feferman pisze ([Feferman 1964] s. 96): „Zgodnie z tą [predykatywną koncepcją – przyp. Z. K.] tylko liczby naturalne mogą być rozpatrywane jako «dane» nam (*as «given» to us*) [...] W przeciwieństwie do tego zbiory są tworzone przez ludzkie działanie jako wygodne abstrakcje [...] z poszczególnych warunków czy definicji”.

Problem niepredykatywności w definicjach wiąże się z użyciem klasycznych kwantyfikatorów (tzn. kwantyfikatorów o nieograniczonym zakresie). Zakresy takich kwantyfikatorów są kolejnym przykładem całości, których istnienie tylko się sankcjonuje, przyjmuje (toleruje), a nie konstruuje. (System kwantyfikatorów rozgałęzionych Hintikki nie unika platonizmu; por. np. [Hintikka 1997]). Formalizm klasycznej kwantyfikacji (pochodzący od Fregego; por. *Begriffschrift* w: [Heijenoort 1967] s. 1-82) jest jedynie zapisem, relacją, komunikatem (a nie konstruowaniem) z pewnej przedformalnej, hermeneutycznej sytuacji, sankcjonowanej, akceptowanej przez ten formalizm. Niekonstruktywność klasycznych kwantyfikatorów pokazuje klasyfikacja Kleene'a-Mostowskiego. (Zdanie Gödla G, zdanie 49 w oryginalnej pracy [Gödel 1931] jest niekonstruktywne, gdyż jest poprzedzone kwantyfikatorem ogólnym o nieograniczonym zakresie, chociaż dotyczy funkcji (pierwotnie) rekurencyjnych).

Teza „o logice I rzędu” i kwantyfikatorowa koncepcja „zobowiązań” ontologicznych teorii (np. [Quine 1953]; [Quine 1969]) są związane z sobą. Dzięki nim chce się ograniczyć „zobowiązania” ontologiczne teorii matematycznych, wykluczając zobowiązania ontologiczne względem przedmiotów wyższych rzędów, aby uniknąć „ontologii typu Meinonga”. Osiąga się to przez redukcję, „przekład”, zakresów kwantyfikatorów ogólnych do zakresów kwantyfikatorów szczegółowych („indywidua”) w logice I rzędu (na mocy praw de Morgana dla kwantyfikatorów). Nie dostrzega się, że redukcja taka jest możliwa tylko przy założeniu klasycznie pojętej negacji i w związku z tym przy z a ł o ż e n i u pewnego typu platonizmu, którego w żaden sposób nie da się opisać za pomocą środków użytych przez Quine’a. Dla porównania można zapoznać się z koncepcją intuicjonistycznej logiki kwantyfikatorów (np. [Heyting 1966]), aby zobaczyć, co się dzieje, gdy rezygnujemy z „platońskiego nastawienia” ujawniającego się w użyciu kwantyfikacji w sensie klasycznym.

Niepredykatywności (definicje niepredykatywne) nie zawsze prowadzą do antynomii. Przykładowo niepredykatywne całości pojawiają się w każdym z dwóch argumentów przekątniowych Cantora (por. znakomitą analizę [Wang 1963] rozdz. II). Także „kolistość” (samozwrotność) nie musi prowadzić do sprzeczności. Chęć pokazania tego była jednym z powodów powstania twierdzenia Gödla (por. [Gödel 1944]). Z kolei obrona Ramseya ([Ramsey 1925]) definicji niepredykatywnych zakłada nieźródłowy platonizm ontologiczny i jest argumentem za niesprzecznością, prawomocnością matematyczną użycia takich definicji.

Warto zaznaczyć, że Quine został „platonikiem” w wyniku analizy właśnie argumentu przekątniowego Cantora ([Quine 1947]). Koncepcja Quine’a zafałszowuje jednak i zniekształca rzeczywistą postać platonizmu w teorii mnogości natychmiast po jej odkryciu. Jest to próba wtłoczenia czegoś, co – zdaniem Quine’a – nie może mieć miejsca, w dogmatyczne ramy fizykalizmu.

2. PLATONIZM JAKO SPOSÓB ISTNIENIA NIESKOŃCZONOŚCI W MATEMATYCE

Przy okazji aksjomatu nieskończoności należy poruszyć jeszcze jeden aspekt zagadnienia platonizmu. Uznaliśmy za konieczne (por. [Z. K.]) wyróżnić jeszcze jeden typ platonizmu: platonizm jako sposób istnienia nieskończoności (pl.Niesk.). Jest on ściśle związany z platonizmem jako metodą badania w matematyce. Traktowanie bowiem nieskończonych zbiorów jako gotowych, określonych całości jest powszechnie przyjętą metodą matematyki. W TM znajduje to swoje usankcjonowanie właśnie w aksjomacie nieskończoności (dzięki jego niepredykatywności).

Ponieważ np. dla nominalisty czy fizykalisty liczba przedmiotów we Wszechświecie jest najprawdopodobniej skończona (por. [Henkin 1953]; [Putnam 1971]; [Scholz 1938] etc.), więc jeśli mówimy w matematyce o nieskończoności i – co więcej – całości nieskończone traktujemy obiektowo, tzn. jako gotowe, określone, „już obecne" (wtedy same mogą być elementami innych całości, np. zbiorów – por. choćby fundamentalną koncepcję liczb porządkowych), to muszą być one jakoś „niefizyczne", „nie z tego świata" (= platońskie). Traktujemy je wtedy jako aktualnie, a nie potencjalnie nieskończone.

Platonizm jako sposób istnienia nieskończoności był szczególnie istotny dla szkoły formalistów i Hilberta, co z kolei doprowadziło do wyróżnienia systemów finitystycznych i (*nota bene*) idealnych w programie Hilberta ([Barwise 1977] rozdz. D. 1; [Sieg 1999]; [Hilbert 1925]). Częściowe fiasko pierwotnego programu Hilberta pokazuje zarazem, że metasystemowo nie możemy pozbyć się intuicyjnego pojęcia nieskończoności: finitarne dowody niesprzeczności można podać tylko dla bardzo słabych systemów, np. dla teorii typów właśnie b e z aksjomatu nieskończoności. Systemy takie nie pozwalają (na mocy II twierdzenia Gödla) nawet na wyrażenie arytmetyki Peano. Z drugiej strony możemy (łatwo) podać finitarne dowody względnej niesprzeczności różnych systemów, np. Con(ZF) $\rightarrow$ Con(VNB). Pojęcie „siły" systemu (system A jest silniejszy niż system B, jeśli w A możemy pokazać niesprzeczność B) jest związane ze stopniem niepredykatywności teorii: teorie „bardziej" niepredykatywne są silniejsze. (Szczegóły i definicje por. [F, B-H, L 1973] s. 330 n.).

Bolzano ([Bolzano 1851] par. 13) i Dedekind ([Dedekind 1888] par. 5) sądzili, że istnienie zbioru nieskończonego jest dowodliwe. Zbiór nieskończony definiowano jako zbiór refleksywny, tzn. taki, który jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. Tak definiują też zbiór nieskończony Cantor ([Cantor 1878]) i Peirce ([Peirce 1933]). Koncepcja ta zakłada jednak pojęcie zbioru liczb naturalnych („równoliczność").

Dowód, np. Dedekinda istnienia zbioru nieskończonego (tu: refleksywnego), jest dowodem w intuicyjnej (przedaksjomatycznej i niesformalizowanej) TM i wikła się w antynomię Russella (por. [F, B-H, L 1973] s. 46).

Współczesne wersje aksjomatu nieskończoności jedynie postulują istnienie zbioru nieskończonego. Trudno więc taki zbiór nazywać „konstruktem", gdyż właśnie nie można go skonstruować, lecz tylko odwołać się do pozaformalnego i pozasystemowego pojęcia nieskończoności i zaadaptować je do systemu formalnego. Można oczywiście podać aksjomaty równoważne z aksjomatem nieskończoności, które nie stwierdzają *explicite* istnienia zbioru nieskończonego, lecz istnienie takiego zbioru jest z nich dowodliwe (por. [Bernays 1961a] czy system A Ackermanna [F, B-H, L 1973] par. 7. 7).

W systemie Ackermanna jest to aksjomat komprehensji dla zbiorów (który nie jest motywowany przez doktrynę *limitation of size*). Aksjomat ten nie ma jasnego sensu intuicyjnego. Systemy A i ZF są równoważne: każde zdanie ZF dowodliwe w A jest twierdzeniem w ZF i każde twierdzenie ZF jest dowodliwe w A. Drugą implikację dowodzimy przez wykazanie, że wszystkie aksjomaty ZF (a więc i aksjomat nieskończoności) są twierdzeniami A.

Aksjomat nieskończoności jest niezależny od pozostałych aksjomatów TM, rozpatrywanych np. w pracy [F, B-H, L 1973], a w szczególności od pozostałych aksjomatów w systemach ZF(C) czy NBG.

Aksjomat nieskończoności faktycznie wprowadza zbiór nieskończony (niezależnie od ograniczeń Löwenheima-Skolema): zbiór wszystkich dziedzicznie skończonych zbiorów V_ω w kumulatywnej hierarchii ZF(C) może być modelem wszystkich aksjomatów z wyjątkiem właśnie omawianego. Dla każdej liczby porządkowej $\alpha > \omega$ V_α jest modelem aksjomatu nieskończoności. Z drugiej strony w ZFC bez aksjomatu zbioru potęgowego istnienie zbioru przeliczalnie nieskończonego, lub nawet istnienie przeliczalnie wielu różnych takich zbiorów, nie pozwala na skonstruowanie zbiorów o mocy większej niż $\aleph_0$. Do tego potrzebny jest aksjomat zbioru potęgowego (por. [Bernays 1937-1954]). Z kolei użycie w tym przypadku AC (w którejś z wersji) wskazuje na rolę „platońskich” założeń (por. niżej uwagi o AC w punkcie 3) w rozważaniach np. nad liczbami kardynalnymi. Widoczne też stają się związki pl.Niesk. i pl.Metod.

Nasuwa się pytanie o związek pomiędzy niepredykatywnością a nieskończonością. Przede wszystkim, z powodów już podanych, postulujemy niepredykatywnie istnienie zbioru nieskończonego. (Niepredykatywny) aksjomat separacji nie jest zastępowalny w ZF(C) przez skończoną liczbę pojedynczych aksjomatów (tzn. aksjomatów nie będących schematami) i jest to spowodowane właśnie jego niepredykatywnością (por. [F, B-H, L 1973] s. 38 n.). Ogólnie jednak niepredykatywność nie oznacza braku skończonej aksjomatyzowalności, jak to widać choćby po skończenie aksjomatyzowalnej, lecz niepredykatywnej NBG czy NF.

Aksjomat nieskończoności nie da się więc traktować jako nie zinterpretowany napis i jest on wyrazem platonizmu jako sposobu istnienia nieskończoności w matematyce. Warto tu dodać, że dokładna analiza źródeł pokazuje, iż Platon byłby przeciwnikiem istnienia zbiorów aktualnie nieskończonych i aksjomatu komprehensji (por. [Z. K.]).

3. KOLEJNE PRZYKŁADY PLATOŃSKICH METOD W TM

Z dotychczasowej dyskusji wynika, że nie da się traktować obiektów matematycznych jako „konstruktów”, co nie przeszkadza temu, iż są one tak z uporem nazywane i traktowane przez neopozytywistyczno-analitycznych filozofów i metodologów nauk formalnych. Mają oni już „filozofię” matematyki. Trzeba jeszcze tylko skonstruować matematykę, która spełniałaby założenia takiej filozofii, tzn. byłaby całkowicie bez sensu (*meaningless*), całkowicie skonstruowana i dostatecznie czysta (tzn. nie dotycząca niczego, bo nie zinterpretowana).

Ideałem byłby tu system składający się np. z jednego znaku „B” (z dwoma brzuszkami), bez reguł inferencji. Niestety, znak też jest przedmiotem intencjonalnym. Teorię modeli próbuje się zastąpić „wzajemnie jednoznacznym” odwzorowaniem systemu w siebie.

Kolejnym aksjomatem wyrastającym z platońskiego traktowania przedmiotu badań matematycznych jest aksjomat wyboru. Wzbudził on tak wielkie kontrowersje właśnie z uwagi na platoński i niekonstruktywny charakter. Postuluje on istnienie pewnego zbioru bez podania (w ogólnym przypadku) jakiegokolwiek sposobu jego konstrukcji. Aksjomat ten stwierdza (w równoważnej postaci), że dla każdej niepustej rodziny zbiorów istnieje funkcja wyboru, tzn. funkcja, która „wybiera” po dokładnie jednym elemencie z każdego zbioru należącego do danej rodziny. Oczywiście, jeśli uznamy, że matematyka jest ściśle ludzką działalnością, to w przypadku zbiorów nieskończonych człowiek jako istota „skończona” (= o ograniczonych, np. skończonym czasem życia, możliwościach) nie może dokonać nieskończonej liczby wyborów w skończonym czasie. Zbiór wyboru (i funkcja wyboru) jest więc idealny. Istnieją sformułowania aksjomatu wyboru równoważne w ZFC z aksjomatem wyboru, które okazują się nierównoważne np. w ZFA (tzw. aksjomat krótkiego wyboru). W ZFC aksjomat wyboru jest równoważny z twierdzeniem Zermelo o dobrym uporządkowaniu. W ogólności można podać struktury TM (modele), gdzie twierdzenie o dobrym uporządkowaniu zachodzi, a nie obowiązuje aksjomat wyboru (tzw. model Leviego).

Pytanie dla platonika teoriomnogościowego: która z teorii – ZFC czy ZFA – jest = TM? Może mają chociaż takie same „ontologie”, różniąc się matematycznie?

Żaden sformalizowamy system TM nie wyczerpie wszystkich prawd i struktur matematyki. Teoriomnogościowa interpretacja pojęcia funkcji ([Wiener 1914]) jako gotowego, statycznego, istniejącego w całkowicie „wprzód-określony” sposób i traktowanego jako gotowa całość zbioru par uporządkowanych jest też platońska. Podano alternatywne, „dynamiczne" ujęcia intuicyjnie danego (z hermeneutycznego punktu widzenia) pojęcia funkcji w teorii kategorii (por. np. [Goldblatt 1979] – *pull back*). W sprawie platońskiej, teoriomnogościowej koncepcji funkcji zob. też krytykę Brouwera (np. [Brouwer 1927]) tej koncepcji. Można nie uznawać prawomocności krytyki Brouwera, ale nie można zaprzeczyć, że pokazuje ona, iż pojęcie to jest platońskie w sensie pl.Metod.

Omówione poniżej kolejne metody będące wyrazem platonizmu w TM dotyczą różnych sytuacji wychodzenia poza formalne ramy systemów (co świadczy np. o pracy w modelu intuicyjnym), spojrzenia „z zewnątrz" na system (co jest związane z przejawami reifikacji, będącej wyrazem intencjonalności). Problem intencjonalności zostaje powoli ponownie odkrywany w filozofii matematyki (literatura por. [Z. K.] i np. [Hintikka 1992]).

Powiedzieliśmy, że wyrazem nieograniczonego platonizmu (w sensie np. [Bernays 1935]) jest „rachunek K". Często uważa się (zwłaszcza w pracach metodologów), że antynomie pokazały sprzeczność i „nieistnienie" pewnych pojęć i struktur, np. zbioru wszystkich zbiorów. Przykładowo – w ZF(C) wykluczamy struktury typu $x \in x$ za pomocą aksjomatu regularności. Postulaty metodologicznej czystości są „wyabstrahowywane" z jakiejś *basic* TM, tzn. teorii mnogości opartej na czterech czy pięciu aksjomatach dotyczących podstawowych działań na zbiorach. Nawet bez antynomii Russella widać, że aksjomat komprehensji w rachunku K wyznacza „sprzeczne" struktury (np. $\{x: \varphi(x)\}$ i $\{x: \sim\varphi(x)\}$).

W rzeczywistości nie da się zrozumieć TM i jej poszczególnych systemów bez mówienia o uniwersum, Ord, Card (całości zawierającej wszystkie liczby kardynalne) etc. Znajduje to swój wyraz m.in. w rozróżnieniu zbiorów i klas.

Klasa (w ZF jest to pojęcie pozaformalne i pozasystemowe) to całość utworzona z tych obiektów, które spełniają daną funkcję zdaniową: $\{x: \varphi(x)\}$. Zasada komprehensji jest tego wyrazem: zbiór to całość złożona z elementów mających określoną własność, spełniających określone prawo etc. Formalnie klasy są izomorficzne z funkcjami, faktycznie jednak wskazują na odwołanie się do całości danej bezpośrednio w określonych aktach świadomości. Tak samo w mowie potocznej możemy mówić o zbiorze wszystkich ludzi i nie musimy uprzednio znać każdego człowieka, by utworzyć taką całość. Dla Ramseya (analogicznie) – jeśli istnieją przedmioty matematyki, to definicje niepredykatywne są uprawnione (np. „najwyższy człowiek w tym pokoju"). Czy te przedmioty istnieją?

Fenomenologicznie stwierdzamy ich istnienie, ale nie w fenomenologii Husserla. Jest to spowodowane zasadą redukcji transcendentalnej, każącą traktować sądy, przekonania egzystencjalne jako nieźródłowe, wątpliwe przeświadczenia. Potrzebna do tego jest zmodyfikowana, hermeneutyczna fenomenologia typu Heideggera.

Każdy zbiór, np. *y* w ZF(C), jest klasą, gdyż możemy go traktować jako formułę $\{x: x \in y\}$. Antynomia Russella pokazuje, że $V = \{x: x = x\}$ nie jest zbiorem (czyli obiektem spełniającym aksjomaty np. ZF(C)). Takie klasy, jak V nazywamy właściwymi.

W ZF(C) istnieje tylko jeden typ obiektów, tzn. zbiory, w NBG – dwa. Tak więc pojęcie klasy jest pojęciem nieformalnym (intuicyjnym) w ZF(C). Te nieformalne ramy są niezbędne dla zrozumienia tego, co właściwie robimy w ZF(C): przykładowo aksjomat regularności stwierdza, że każdy zbiór jest dobrze uporządkowany. Co więcej, aksjomat ten ma równoważne sformułowanie: uniwersum V jest dobrze uporządkowane. W ZF(C) nie ma zbiorów częściowo uporządkowanych, które nie są dobrze uporządkowane. Każda klasa C ma też $\in$-minimalny element. Fakty te pozwalają utworzyć kumulatywną hierarchię zbiorów. Wszystko, co najważniejsze w ZF(C), wyrażamy przez odniesienie do k l a s y wszystkich liczb porządkowych Ord, np. indukcję pozaskończoną, twierdzenie o izomorfizmie (= uniwersum V nie dopuszcza nietrywialnych $\in$-automorfizmów), *well founded induction* etc. Co więcej: „normalna” teoria modeli ma paralelę w teorii modeli, gdzie model musi być parą <U, R> (U – zbiór, R – relacja, a więc też zbiór), w postaci par k l a s. (Aby nie podawać czegoś, co jest „chlebem powszednim” w TM, zakładamy znajomość, np. [Jech 1978]).

Dobre uporządkowanie każdego zbioru ma swoje dobre oparcie w intuicji: każdy zbiór ma „ileś” elementów, które mogą być „wyjmowane” z danej całości i ułożone w „szufladkach”. Możemy jednak badać obiekty, które nie dadzą się dobrze uporządkować.

Teoria mnogości to analiza intuicyjnie danego pojęcia zbioru jako „każdej wielości, która może być pomyślana jako jedność”, a różne systemy TM opisują różne „kawałki” z pleromy wszystkich możliwych intencjonalnie obiektów. Pleromie tej nie przysługuje globalna niesprzeczność. Jest to coś zbliżonego do Dedekinda „zbioru wszystkich obiektów, które mogą być przedmiotem naszej myśli”. Systemy np. semizbiorów budują przykłady zbiorów, które mogą zawierać klasy niewłaściwe [Vopěnka, Hájek 1972].

W ZF(C) aksjomat separacji ogranicza nierestrykcyjne użycie aksjomatu komprehensji (zbiór to całość tych elementów, które mają określoną własność $\{x: \varphi(x)\}$) do elementów całości, która sama jest zbiorem. W NBG aksjomat separacji dopuszcza już mniej restrykcyjne użycie aksjomatu komprehensji, pod warunkiem, że wiązane są tylko zmienne oznaczające zbiory. NBG jest konserwatywnym rozszerzeniem ZF: NBG$\vdash\psi \leftrightarrow$ ZF$\vdash\psi$, gdzie ψ zawiera tylko zmienne oznaczające zbiory. System MK (Morse'a-Kelleya) dopuszcza już dowolne ψ i nie jest konserwatywnym ani skończenie aksjomatyzowalnym rozszerzeniem ZF. MK nie pozwala jednak na rozpatrywanie „superklas" takich, jak np. $\{R \subset$ Ord: R dobrze porządkuje Ord$\}$. System Quine'a NF jest nieużyteczny jako system podstaw matematyki. (Nie wiemy, czy NF jest niesprzeczny, nawet względem ZF, NF$\vdash$~AC). W NF istnieje zbiór uniwersalny, ale nie można mówić o zbiorach nieskończonych, a więc np. zbiór N nie jest tam definiowalny (por. [Quine 1937]; [Quine 1953 a]; [Rosser 1939]; [Rosser 1952]; [Rosser, Wang 1950]).

Całość możliwych intencjonalnie obiektów tworzy składową pola hermeneutycznego, w którym uprawiamy i rozumiemy TM. Zawsze możemy badać nowe obiekty, nieredukowalne do już znanych, np. można podać aksjomatykę dla obiektów typu „x jest zbiorem $\leftrightarrow$ x posiada elementy, które same są zbiorami". Otrzymujemy nie posiadające $\in$-minimalnych obiektów całości, gdzie zwykłe zbiory (ZFA) stanowią wycinki takich „uniwersów" (analizę takich niestandardowych struktur – *non-well-founded*, np. zawierających sekwencje cykliczne i inne, wykluczone przez aksjomat ufundowania – por. w: [Aczel 1988]).

Niedowodliwe, pozaformalne strategie w teorii mnogości, takie jak: *limitation of size* (ograniczenie wielkości zbiorów – iteracyjna koncepcja zbioru), finityzm (zbiory nieskończone są „podobne" do skończonych), *maximize*, *whimsical identity*", „niewyczerpywalność", *uniformity*, *reflection*, *diversity* (por. [Maddy 1988]) etc. są przykładem hermeneutycznego odniesienia się do intuicyjnego pojęcia zbioru, a nie (jak chce Maddy [Maddy 1990]) czegoś, co upodabnia matematykę do fizyki i nauk empirycznych. Następnym tego przykładem jest formułowanie zdań, problemów, zagadnień, które są niezależne i nierozstrzygalne w danym systemie. Formułując np. hipotezę kontinuum, jesteśmy przecież już „poza" systemem ZF(C). Gdzie więc jesteśmy?

W intuicyjnej TM następuje „widzenie" własności (liczby kardynalne słabo nieosiągalne, nieosiągalne, Mahlo ...). Dowód niezależności i nierozstrzygalności jest już wtórny. Nikt nie pracuje na nie zinterpretowanych formułach. Możliwa i konieczna w filozofii matematyki jest analiza noetyczno-noematyczna.

To, że w TM mówimy o liczbach kardynalnych nieosiągalnych, oznacza, iż mówimy o czymś, co jest niekonstruktywne i niekonstruowalne za pomocą znanych operacji tworzenia zbiorów (separacja, zbiór potęgowy lub np. operacje Gödla). TM platonikowi (Gödel) zawdzięcza najbardziej konstruktywny epizod w swych dziejach (V = L, HOD). W przypadku twierdzeń o liczbach kardynalnych nieosiągalnych stykamy się ze skrajnym przypadkiem pl.Metod. (por. [Jech 1978]; [Kunen 1980]). Pełny opis sytuacji domaga się wyróżnienia platonizmu hermeneutycznego (por. [Z. K.]). Temat jest zbyt obszerny, aby przedstawić go w ramach tego artykułu.

Platonizm w ogólności w matematyce, a w TM w szczególności nie polega na biwalencji zdań, jak chce Dummett (np. [Dummett 1982]; [Dummett 1993]).

III. PLATONIZM TEORII MNOGOŚCI JAKO WARUNEK JEJ UPRAWIANIA

Na tym zakończyliśmy skrótowy przegląd metod będących wyrazem platonizmu w TM. Na dokładne omówienie nie ma tu miejsca. Pl.Metod. pokazuje, że możliwa jest źródłowa, „wewnętrzna" ontologia matematyki. Zwrócenie uwagi na ten typ platonizmu jest dopiero początkiem drogi badania doprowadzającego do zrozumienia platonizmu. Pokazanie, że mamy w nim do czynienia z ontologią w sensie hermeneutycznej ontologii fenomenologicznej, wymaga etapu nazwanego przez nas platonizmem hermeneutycznym (por. [Z. K.]). W sensie takiej ontologii problem ontologiczny w matematyce staje się źródłem rozwoju wiedzy matematycznej i powodem powstania różnych, często sprzecznych i zwalczających się kierunków w filozofii i podstawach matematyki. Można to uzasadnić także za pomocą historycznego studium przypadku.

Metody platońskie pokazują, że matematyk bez świadomych decyzji (niezależnie od „światopoglądu") odnosi się do „rzeczywistości", którą bada, jako do istniejącej. Zajęcie takiej postawy nie jest dodatkiem, z którego można zrezygnować (por. tzw. platonizm pragmatyczny w [Z. K.]), lecz warunkiem uprawiania matematyki. Nie jest to też jakaś subiektywno-psychologiczna „otoczka". Równie nonsensowne byłoby nazywanie fenomenologii psychologizmem dlatego, że mówi o aktach świadomości.

Platonizm jako metoda jest konieczny dla matematyki, tak jak otwarcie oczu jest konieczne, żeby widzeć.

Sposób b y c i a człowieka jest sposobem bycia.

W pl.Metod. stykamy się z fenomenami hermeneutyczno-fenomenologicznymi, w których ujawnia się bycie. Sytuacja ontologiczna w matematyce to modus fundamentalnej sytuacji ontologicznej „bycia-w-świecie" (por. *Bycie i czas* Heideggera). Nie oznacza to całkowitej akceptacji ontologii Heideggera.

Jak pokazano w [Z. K.], właśnie w matematyce, jeszcze przed wystąpieniem Heideggera, pojawiły się fakty każące powątpiewać w niepodważalność metafizyki rzeczowości i fenomenologii efektywnych danych zredukowanej świadomości (por. interpretację myśli Fregego w: [Z. K.]).

Czy w teorii mnogości możemy mówić, że coś jest „intuicyjnie dane”? Ogólna neopozytywistyczno-analityczna tendencja metodologiczna, przejawiająca się np. w wyróżnianiu kontekstu odkrycia i uzasadniania, sugeruje, aby unikać analizy tego, co intuicyjnie dane, gdyż nic takiego nie ma lub nie podlega analizie. Takie metodologiczne wymogi równają się żądaniu, aby nie uprawiać matematyki. Wszystkie wymienione (i nie wymienione tutaj – por. [Z. K.]) platońskie metody świadczą o konieczności mówienia o tym, co jest pozaformalnie, intuicyjnie dane. Brak intelektualnej zdolności do zauważenia tego (np. [Maddy 1990]) nie jest żadnym kontrargumentem.

„Dowód i istnienie nieaksjomatyzowalnych sformalizowanych teorii jest bez wątpienia jednym z najważniejszych ostatnich osiągnięć w badaniach nad podstawami matematyki. Filozoficzne i epistemologiczne implikacje tego rezultatu nie zostały wyczerpująco ocenione” ([F, B-H, L 1973])[7].

Kluczową hermeneutyczną strukturą w intuicyjnej TM jest struktura „jeden-nad-wielością” ([Z. K.]).

Jak pokazują np. finityzm, intuicjonizm, różne konstruktywizmy (czy antropologizmy w terminologii [Wang 1963] rozdz. II), wizja naszego człowieczeństwa ma wpływ na kształt uprawianej matematyki. W matematyce i w jej filozofii też chodzi o człowieka i o to, kim on jest.

BIBLIOGRAFIA

NH = North Holland Publishing Company.
SLFM = Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.
JSL = „Journal of Symbolic Logic”.

[Aczel 1988] A c z e l P.: Non-well-founded Sets. Stanford: Center for the Study of Language and Information 1988 No. 14.

[Ackermann 1956] A c k e r m a n n W.: Zur Axiomatik der Mengenlehre. „Mathematische Annales” 131:1956 s. 336-345.

[7] Autorzy mówią tu np. o tzw. arytmetyce Skolema ([Skolem 1934]; [Skolem 1955]; [Wang 1963]), czyli kategorycznej teorii liczb naturalnych, która na mocy twierdzenia Gödla nie może być zaksjomatyzowana. W TM sytuacja jest jednak inna niż w teorii liczb. „Nie istnieje obecnie sformalizowana teoria mająca ten sam status w stosunku do (intuicyjnej) Teorii Zbiorów, jaki ma arytmetyka Skolema odnośnie do (intuicyjnej) Teorii Liczb” ([F, B-H, L 1973] s. 324). Jest to spowodowane tym, że nie mamy ogólnie akceptowanej definicji prawdy w TM.

[B, P 1987] Philosophy of Mathematics: Selected Readings. Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. Ed. 2. Cambridge: Cambridge University Press 1987 (reprint).

[Barwise 1977] Handbook of Mathematical Logic. Ed. J. Barwise. Amsterdam: NH 1977; tł. ros.: Moskwa: Nauka 1982.

[Benacerraf 1965] B e n a c e r r a f P.: What Numbers Could Not Be. W: [B, P 1987] s. 272-294.

[Bernays 1935] B e r n a y s P.: Sur le platonisme dans les mathématiques. „L'Enseignement Mathématique" 34:1935 s. 52-69.

[Bernays 1937-1954] B e r n a y s P.: A System of Axiomatic Set Theory. JSL 2:1937 s. 65-77; 6:1941 s. 1-17; 7:1942 s. 65-89, 133-145; 8:1943 s. 89-106; 13:1948 s. 65-79; 19:1954 s. 81-96.

[Bernays 1950] B e r n a y s P.: Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit. W: Etudes de philosophie des sciences en hommage à F. Gonseth à l'occasion de son 60éme anniversaire. Neuchâtel: Editions du Griffon 1950 s. 11-25.

[Bernays 1958] B e r n a y s P.: Axiomatic Set Theory (with a Historical Introduction by A. A. Fraenkel). Amsterdam: NH 1958. SLFM.

[Bernays 1961] B e r n a y s P.: Zur Frage der Unendlichkeitenschemata in der Axiomatischen Mengenlehre. W: Essays in the Foundations of Mathematics. Ed. Y. Bar-Hillel, Y. Poznanski, E. I. J. Rabin, A. Robinson. Jerusalem: Magnes Press 1961 s. 110-131.

[Beth 1956] B e t h E. W.: L'existence en mathématiques. Paris: Gauthier--Villars 1956. Collection de Logique Mathématique. Série A.

[Beth 1959] B e t h E. W.: The Foundations of Mathematics: A Study in the Philosophy of Sciences. Amsterdam: NH 1959.

[Beth 1965] B e t h E. W.: Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics. Dordrecht: D. Reidel 1965.

[Bolzano 1851] B o l z a n o B.: Paradoxien des Unendlichen. Leipzig: Reclam 1851. Tł. pol. Ł. Pakalska: Paradoksy nieskończoności. Warszawa: PWN 1966.

[Boolos 1971] B o o l o s G.: The Iterative Conception of Set. W: [B, P 1987] s. 486-502.

[Boolos 1975] B o o l o s G.: O logice drugiego rzędu. W: Fragmenty filozofii analitycznej: filozofia logiki. Tł. C. Cieśliński, A. Sierszulska. Red. J. Woleński. Warszawa: Spacja 1997 s. 97-118.

[Brouwer 1923, 1954] B r o u w e r L. E. J.: On the Significance of the Principle of Exluded Middle in Mathematics, Especially in Function Theory. W: [Heijenoort 1967] s. 334-345.

[Brouwer 1927] B r o u w e r L. E. J.: On the Domain of Definition of Functions. W: [Heijenoort 1967] s. 446-463.

[Brouwer 1927 a] B r o u w e r L. E. J.: Intuitionistic Reflections on Formalism. W: [Heijenoort 1967] s. 490-492.

[Cantor 1878] C a n t o r G.: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. „Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)" 84:1878 s. 242-258.

[Cantor 1895] C a n t o r G.: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Tl. 1-2. „Mathematische Annalen" 46:1895 s. 481-512; 49:1897 s. 207-245.

[Carnap 1931] C a r n a p R.: The Logicist Foundations of Mathematics. W: [B, P 1987] s. 41-52.

[Carnap 1950] C a r n a p R.: Empiricism, Semantics, and Ontology. W: t e nż e. Meaning and Neccessity. Ed. 2. Chicago: University of Chicago Press 1956 s. 205-221.

[Curry 1951] C u r r y H.: Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics. Amsterdam: NH 1951. SLFM.

[Dedekind 1888] D e d e k i n d R.: Was sind und was sollen die Zahlen. 6. Aufl. Braunschweig: Vieweg 1930. Tł. ang. w: Essays on Theory of Numbers by R. Dedekind. Ed. W. W. Beman. Chicago–London: Open Court 1901. Reprint – New York: Dover 1963.

[Detlefsen 1992] Proof, Logic and Formalization. Ed. M. Detlefsen. London–New York: Routledge 1992.

[Dummett 1982] D u m m e t t M.: Realism. „Synthese" 52:1982 s. 55-112.

[Dummett 1993] D u m m e t t M.: Realism and Anti-realism. W: t e n ż e. The Seas of Language. Oxford: Oxford University Press 1993 s. 462-468.

[F, B-H, L 1973] F r a e n k e l A. A., B a r - H i l l e l Y., L e v y A.: Foundations of Set Theory. Amsterdam: NH 1973. SLFM.

[Feferman 1964] F e f e r m a n S.: Systems of Predicative Analysis. W: [Hintikka 1969] s. 95-127.

[Freyd 1980] F r e y d P.: The Axiom of Choice. „Journal of Pure and Applied Algebra" 19:1980 s. 103-125.

[Goldblatt 1979] G o l d b l a t t R.: Topoi: The Categorial Analysis of Logic. Amsterdam–New York–Oxford: NH 1979.

[Gödel 1931] G ö d e l K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und vervandter Systeme. I. „Monatshefte für Mathematik und Physik" 38:1931 s. 173-198.

[Gödel 1944] G ö d e l K.: Russell's Mathematical Logic. W: [B, P 1987] s. 447-469.

[Gödel 1947, 1964] G ö d e l K.: What Is Cantor's Continuum Problem? W: [B, P 1987] s. 470-485.

[Hanf, Scott 1961] H a n f W., S c o t t D.: Classifying Inaccessible Cardinals. „Notices of the American Mathematical Society. (Providence)" 8:1961.

[Heijenoort 1967] H e i j e n o o r t J. van: From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1951. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1967.

[Henkin 1953] H e n k i n L.: Some Notes on Nominalism. JSL 18:1953 s. 19-29.

[Heyting 1966] H e y t i n g A.: Intuitionism: An Introduction. Ed. 2. Amsterdam: NH 1966. SLFM.

[Hilbert 1925] H i l b e r t D.: On the Infinite. W: [Heijenoort 1967] s. 367-392.

[Hilbert, Bernays 1934] H i l b e r t D., B e r n a y s P.: Grundlagen der Mathematik. Bd. 1. Berlin: Springer 1934.

[Hintikka 1969] Philosophy of Mathematics. Ed. J. Hintikka. London: Oxford University Press 1969.

[Hintikka 1992] H i n t i k k a J.: Eseje logiczno-filozoficzne. Tł. A. Grobler. Oprac. J. Woleński. Warszawa: PWN 1992.

[Hintikka 1997] H i n t i k k a J.: A Revolution in the Foundations of Mathematics? „Synthese" 111:1997 s. 155-170.

[Husserl 1900-1901, 1913] H u s s e r l E.: Badania logiczne. Tł. J. Sidorek – T. 1. Toruń: Wydawnictwo Comer 1996; T. 2/I. 2/II. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 2000.

[Jech 1978] J e c h T.: Set Theory. New York–London: Academic Press 1978.

[Kołmogorow 1925] K o ł m o g o r o w A. N.: On the Principle of Exluded Middle. W: [Heijenoort 1967] s. 414-437.

[Kreisel 1967] K r e i s e l G.: Informal Rigour and Completeness Proofs. W: [Hintikka 1969] s. 78-94.

[Kreisel, Levy 1968] K r e i s e l G., L e v y A.: Reflection Principles and Their Use for Establishing the Complexity of Axiomatic Systems. „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" 14:1968 s. 97-191.

[Kunen 1980] K u n e n K.: Set Theory: An Introduction to Independence Proofs. Amsterdam: NH 1980.

[Lakatos 1967] Problems in the Philosophy of Mathematics. Ed. I. Lakatos. Amsterdam: NH 1967. SLFM.

[Lawvere 1964] L a w v e r e F. W.: An Elementary Theory of the Cathegory of Sets. „Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)" 52:1964 s. 1506-1511.

[Mac Lane 1971] M a c L a n e S.: Categories for the Working Mathematician. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag 1971.

[Maddy 1988] M a d d y P.: Believing the Axioms. I. JSL 53:1988 s. 481-511; Believing the Axioms. II. JSL 53:1988 s. 736-764.

[Maddy 1990] M a d d y P.: Realism in Mathematics. New York: Oxford University Press 1990.

[Mitchell 1972] M i t c h e l l W.: Boolean Topoi and the Theory of Sets. „Journal of Pure and Applied Algebra" 2:1972 s. 261-274.

[Mostowski 1967] M o s t o w s k i A.: Recent Results in Set Theory. W: [Lakatos 1967] s. 82-96.

[Osius 1974] O s i u s G.: Categorical Set Theory: A Characterization of the Category of Sets. „Journal of Pure and Applied Algebra" 4:1974 s. 79-119.

[Parsons 1992] P a r s o n s Ch.: The Impredicativity of Induction. W: [Detlefsen 1992] s. 139-161.

[Peirce 1933] P e i r c e C. S.: Collected Papers. Vol. 3. Eds. C. Hartshorne, P. Weiss, A. W. Burks. Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1933.

[Putnam 1971] P u t n a m H.: Philosophy of Logic. New York: George Allen and Unwin 1971.

[Quine 1937] Q u i n e W. V. O.: New Foundations for Mathematical Logic. „American Mathematical Mounthly" 44:1937 s. 70-80.

[Quine 1947] Q u i n e W. V. O.: On Universals. JSL 12:1947 s. 74-84.

[Quine 1953] Q u i n e W. V. O.: From a Logical Point of View. Cambridge: Harvard University Press 1953.

[Quine 1953 a] Q u i n e W. V. O.: On ω-nconsistency and So-called Axiom of Infinity. JSL 18:1953 s. 119-124.

[Quine 1969] Q u i n e W. V. O.: Existence and Quantification. W: t e n ż e. Ontological Relativity and Other Essays. New York: Columbia University Press 1969 s. 91-113.

[Ramsey 1925] R a m s e y F. P.: The Foundations of Mathematics. „Proceedings of the London Mathematical Society" 25:1925 s. 338-384.

[Rosser 1939] R o s s e r J. B.: On the Consistency of Quine's New Foundation. JSL 4:1939 s. 15-24.

[Rosser 1952] R o s s e r J. B.: The Axiom of Infinity in Quine's New Foundations. JSL 17:1952 s. 238-242.

[Rosser, Wang 1950] R o s s e r J. B., W a n g H.: Non-standard Models for Formal Logics. JSL 15:1950 s. 113-129.

[Russell 1908] R u s s e l l B.: Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. W: [Heijenoort 1967] s. 150-182.

[Scholz 1938] S c h o l z H.: Die mathematische Logik und die Methaphysik. „Philosophisches Jahrbuch der Görres Gesellschaft" 51:1938 s. 1-35.

[Sieg 1999] S i e g W.: Hilbert's Programs: 1917-1922. „Bulletin of Symbolic Logic" 5:1999 s. 1-44.

[Skolem 1934] S k o l e m T.: Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. „Fundamenta Mathematica" 23:1934 s. 150-161.

[Skolem 1971] S k o l e m T.: Peano's Axioms and Models of Arithmetic. W: Mathematical Interpretations of Formal Systems. Ed. J. E. Fenstad. Amsterdam: NH 1971 s. 1-14.

[Tarski 1936] T a r s k i A.: O pojęciu wynikania logicznego. W: t e n ż e. Pisma logiczno-filozoficzne. T. 1: Prawda. Warszawa: PWN 1995 s. 186-202.

[von Neumann 1925] N e u m a n n J. von: An Axiomatization of Set Theory. W: [Heijenoort 1967] s. 393-413.

[Vopěnka, Hájek 1972] V o p ě n k a P., H á j e k P.: The Theory of Semisets. Amsterdam–London: NH 1972. SLFM.

[Wang 1963] W a n g H.: A Survey of Mathematical Logic. Amsterdam: NH 1963.

[Wang 1974] W a n g H.: The Concept of Set. W: [B, P 1987] s. 530-570.

[Wang 1991] W a n g H.: To and from Philosophy – Discussions with Gödel and Wittgenstein. „Synthese" 88:1991 s. 229-277.

[Weyl 1918] W e y l H.: Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig: Veit 1918; reprint – Berlin–Leipzig: Gruyter 1932.

[Weyl 1927] W e y l H.: Comments on Hilberts Second Lecture on the Foundation of Mathematics. W: [Heijenoort 1967] s. 480-484.

[Wiener 1914] W i e n e r N.: A Simplification of the Logic of Relations. W: [Heijenoort 1967] s. 224-227.

[Wójtowicz 1999] W ó j t o w i c z K.: Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki. Warszawa: Wydział Filozofii i Socjologii 1999.

[Z. K.] K r ó l Z.: Aktualne kontrowersje wokół platonizmu w filozofii matematyki. Praca doktorska napisana na Wydziale Filozofii KUL pod kierunkiem ks. prof. Z. Hajduka. Lublin 2002.

ON PLATONISM IN SET THEORY

S u m m a r y

This article points at some (strictly) mathematical methods, which often tend to display not fully conscious treatment of mathematical reality as given, existing and already-present-there. This attitude is prequisite for mathematical research (including set theory), and not merely a psychological add-on, and the methods can be best described as „platonism as method of enquiry in mathematics” (pl.Metod.) and „platonism as mode of existence of infinity” (pl.Niesk.). Thus, platonism becomes one of the problems internal to mathematics. Identifying pl.Metod. and pl.Niesk. as such, being described here with respect to set theory, is only a starting point in the process of grasping and explaining platonism. This requires phenomenological hermeneutics of mathematics to be conceived (cf. [Z. K.]).

Summarized by Zbigniew Król

Słowa kluczowe: platonizm, teoria mnogości, hermeneutyka matematyki, fenomenologia, Heidegger, konstruktywizm, intuicjonizm.

Key words: platonism, set theory, hermeneutics of mathematics, phenomenology, Heidegger, constructivism, intuitionism.