

MAREK SZYDŁOWSKI
ADAM KRAWIEC

PROMIENIOWANIE RELIKTOWE PODPISEM TOPOLOGII WSZECHŚWIATA

I. WSTĘP

Pojęcie przestrzeni należy do tych fundamentalnych pojęć, które mają swoje korzenie w filozofii, a ich ewolucja pozostawała w ścisłym związku z rozwojem matematyki, astronomii, kosmologii i fizyki. Początkowo sądzono, że badanie własności przestrzeni jest wyłącznie przedmiotem zainteresowania geometrii. Później przestrzeni Euklidesa, która była jedynie pewną konstrukcją matematyczną, tkwiącą u podstaw jego *Elementów*, próbowano nadawać status przestrzeni fizycznej, tj. traktować ją jako model realnych stosunków geometrycznych panujących w otaczającym nas świecie. Dla Kanta przestrzeń euklidesowa była nie tyle matematyczną abstrakcją realnej przestrzeni fizycznej, co uzasadnieniem faktu, że matematyka – nauka dedukcyjna – potrafi w sposób jednoznaczny i konieczny ustalać fakty empiryczne. Gwarantem prawdziwości sądów syntetycznych *a priori* (poszerzających naszą wiedzę i nie opartych na doświadczeniu) są pewne formy zmysłowości, dane genetycznie każdemu człowiekowi – kategorie czasu i przestrzeni.

Dr hab. MAREK SZYDŁOWSKI – Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ, Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Jagiellońskiego, Zakład Astrofizyki Wysokich Energii; adres do korespondencji: ul. Orla 171, 30-244 Kraków; e-mail: uoszydlo@cyf-kr.edu.pl

Dr ADAM KRAWIEC – Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej UJ, Instytut Spraw Publicznych, Zakład Teorii i Polityki Gospodarczej; adres do korespondencji: Rynek Główny 8, 31-042 Kraków; e-mail: uukrawie@cyf-kr.edu.pl

Przedmiotem naszych zainteresowań będzie pojęcie przestrzeni fizycznej oraz jej kształtu. Wydaje się, że pytanie o otaczającą nas przestrzeń fizyczną w sposób poprawny zostało postawione dopiero przez Alberta Einsteina po sformułowaniu przezeń ogólnej teorii względności w 1915 r. Zgodnie z newtonowską teorią grawitacji wszystkie materialne ciała oddziałują na siebie siłą proporcjonalną do ich mas i odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości między nimi. Zależność ta, pomimo swej potęgi w wyjaśnianiu zjawisk fizycznych, ma charakter fenomenologiczny i nie odpowiada na pytanie o naturę oddziaływań grawitacyjnych. W swojej teorii Einstein interpretuje grawitację jako odkształcenie czasoprzestrzeni, będącej unifikacją pojęcia czasu i przestrzeni w jeden samoistny byt fizyczny. Czas i przestrzeń od tej pory przestają być niezależnymi obiektami fizycznymi, a stają się przejawami tworu bardziej fundamentalnego i bardziej realnego w tym sensie, że prawa fizyczne odnoszą się do tego właśnie pojęcia czasoprzestrzeni. Zgodnie z teorią Newtona w euklidesowej przestrzeni siła grawitacji zakrzywia tor ruchu planety i sprawia, że krąży ona wokół Słońca po orbicie zamkniętej. Einstein dokonał zmiany w tym obrazie świata, pokazując, że na planetę nie działa żadna siła i jej ruch jest swobodny. To odkształcenie czasoprzestrzeni, wywołane obecnością Słońca, jego masy i energii, powoduje, że najkrótsza droga łącząca dwa dowolne punkty przestrzeni nie jest linią prostą, ale staje się krzywą, którą nazywamy geodezyjną.

I odwrotnie: badanie przestrzeni fizycznej podlega osądowi doświadczenia, tzn. może być i jest przedmiotem badań fizyki w tym samym sensie, w jakim są nimi inne obiekty fizyczne. Fakt, że przestrzeń nie jest sztywną sceną, na której rozgrywają się procesy fizyczne, lecz jest przez nie kształtowana i jednocześnie sama je kształtuje, czyni zasadnym pytanie o to, jaka jest czasoprzestrzeń, w której żyjemy. Jedynym sposobem znalezienia odpowiedzi na to pytanie jest badanie ruchu materii i własności promieniowania wypełniającego Wszechświat. Dlatego szukamy struktur tworzonych przez galaktyki i ich gromady, ciemnej materii czy też niejednorodności promieniowania tła. W ramach tego pytania zawiera się szczegółowa kwestia kształtu przestrzeni, w której żyjemy. Zwróćmy jednak uwagę na to, że nie jest nam dana tylko jedna przestrzeń fizyczna, która obowiązywałaby w całej historii Wszechświata, ponieważ procesy fizyczne, które się w niej dzieją, są jej aktywnym czynnikiem i kształtują ją. Jest to więc twór geometryczny, podlegający zmianom w czasie. Pojęcie kształtu przestrzeni wydaje się jednak być własnością inwariantną względem jej czasowej ewolucji, a tym samym czymś bardzo fundamentalnym.

Obserwując Ziemię nawet z wysokości kilku tysięcy metrów, można mieć wrażenie, że jest płaszczyzną. Gdyby jednak spekulować o możliwym kształcie Ziemi, to równie dobrze mógłby to być torus czy sfera, jak i nieskończenie wiele innych możliwości. Badanie możliwych form przestrzennych jest w istocie pytaniem o jej globalną formę zgodną z obserwacjami lokalnego fragmentu. Przestrzeń, która lokalnie jest podobna do przestrzeni Euklidesa, jest bardzo ważnym obiektem matematycznym zwanym *rozmaitością różniczkową*. Nasze pytanie o możliwy globalny kształt przestrzeni jest również pytaniem o lokalny kształt przestrzeni, o której zakładamy, że jest *rozmaitością różniczkową*, ponieważ istnieją podstawy, by sądzić, że struktura czterowymiarowej czasoprzestrzeni jest całkowicie określona przez jej trójwymiarową część przestrzenną i tempo jego zmian, oraz że obie mają strukturę *rozmaitości*. Od tej pory będziemy *implicite* zakładać, że rzecz idzie o trójwymiarową część przestrzenną obiektu bardziej fundamentalnego jakim jest *rozmaitość czasoprzestrzenna* – lokalnie podobna do czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Badanie trójwymiarowych *rozmaitości* jest w pewnym sensie uogólnieniem analogicznych badań dwuwymiarowych *rozmaitości*. Rzecz jednak w tym, że o ile pełna klasyfikacja tych ostatnich jest znana matematykom od przeszło stu lat, to klasyfikacja topologiczna trójrozmaitości jest wciąż niekompletna z powodu ogromnej złożoności topologicznej niektórych ich form przestrzennych. Jeszcze do niedawna powszechnie był podzielany pesymizm co do znalezienia takiej pełnej klasyfikacji, dopóki Thurston nie pokazał, jak wszystkie trójrozmaitości dają się ułożyć w pewnym porządku, uwzględniając w ich geometrycznym opisie wygięcia i zapętlenia. Zabieg nazywany *chirurgią* pozwala na konstrukcję trójrozmaitości według zaplątanej linki sznurkowej niezależnie od sposobu jej zapętlenia. Złożoność przedsięwzięcia W. P. Thurstona jest zilustrowana w jego pracy z J. Weeksem („Scientific American”). Wyobraźmy sobie, że porównujemy dwa zaplątane motki włóczki lub sieci rybackiej po to, aby się dowiedzieć czy, są one zaplątane w ten sam sposób.

Jeśli nie istnieje systematyczna metoda rozstrzygnięcia tego faktu, to nie ma nadziei na sukces w dziedzinie klasyfikacji trójrozmaitości.

Taka klasyfikacja jest interesująca dla matematyka z punktu widzenia własności topologicznych trójrozmaitości. Szczególnie chodzi o te własności obiektów geometrycznych, które są niezmiennikami homeomorfizmów – przekształceń polegających na wszelkich deformacjach obiektu typu ściskanie i rozciąganie (byleby nie rozrywać i nie sklejać punktów przestrzeni). Dwa obiekty uważamy za identyczne z topologicznego punktu widzenia,

jeśli są homeomorficzne. Topolog to człowiek, który nie odróżnia torusa z dziurą od filiżanki z uchem. Własnościami topologicznymi są np. wymiar, orientowalność, charakterystyka Eulera rozmaitości, etc.

Jedną z trudności w zrozumieniu form topologicznych, czyli kształtu przestrzeni, której lokalne własności są określone przez metrykę, polega na tym, że przy ich badaniu trudno sobie je wyobrazić tak, jak wyobrażamy sobie dwuwymiarową powierzchnię zanurzoną w przestrzeni trójwymiarowej. Gdyby się uprzeć, to można by zanurzać trójrozmaitości w szerszej przestrzeni, w której znalazłoby się miejsce na zobaczenie jej wygięć i samoprzecięć, ale nie jest to konieczne. Dodajmy, że przestrzeń, w której zanurzamy naszą rozmaitość, jest tworem sztucznym, ponieważ wszystkie jej geometryczne własności mogą być wywiedzione z geometrii wewnętrznej tej powierzchni bez odwoływania się do zewnętrznej przestrzeni. Niestety do określenia jej kształtu krzywizna przestrzeni nie wystarcza, jakkolwiek wielkość ta odgrywa fundamentalną rolę w ogólnej teorii względności.

Intuicje dotyczące sposobu wyjścia z tej trudności można odnaleźć już w dziewiętnastowiecznej matematyce, kiedy to odkryto, że dowolną dwuwymiarową rozmaitość można sobie wyobrazić jako prostokąt, w którym w odpowiedni sposób zostały sklezione (utożsamione) pary boków. Po sklejeniu szwy znikają i np. płaskie istoty żyjące na tej powierzchni nie potrafią odróżnić obu sytuacji – przed i po sklejeniu. Wyobraźmy sobie „płaszczaki” żyjące na dwuwymiarowej rozmaitości z taką egzotyczną topologią na kwadracie, w którym przeciwległe boki zostały utożsamione. Kiedy „płaszczak” opuści górny bok kwadratu, wyjdzie z powrotem z przeciwległego punktu na dolnym boku. Analogicznie: gdy płaszczak zniknie z prawej strony, pojawi się z lewej. Nasze istoty nie wiedzą, czy zamieszkują torus dwuwymiarowy, czy kwadrat, w którym dokonano podobnych utożsamień.

Trik ten jest wykorzystywany w różnych grach wideo i na tym przykładzie widzimy, że dla naszego intuicyjnego rozumienia torusa nie trzeba dokonywać faktycznego klejenia boków kwadratu – wystarczy śledzić ruch obiektu po kwadracie, mając jedynie w domyśle klejenie. To ważne, że trik z abstrakcyjnym klejeniem daje się uogólnić na przypadek trójwymiarowy. W ten sposób możemy sobie wyobrażać trójwymiarowe struktury bez odwoływania się do zewnętrznej przestrzeni. Fakt, że obiektu nie widzimy, nie oznacza, że wszystko o nim wiemy i rozumiemy, jakie relacje panują w jego świecie. Analogiczna procedura – analogiczna do tej, która pozwoliła nam skonstruować dwuwymiarowy torus – w świecie trójwymiarowym opiera się na sześciianie, którego ściany zostały utożsamione. Wyobraźmy sobie, że żyjemy w pokoju w kształcie prostopadłościanu, w którym skleiono przednią

ścianę z tylną, lewą z prawą i sufit z podłogą. Jeśliby dokonać faktycznie takiego sklejenia, to musielibyśmy sobie wyobrazić, że pokój wygina się i odpowiednie ściany łączą się w czterowymiarowej przestrzeni. Bardzo trudno jest wyobrazić sobie taki trójtorus, ale – jak podkreślaliśmy – wcale nie jest to konieczne dla zrozumienia tej różnorodności. Wystarczy zastosować abstrakcyjną procedurę klejenia, tzn. myśleć, że obiekt poruszający się ku przedniej ścianie zniknie, by następnie pojawić się dokładnie naprzeciw, na tylnej ścianie; podobnie kiedy obiekt znika w prawej ścianie i pojawia się z powrotem z lewej strony. Jeśli patrzymy na tylną ściankę, to promień światła przechodzi przez nią i wraca z przeciwległego punktu ścianki przedniej. Wobec tego widzimy swoją kopię *en face*. Podobnie: patrząc w prawo, widzimy swój lewy wizerunek, a gdy popatrzymy w dół, zobaczymy, że stoimy na własnej głowie. Ponieważ przedłużenie promieni świetlnych wyznaczających obrazy przedmiotów przecinają pokój we wszystkich kierunkach, zobaczymy nieskończoną liczbę swoich kopii oraz kopii pokoju. Efekt optyczny będzie podobny do tego, który moglibyśmy zaobserwować, gdyby wszystkie ściany tworzące pokój wyłożyć lustrami. Różnica byłaby jedynie w tym, że obrazy nie byłyby przekręcone i dokładnie odtwarzałyby oryginał. Pokój wygląda jak rozciągająca się w nieskończoność prostopadłościenna komórka. Pozornie mamy wrażenie, że żyjemy w nieskończonym świecie. Faktycznie trójwymiarowy torus jest skończony, ponieważ wszystkie widzialne obrazy, które tworzą nieskończoną przestrzenną sieć, są obrazami tego samego obiektu.

Inne możliwe struktury przestrzenne dla Wszechświata można otrzymać, jeśli zamiast sześcianu użyjemy innych wielościanów i dokonamy abstrakcyjnego klejenia ich ścian. Interesują nas takie formy przestrzenne, które są lokalnie jednorodne, ponieważ nasza przestrzeń w dużej skali jest jednorodna i izotropowa.

Dwie takie różnorodności można skonstruować z dwunastościanu prawidłowego, którego ściany są pięciokątami foremnymi. Wszystkie ściany da się podzielić na sześć parami równoległych ścian. Pierwszą trójwymiarową dwunastościaną różnorodność – różnorodność Poincarégo – otrzymamy, jeśli jeden z pięciokątów każdej pary obrócimy najpierw o 36° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół osi prostopadłej do płaszczyzny, w której leży, i następnie skleimy pary ścian. Drugą różnorodność – różnorodność Webera-Seiferta – uzyskamy sklejąc każdy pięciokąt z przeciwległym pięciokątem obróconym o 108° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zarówno torus, jak i obie różnorodności dwunastościenne są modelami nieograniczonej (bez brzegu) przestrzeni o skończonej objętości. Różnorodność

Webera-Seiferta można wyposażyć w lokalnie hiperboliczną geometrię, jeśli rozedmiemy ją tak, aby wszystkie dwadzieścia kątów wierzchołkowych dwunastościanu stało się na tyle małymi, żeby mogły się zejść w jednym wierzchołku. W podobny sposób procedura abstrakcyjnego klejenia ścian w przestrzeni Poincarégo wymaga zejścia się czterech wierzchołków dwunastościanu. Kąt wierzchołkowy standardowego dwunastościanu foremego jest za mały, aby mogło się tak stać, dlatego należy rozdać dwunastościan do odpowiednich rozmiarów, aby było to możliwe. W tym przypadku korzystamy z własności, że kąty wielokąta na przestrzeni sferycznej będą rosły z jej rozmiarami.

Po tych obszernych wyjaśnieniach powiemy, że kształtem przestrzeni nazywamy formę topologiczną przestrzeni będącą lokalnie jednorodną. W przestrzeni tej obowiązuje geometria wewnętrzna zdefiniowana przez wyniki pomiarów geometrycznych, które są dokonywane na niej samej bez odwoływania się do jakiegokolwiek zewnętrznej przestrzeni. Geometrię wewnętrzną przestrzeni odróżniamy od geometrii zewnętrznej przestrzeni, która opisuje również, w jaki sposób interesująca nas przestrzeń jest w nią włożona. Na przykład geometria wewnętrzna walca czy stożka otrzymanego przez odpowiednie wygięcie kartki papieru jest taka sama jak na kartce papieru, ale zewnętrzne geometrie są inne. Stąd wniosek, że jeśli powierzchnia w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa wygląda na nierównomiernie zakrzywioną, to nie dowodzi jeszcze, że własność ta jest jej własnością wewnętrzną. Geometria powierzchni torusa, w którym wycięto dziurę, zmienia się od punktu do punktu, jakkolwiek geometria wewnętrzna kwadratu, z którego utożsamiając boki można go zrobić, jest prostsza i w otoczeniu dowolnego punktu jest geometrią płaszczyzny, tzn. jest lokalnie nieodróżnialna albo lokalnie jednorodna. Pojęcie lokalnej jednorodności było również fundamentalne dla klasyfikacji trójrozmiarowości. Wcześniej udowodniono dla powierzchni, że dowolna powierzchnia może być zrealizowana w taki sposób, że jej geometria jest lokalnie jednorodna. Co więcej, na każdej powierzchni może istnieć tylko jeden typ lokalnie jednorodnej geometrii. I tak dla powierzchni mamy trzy znane typy lokalnie jednorodnych geometrii wewnętrznych: geometrię płaszczyzny, geometrię sfery i geometrię hiperboliczną. Zajmijmy się tą ostatnią.

Oczywiście już w przypadku powierzchni hiperbolicznej nie jest możliwe opisywanie jej jedną formułą analityczną, ale można w przybliżeniu modelować duże jej kawałki. Jest to geometria o stałej ujemnej krzywiznie. Papierowy model takiej powierzchni uzyskamy sklejąc kilka trójkątów równobocznych tak, aby w wierzchołku schodziło się ich siedem (Rys. 1). Okrąg

wycięty na takiej powierzchni i rozprostowany na płaszczyźnie częściowo będzie zachodził na siebie, tzn. jego długość będzie większa od długości okręgu o tym samym promieniu na płaszczyźnie Euklidesa. Suma kątów wewnętrznych trójkąta na takiej powierzchni będzie mniejsza od 180° . Im większa będzie płaszczyzna trójkąta, tym mniejsza będzie suma jego kątów wewnętrznych. Powierzchnia hiperboliczna ma stałą ujemną krzywiznę Gaussa, tzn. w otoczeniu dowolnego punktu tak samo różni się od płaszczyzny stycznej w tym punkcie.

Najlepszym przykładem powierzchni, dającej jednocześnie intuicyjny model kształtu powierzchni hiperbolicznej jest sfera, w której wycięto, powiedzmy, p -dziur i następnie zaklejono je rączkami, tj. powierzchniami topologicznie równoważnymi torusowi, w którym wycięto dziurę. Powierzchnię taką nazywamy hantlą. Dla dowolnej powierzchni rozbitej na wielokątne klatki o dowolnej formie ich liczba minus liczba krawędzi plus liczba wierzchołków jest stała i zależy tylko od samej powierzchni, natomiast nie zależy od sposobu rozbicia na wielokąty. Liczbę tę nazywa się charakterystyką Eulera. Jeśli w sferze wycięć p dziur, to jej charakterystyka Eulera κ będzie równa $2 - 2p$. Już w XIX wieku wiadano, że dowolna orientowalna powierzchnia jest topologicznie równoważna powierzchni sfery z p -dziurami pozatykanymi rączkami. Liczbę p nazywamy jej genusem (p : $\kappa(\mathcal{M}^2) = 2 - 2p$).

Powierzchnię hantli z dwoma lub więcej dziurami można podzielić na sześciokąty schodzące się po cztery w każdym wierzchołku. Jeśli skonstruujemy taką rozmaitość z hiperbolicznymi sześciokątami z odpowiednimi kątami wewnętrznymi, to można na niej zadać geometrię hiperboliczną.

W przypadku rozmaitości trójwymiarowych mamy nie trzy typy lokalnie jednorodnych geometrii, ale jeszcze pięć dodatkowych. Wynika to z tego, że w tym przypadku rolę krzywizny Gaussa odgrywa tzw. krzywizna sekcyjna. Krzywizna ta dla każdego dwuwymiarowego przekroju może przyjmować różne wartości i rzecz się trochę komplikuje.

Inną okolicznością odróżniającą trójwymiarowe rozmaitości od dwuwymiarowych powierzchni jest fakt, że rozmaitości te można tak zdeformować, iż nie potrafimy na nich zadać lokalnie jednorodnej hiperbolicznej geometrii. W. P. Thurston wysunął hipotezę, zgodnie z którą każda rozmaitość może być rozbita na proste fragmenty posiadające (dopuszczające) geometrię lokalnie jednorodną – jedną z ośmiu typów. Hipoteza ta była udowodniona dla szerokiej klasy rozmaitości i potwierdzona numerycznie. Jak do tej pory nikt nie znalazł kontrprzykładu. Co więcej, dla większości geometrii złożoność geometryczna nie odgrywa szczególnej roli w tym sensie, że na większości rozmaitości można zadać geometrię lokalnie hiperboliczną. Mostow i Nei-

mark udowodnili, że jeśli na trójwymiarowej rozmaitości taka hiperboliczna metryka może być zadana, to jej geometria w pełni określa się przez topologię. Z tego twierdzenia wynika, że wszystkie rozmaitości mające lokalnie jednorodną geometrię można sklasyfikować. Oprócz tego twierdzenie to daje proste kryterium klasyfikacji trójrozmaitości, a mianowicie można znaleźć jej objętość, a twierdzenie zagwarantuje nam, że będzie ona zależeć jedynie od topologicznego typu rozmaitości. Jest to zadziwiające, ale objętość staje się etykietką, pozwalającą na jej identyfikację.

Pozostaje nam zweryfikowanie, jaki jest kształt rzeczywistego Wszechświata. Jeśli przyroda wybiera typowe sytuacje, to winno nam być dane życie w przestrzeni hiperbolicznej. Obserwacje astronomiczne również wyraźnie wyróżniają ten przypadek. Otwartym jednak pozostaje pytanie, czy nasza przestrzeń jest skończona, czy nieskończona. Istnieje możliwość, że Wszechświat jest skończony, chociaż sprawia wrażenie nieskończonego, ponieważ światło ma czas obiegu go wielokrotnie, co powoduje istnienie wielokrotnych replik danego obiektu. Powszechnie się sądzi, że odpowiedź na to pytanie dadzą najbliższe misje satelitarne. Wkrótce NASA zrealizuje projekt o nazwie MAP, a w ramach europejskiego programu planowane jest wystrzelenie w 2007 r. satelity *Planck*.

W tym miejscu możemy nawiązać do znanego pytania, postawionego swego czasu przez M. Kaca: „Czy można usłyszeć kształt bębna?” Jest ono parafrazą intencji badań z dziedziny analizy spektralnej, pięknego działu fizyki matematycznej, w którym ze znajomości spektrum pewnych operatorów, powiedzmy operatora Laplace’a, uzyskujemy informację o geometrycznej i topologicznej strukturze przestrzeni, na której jest on określony [2]. Na początek wyjaśnijmy rzecz, odwołując się do przykładu z dziedziny świata ożywionego. W świecie tym, poczynając od zebry do lamparta, obserwujemy różnorodność struktur i ich ubarwienia na powierzchni ciała zwierząt. W przeszłości biolog matematyczny A. M. Turing [7] dał częściową odpowiedź na pytanie, jak lampart otrzymał swoje cętki. Dzięki fluktuacjom enzymów dyfundujących przez rozwijający się embrion powstają struktury przestrzennych plam. Zarówno rozmiar jak i geometria zwierząt pozostają w ścisłych związkach ze zróżnicowanymi strukturami. Na przykład szeroki cylindryczny kształt tułowia lamparta preferuje cętki, podczas gdy zwężający się ogon sprzyja pręgom [4]. Niezwykle interesujące jest, że takie struktury wynikają już z własności prostych rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, zadanych na geometriach i topologiach właściwych dla zwierzęcych członków. Gdybyśmy się przyjrzeni dwuwymiarowemu równaniu Helmholtza: $\nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0$ z warunkiem brze-

gowym $(\vec{n} \cdot \nabla)\Phi = 0$, to posiada ono rozwiązania, które opisują różne geometryczne tesselacje (mozaiki) z $\Phi > 0$ i $\Phi < 0$ [1]. Na przykład nieskończona linia jednowymiarowych pasków jest opisana przez rozwiązanie $\Phi = \cos kx$, $k = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, podczas gdy rozwiązania $\Phi = \frac{1}{2}(\cos kx + \cos ky)$ z $k = \pi$ lub $k = 2\pi$ opisują mozaikę typu szachownicy ze zalternowanymi kwadratowymi paskami, w których $\Phi > 0$ i $\Phi < 0$, nachylnymi pod kątem 45° .

W podobny sposób jak fluktuacje enzymów mogą prowadzić do ucętkowania powierzchni zwierząt, tak fluktuacje anizotropii promieniowania relikтового generują plamy na sferze niebieskiej. Gorące i zimne plamy są rozłożone na niebie w sposób losowy, lecz jeśli Wszechświat ma zwartą topologię, pojawiają się w rozkładzie temperatury różnorodne struktury. I odwrotnie struktura plam promieniowania relikтового jest podpisem topologii naszego Wszechświata.

Możemy teraz postawić w precyzyjniejszy sposób pytanie zawarte w tytule: Czy topologiczna struktura Wszechświata (jego kształt) może zostać odczytana z fluktuacji promieniowania relikтового?

W dalszej części pracy pokażemy, że odpowiedź na to pytanie jest możliwa dzięki postępowi w naszym rozumieniu matematyki trójwymiarowej rozmaitości oraz postępowi w dziedzinie kosmologii obserwacyjnej, a w szczególności technik obserwacji anizotropii promieniowania relikowego, nowym misjom satelitarnym oraz nowej klasy detektorom.

Zanim przystąpimy do omówienia, jak stało się możliwe testowanie topologii Wszechświata, przypomnijmy pokrótce historię tego zagadnienia i przyjrzyjmy się jego kontekstowi bardziej szczegółowo.

II. PRZESZŁOŚĆ PROBLEMATYKI KSZTAŁTU WSZECHŚWIATA – TŁO HISTORYCZNE

Chyba jednym z najstarszych pytań dotyczących bezpośrednio kształtu Wszechświata było pytanie o jego skończoność lub nieskończoność. Jest ono z kategorii tych pytań filozoficznych, które dojrzewały do naszych czasów, aby – po pierwsze – zostać w sposób poprawny sformułowane, a po drugie, aby pojawił się sposób jego rozstrzygnięcia. Tym bardziej interesujące wydaje się prześledzenie kontekstu historycznego w ewolucji tego zagadnienia.

Przekonanie, że ogólna teoria względności daje podstawy do stwierdzenia, że Wszechświat jest skończony bądź nieskończony, jest pełnym nieporozumieniem. Wynika to przede wszystkim z faktu, że teoria ta jest lo-

kalna, tzn. pozwala ona określić geometrię i krzywiznę niewielkiego fragmentu przestrzeni na podstawie zawartej w nim materii i energii. Zgodnie z tą teorią obecność materii może zakrzywiać przestrzeń na trzy różne sposoby, w zależności od wartości, tzw. parametru Ω , określającego średnią gęstość Wszechświata. Warunek $\Omega = 1$ wyróżnia krytyczną wartość tego parametru, odpowiadającą sytuacji, kiedy tempo ekspansji jest równe prędkości równoważającej grawitacyjny wpływ reszty Wszechświata na galaktykę. Jeśli $\Omega < 1$, to Wszechświat ma geometrię hiperboliczną i jest otwarty. Jeśli $\Omega = 1$, przestrzeń jest płaska i jej modelem jest \mathfrak{S}^3 . Jeśli wreszcie $\Omega > 1$, materia zmusza przestrzeń do zamknięcia się w sobie i przyjęcia formy geometrii sferycznej.

Zauważmy jednak, że wymienione trzy możliwe geometrie Wszechświata są zgodne z wieloma różnymi topologiami. Na przykład ogólna teoria względności w ten sam sposób opisuje torus i płaszczyznę, chociaż torus jest skończony, a płaszczyzna euklidesowa nieskończona. Ani teoria względności, ani standardowe obserwacje kosmologiczne nie wyjaśniają, w jaki sposób lokalne elementy objętości dopasowują się do siebie, nadając przestrzeni globalny kształt.

Aby to lepiej zrozumieć, odwołajmy się do przypadku dwuwymiarowego. Oprócz płaszczyzny euklidesowej, na której oczywiście słuszne pozostaje twierdzenie Pitagorasa, dające formułę na nieskończoną odległość dwóch punktów $ds^2 = dx^2 + dy^2$, istnieją jeszcze cztery formy przestrzenne tej geometrii, na których powyższa formuła jest prawdziwa. Ich topologiczne reprezentacje to standardowy walec, jednostronny walec, standardowy torus i jednostronny torus. Rozważmy je w wymienionym porządku. Podzielmy płaszczyznę zbiorem prostych równoległych $\{a\}$ na jednakowej szerokości paski (Rys. 2a). Zadajemy również na płaszczyźnie określony kierunek, powiedzmy prostopadły do prostych $\{a\}$. Wybierzmy w dowolnym pasku jakiś punkt M i przesunijmy pasek z wybranym punktem w wybranym kierunku do dowolnego innego paska. Wtedy w nowym położeniu punkt oznaczamy tą samą literą M . Zbiór wszystkich punktów uzyskanych z punktu M w powyższy sposób oznaczamy $\{M\}$ i będziemy go traktować jako element (punkt) pewnej nowej przestrzeni R . Oczywiście przestrzeń R jest przestrzenią metryczną z metryką $\rho(x,y)$, zdefiniowaną jako minimum euklidesowskich odległości pomiędzy punktami zbioru $\{M\}$ i punktami zbioru $\{N\}$. Jest to przestrzeń zupełna, ponieważ zupełna jest przestrzeń Euklidesa. Przestrzeń R jest wariantem topologicznym płaszczyzny Euklidesa. Możemy ją w prosty sposób zrealizować przez nawinięcie płaszczyzny na powierzchnię boczną walca. Wtedy, oczywiście, wszystkie punkty $\{M\}$ koincydują z jednym punktem

walca. Zauważmy jednak, że do tego samego wyniku doszlibyśmy, jeśli umówilibyśmy się, że utożsamiamy wszystkie punkty każdego zbioru $\{M\}$, w szczególności punkty leżące po przeciwnych stronach na różnych brzegach paska (Rys. 2b). Oczywiście płaszczyzna i walec są obiektami topologicznie nierównoważnymi.

Powróćmy do płaszczyzny podzielonej układem prostych równoległych. Dodatkowo wprowadzamy jeszcze jedną prostą b równoległą do $\{a\}$ (Rys. 3a). Wybierzmy w pasku dowolny punkt M . Dalej przesunmy pasek wzdłuż prostej b w taki sposób, aby nałożył się on na każdy kolejny pasek. Punkt M zajmie wtedy pewne nowe położenie, które zwierciadlanie odbijemy względem prostej b i oznaczmy tą samą literą M . Powtarzając ten proces, uzyskujemy nieskończony ciąg punktów $\{M\}$, który z kolei umawiamy się traktować jako element nowej przestrzeni metrycznej R . W ten sposób uzyskujemy nową formę przestrzenną przestrzeni płaskiej. Zauważmy, że tę samą formę przestrzenną uzyskamy, jeśli ograniczymy się do jednego paska i będziemy utożsamiać punkty należące do zbioru $\{M\}$ (Rys. 3b). Otrzymana w ten sposób przestrzeń nazywa się jednostronnym walcem topologicznie równoważnym wstędze Möbiusa.

Rozważmy teraz dwa układy prostych równoległych $\{a\}$ i $\{b\}$, które rozkładają płaszczyznę na jednakowe prostokąty (Rys. 4a). Przemieszczając wybrany prostokąt wzdłuż prostych $\{a\}$ lub $\{b\}$, możemy nim pokryć dowolny inny prostokąt, a wybrany punkt M zajmie nieskończenie wiele nowych położenia, które będziemy oznaczać tą samą literą M . Tak otrzymany nieskończony zbiór punktów będziemy oznaczać $\{M\}$ i traktować jako element nowej przestrzeni R . Jeśli $x = \{M\}$ i $y = \{N\}$ są dwoma dowolnymi punktami w R , to odległość $\rho(x, y)$ definiujemy jako minimum euklidesowskich odległości między punktami zbioru $\{M\}$ i punktami zbioru $\{N\}$. Otrzymana w ten sposób przestrzeń metryczna jest inną przestrzenną formą geometrii płaskiej. Wyobrażenie takiej formy przestrzennej uzyskamy, utożsamiając punkty prostokąta, leżące na przeciwległych krawędziach wzdłuż zaznaczonego kierunku (Rys. 4b). W ten sposób przez odpowiednie utożsamienie punktów uzyskamy torus.

Powróćmy do płaszczyzny podzielonej przez $\{a\}$ i $\{b\}$. Dodatkowo przeprowadźmy w każdym pasku przerywaną linię jednakowo odległą od skrajnych linii $\{b\}$ (Rys. 5a). Niech M będzie dowolnym punktem prostokąta. Przesuwając wybrany prostokąt wzdłuż linii środkowej do sąsiedniego prostokąta, punkt M zajmie nowe położenie, które zwierciadlanie odbijemy względem linii środkowej. Proces ten będziemy kontynuować do nieskończoności. Wszystkie nowo otrzymane punkty traktujemy jako element nowej

przestrzeni R . Uzyskujemy w ten sposób nowy wariant topologiczny przestrzeni płaskiej zwany jednostronnym torusem. Model takiej przestrzeni możemy uzyskać z rurki, utożsamiając jej brzegi w kierunkach zgodnych, a następnie przepuszczając jeden koniec rurki przez jej ściankę i łącząc z drugim końcem (Rys. 5b).

W ten sposób mamy pięć klas form przestrzennych geometrii płaskiej. Wszystkie one są topologicznie różne (nierównoważne) i jednocześnie zgodne z metryką euklidesową $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (Tabela 1).

Tabela 1. Przestrzenne formy geometrii płaskiej.

przestrzeń otwarta (nieskończona)	przestrzeń zamknięta (skończona)
płaszczyzna	torus
walec kołowy	jednostronny torus
jednostronny walec	

Po tym komentarzu matematycznym powróćmy do zasadniczego wątku tego rozdziału, a mianowicie omówienia kontekstu historycznego problemu kosmicznej topologii.

Świadomość wagi topologii dla konstrukcji modelu przestrzeni fizycznej dojrzała powoli. Pierwszym historycznie modelem była przestrzeń statyczna \mathfrak{S}^3 , sugerowana przez teorię Newtona, ale szybko zauważono, że przyjęcie jej za model naszej przestrzeni fizycznej prowadzi do paradoksów w rodzaju paradoksu fotometrycznego Olbersa. Światło dochodzące od gwiazd do obserwatora na Ziemi pochodzi z nieskończonego obszaru, ale jasność galaktyk maleje z odległością jak r^{-2} i wkład do jasności nieba od coraz dalej położonych galaktyk jest stały, gdyż liczba galaktyk w odległości r od Ziemi rośnie jak r^2 . Oznacza to, że nocne niebo powinno świecić z nieskończoną jasnością. Idea świata skończonego, ale nieograniczonego żadnym brzegiem, wydawała się bardziej atrakcyjna dla A. Einsteina, który w 1917 r. pokazał istnienie statycznego rozwiązania, w którym przestrzeń była skończona ale nieograniczona – posiadała topologię sfery S^3 . Co więcej, w takiej przestrzeni została zrealizowana zasada Macha (nieskończony Wszechświat wywołałby nieskończoną bezwładność indukowaną przez resztę Wszechświata). Od tej pory na długie lata zapanuje w kosmologii geometria sferyczna, która zgodnie z zasadą ekonomii jest wyróżniona jako sferyczna. Jak pokazał Riemann, geometria ta może być zrealizowana na powierzchni czterowymiarowej kuli, tak jak dwuwymiarowa sfera jest powierzchnią trójwymiarowej kuli, bez odwoływania się do jakiegoś zewnątrz, w której

zanurzony jest obiekt (hipersfera). Dodajmy, że pod koniec XIX wieku matematycy znali wiele przykładów skończonych przestrzeni pozbawionych brzegów. Na fakt ten zwracał uwagę astronom K. Schwarzschild [5], który w posłowniu do artykułu w 1900 r. pisał:

Wyobraźcie sobie, że w wyniku niezwykle głębokich badań astronomicznych okazuje się, że w ogromnych skalach cały Wszechświat wypełniony jest niezliczonymi nieskończonymi kopiami naszej Drogi Mlecznej, że nieskończona przestrzeń może być podzielona na sześciany, z których każdy zawiera kopię naszej Drogi Mlecznej. Czy naprawdę upieralibyśmy się wtedy przy założeniu o nieskończenie wielu identycznych kopiach tego samego świata? Czuliibyśmy się o wiele lepiej, przyjmując, że te kopie są pozorne, że w rzeczywistości Wszechświat ma szczególne własności spójności, tak że opuszczając jeden z sześciątów przez ścianę, natychmiast wnikamy weń przez inną ścianę.

[3, s. 119-120]

W tym przykładzie Schwarzschild ilustruje, jak z przestrzeni Euklidesa skonstruować torus, zachowując przy tym wszystkie reguły geometrii Euklidesa. Pozornie przestrzeń wygląda na nieskończoną dla tych, którzy ją zamieszkują, nie istnieją bowiem żadne ograniczenia na rozmiary dokonywanych obserwacji. Dopóty dopóki nie potrafimy odkryć replik tych samych obiektów, nie potrafimy stwierdzić, że żyjemy na torusie.

Einstein, preferując model sferycznej geometrii, był przekonany, że przyroda realizuje sytuacje najprostsze; możliwość geometrii wielospójnej, jak to ma miejsce w przypadku torusa, wydawała mu się nieestetyczna. W archiwach Einsteina, znajdujących się w Princeton, można znaleźć dwie kartki pocztowe z uwagami Einsteina na ten temat. W pierwszej z nich z czerwca 1918 r., odpowiadając na uwagę H. Weyla co do swobody wyboru topologii, Einstein napisał: „Niemniej jednak mam niejasne uczucie, które sprawia, że wolę model sferyczny. Mam przeczucie, że rozmaitości, na których dowolna krzywa zamknięta, może być w sposób ciągły ściągnięta do punktu, są najprostsze” [3, s. 121].

Podobną argumentację Einstein powtórzył w kwietniu 1919 r., w liście do F. Kleina, w którym pokazał, że model geometrii sferycznej jest zgodny z tzw. przestrzenią eliptyczną, powstałą z utożsamienia na sferze punktów antypodalnych, pisząc: „przyczyną, dla której przypadek sferyczny, a nie eliptyczny powinien być preferowany, jest to, że krzywa zamknięta może być w sposób ciągły ściągnięta do punktu w przestrzeni sferycznej, a nie eliptycznej, innymi słowy tylko przestrzeń sferyczna jest jednospójna [...]” [3, s. 121].

Z wypowiedzi tych jasno wynika, że Einstein preferował przestrzenie sferyczne, które na pierwszy rzut oka wydają się być jednospójne. Einstein mylił się co do liczby wariantów topologicznych przestrzeni sferycznej. Tylko

w przypadku dwuwymiarowym istnieją dwa warianty topologiczne, w przypadku trójwymiarowym jest ich nieskończenie wiele. Jednakże odpowiednie wyniki w latach dwudziestych nie były jeszcze nikomu znane.

Zwróćmy uwagę na to, że w jednorodnym płaskim Wszechświecie istnieje tylko jedna droga, po której światło biegnie od źródła do obserwatora. Taki Wszechświat jest rzeczywiście nieskończony. Należy jednak poważnie traktować przypadek, gdy jest on wielospójny i wtedy, podobnie jak to ma miejsce na torusie, będzie istniało wiele różnych dróg, po których światło biegnie od źródła do obserwatora. Widząc wielokrotne obrazy tego samego obiektu, obserwator mógłby mylnie sądzić, że żyje w nieskończonej przestrzeni.

Dla Einsteina geometria przestrzeni jednorodnej, na której dowolna zamknięta pętla może być ściągnięta do punktu, jest przypadkiem prostszym niż przypadek przestrzeni wielospójnej (np. torus taki jak na Rys. 6). Ponieważ przyroda realizuje przypadki najprostsze, Einstein faworyzował geometrie jednodobre o trywialnym kształcie. Jego filozofia prostoty odegrała ważną rolę w odkryciach fizyki, ale czy słusznie zdyskredytowała znaczenie nietrywialnej topologii? Na to pytanie odpowiedzą obserwacje, dzięki którym otrzymamy ograniczenia na możliwe kształty przestrzeni. Już dziś wiemy, że przestrzeń, w której żyjemy, nie może być torusem. Wynika to z tego, że obserwator na torusie byłby w stanie zaobserwować światło, docierające doń na nieskończenie wiele sposobów. Wtedy obserwator w odległej galaktyce byłby w stanie zaobserwować na Ziemi zarówno młodego, jak i starego Einsteina, ponieważ w takim świecie powinny istnieć repliki tych samych obiektów na różnych etapach ewolucji.

Przypomnijmy, że argument prostoty był wcześniej użyty przez Einsteina przeciw A. Friedmannowi, który uzyskał niestandardne rozwiązania kosmologiczne bez członu kosmologicznego (1922, 1924), i to zarówno dla przypadku sferycznego jak i przypadku hiperbolicznego. Friedmann w swojej przepięknej popularnej książce z kosmologii z 1923 r. wyjaśnia, dlaczego teoria Einsteina dopuszcza swobodę wyboru topologii. Odwołuje się do przykładu walca kołowego, będącego lokalnie przestrzenią euklidesową, który nie posiada topologii płaszczyzny. Swoje uwagi na ten temat kontynuuje w artykule poświęconym analizie hiperbolicznych rozwiązań równań Einsteina bez członu kosmologicznego. W pracy tej pisze: „[...] bez dodatkowych założeń kosmologicznych równania Einsteina nie dają odpowiedzi na pytanie czy Wszechświat jest skończony czy nieskończony”. Dalej pokazuje, w jaki sposób przestrzeń hiperboliczna może być skończona i wielospójna, poprzez odpowiednie identyfikacje punktów. Przewiduje istnienie w takich przestrze-

liniach „duchów” obiektów astronomicznych, ponieważ rzeczywisty obiekt i jego duch w przestrzeni wielospójnej są tym samym.

Widzimy, że Friedmann, ponieważ był matematykiem, dopuszczał możliwość nietrywialnej (wielospójnej) topologii dla przestrzeni fizycznej. Einstein przeciwnie – od samego początku wyeliminował taką możliwość jako nieestetyczną. Która postawa była słuszna? Na pewno odkrycia Friedmanna zachwiały filozofią Einsteina, ale to, czy mylił się co do topologii, najprawdopodobniej rozstrzygną obserwacje promieniowania relikowego. Poczekajmy cierpliwie.

Dzisiaj idea nietrywialnej topologii dla Wszechświata jest traktowana na serio, jakkolwiek jeszcze w wielu monografiach z kosmologii możemy przeczytać, że skończoność czy nieskończoność Wszechświata wynika ze znaku jej krzywizny przestrzennej. Podkreślmy raz jeszcze, że taka prosta relacja zachodzi jedynie w przypadku przestrzeni jednorodnej, będącej rozwiązaniem równań Einsteina bez członu kosmologicznego. Skończoność czy nieskończoność Wszechświata nie jest zdeterminowana przez krzywiznę przestrzeni czy parametr gęstości Ω , ale pozostaje w ścisłym związku z topologiczną strukturą przestrzeni. Rozwiązania hiperboliczne Friedmanna odnoszą się tak do przypadku przestrzeni skończonych, jak i nieskończonych.

O ile idea nietrywialnej topologii była ignorowana przez teorię big bang, to od 1995 r. obserwuje się wzmożone zainteresowanie tą tematyką. Liczba prac naukowych rośnie lawinowo i sądzi się, że tylko obserwacje astronomiczne mogą rozstrzygnąć, czy rację miał Einstein, czy też Friedmann. Czy przestrzenie wielospójne są fikcją matematyczną, czy realnością fizyczną?

Obserwacje astronomiczne wydają się ostatnio wskazywać na przestrzenie hiperboliczne ($z\Omega < 0$). Z drugiej strony fizycy, podobnie jak Friedmann, sądzą, że fizyczne wydają się być tylko te przestrzenie hiperboliczne, które posiadają skończoną objętość. Dodatkowo ten argument jest wzmacniany przez argument teoretyczny, że gdyby Wszechświat posiadał nieskończoną objętość, to nie mógłby powstać z fluktuacji kwantowych, ponieważ prawdopodobieństwo takiej kreacji jest proporcjonalne do $\exp[-k (\text{Vol}M^3)^{2/3}]$, gdzie k jest dodatnią stałą. Zwartość przestrzeni jest cechą, która gwarantuje, że przestrzeń będzie miała skończoną objętość. Klasyfikacja takich przestrzeni może być dokonana poprzez ich objętość. W Tabeli 2, zaczerpniętej z programu *SnapPea* J. Weeksa, przestrzenią o najmniejszej objętości jest przestrzeń WMF (Weeks, Matrée, Fomenko). W tabeli podano również maksymalny i minimalny promień okręgu zawartego w danej przestrzeni oraz minimalną długość zamkniętej geodezyjnej.

Jeśli połączymy te dwa fakty, tj. hiperboliczność przestrzeni oraz jej skończoną objętość, to wynika z tego, że przestrzeń jest wielospójna. Taki sposób myślenia o przestrzeni jest treścią nowego paradygmatu, na którym dzisiaj powoli budowana jest kosmologia.

Tabela 2. Parametry przestrzeni hiperbolicznych o najmniejszych objętościach z programu *SnapPea* Weeksa. Przyjęto oznaczenia: r_+ i r_- są promieniami najmniejszej i największej sfery wpisanej w przestrzeni nakrywającej w jej wielościan fundamentalny, $l_{\min} \equiv 2r_{\text{inj}}$ jest długością najkrótszej geodezyjnej.

Nazwa	Objętość	r_-	r_+	l_{\min}
WMF	0,9427	0,5192	0,7525	0,5846
Thurson	0,9814	0,5354	0,7485	0,5780
s556(-1,1)	1,0156	0,5276	0,7518	0,8317
m006(-1,2)	1,2637	0,5502	0,8373	0,5750
m188(-1,1)	1,2845	0,5335	0,9002	0,4804
v2030(1,1)	1,3956	0,5483	1,0361	0,3662
m015(4,1)	1,4124	0,5584	0,8941	0,7942
s718(1,1)	2,2726	0,6837	0,9692	0,3392
m120(-6,1)	3,1411	0,7269	1,2252	0,3140
s654(-3,1)	4,0855	0,7834	1,1918	0,3118
v2833(2,3)	5,0629	0,7967	1,3322	0,4860
v3509 4,3	6,2392	0,9050	1,3013	0,3458

III. KOSMICZNE ZOO

Podstawowym problemem teoretycznym, który musimy rozwiązać, zanim odpowiemy na pytanie, jaka jest topologiczna struktura naszego Wszechświata, jest pytanie o zbiór możliwych matematycznie wariantów topologicznych. Zanim to uczynimy, musimy zawęzić klasę dopuszczalnych metryk dla przestrzeni fizycznej. Załóżmy, że przestrzeń ta jest jednorodna i izotropowa. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że trójwymiarowe przestrzenie są przestrzeniami o stałej krzywiznie. Problem klasyfikacji topologicznej zupełnych przestrzeni Riemanna o stałej krzywiznie został w pełni rozwiązany dla geometrii sferycznej przez Wolfa w 1960 r. oraz wcześniej, w 1934 r., dla przestrzeni płaskich przez Nowackiego, który zastosował wcześniejsze wyniki Bieberbacha (1911) dotyczące pełnej klasyfikacji grup krystalograficznych. W przypadku płaskim ($k = 0$) metryka czaso-

przestrzeni ma postać $ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, gdzie $R(t)$ jest czynnikiem skali i w najprostszym przypadku otrzymamy powierzchnię stałego czasu $\{t = \text{const}\}$ w postaci torusa T^3 , jeśli dokonamy w \mathfrak{S}^3 identyfikacji punktów zgodnie z regułą $(x, y, z) \rightarrow (x + la_x, y + ma_y, z + na_z)$, gdzie l, m, n są liczbami całkowitymi i a_x, a_y, a_z są pewnymi stałymi, będącymi długościami krawędzi prostopadłościanu, w którym dokonano utożsamienia przeciwległych ścian. Otrzymany torus T^3 jest jednym z osiemnastu topologicznie różnych typów przestrzeni euklidesowej, zgodnie z osiemnastoma grupami symetrii krystalograficznych, podanych jeszcze w 1885 r. przez Fedorowa. Różne nierównoważne typy topologiczne odpowiadają różnym przepisom identyfikacji punktów przestrzeni. Pośród nich istnieje tylko pięć typów, które są orientowalne i zwarte. Są one konstruowane przez identyfikację ścian prostopadłościanu z jego ścianami po wykonaniu obrotu. Dwa z tych typów są otrzymywane z graniastosłupa prawidłowego o podstawie sześciokątnej poprzez identyfikację jego ścian ze ścianami po obrocie graniastosłupa o $2\pi/3$ albo $\pi/3$ względem jego głównej osi symetrii. W przypadku przestrzeni sferycznej liczba możliwych typów topologicznych jest nieskończona, ale przypadek ten wydaje się mniej interesujący z punktu widzenia opisu obserwowalnego Wszechświata.

Z kosmologicznego punktu widzenia najbardziej interesujące są przestrzenie o ujemnej krzywiznie, które posiadają skończoną objętość, tj. są wielospójne. Problem klasyfikacji topologicznej tych przestrzeni jest zagadnieniem dalece bardziej złożonym. Intensywne badania w tej dziedzinie są prowadzone począwszy od lat siedemdziesiątych, a największe osiągnięcia są dziełem W. P. Thurstona (1979). To właśnie postęp w dziedzinie matematycznych badań przestrzeni hiperbolicznych spowodował przełom w problemie kosmicznej topologii, dając matematyczne podstawy do dyskusji, jaka jest topologia naszego rzeczywistego Wszechświata.

Problem wizualizacji przestrzeni hiperbolicznych już nawet w przypadku dwuwymiarowym nie jest rzeczą trywialną. Dla ilustracji dwuwymiarowej przestrzeni o ujemnej krzywiznie autorzy książek popularnonaukowych zwykli przywoływać wyobrażenie siodła, które posiada de facto ujemną krzywiznę jedynie w otoczeniu punktu siodłowego. Tylko tam bliskie geodezyjne będą się rozbiegały bardzo szybko, zgodnie z zależnością typu eksponencjalnego $\exp(\sqrt{-K}s)$, gdzie s jest parametrem naturalnym wzdłuż geodetyki, a K jest krzywizną Gaussa w punkcie siodłowym. Stąd dla wyobrażenia dwuwymiarowej powierzchni hiperbolicznej należy posłużyć się modelem powierzchni, która w otoczeniu każdego punktu posiada siodło. Niestety nasze postrzeganie obiektów geometrycznych jest związane z ich

percepcją w \mathfrak{S}^3 i dlatego nie potrafimy zobaczyć tej powierzchni, ponieważ jest ona niezanurzalna izometrycznie (z zachowaniem odległości punktów) w \mathfrak{S}^3 . Rzecz jednak w tym, że nie wyklucza to wcale jej wyobrażenia („istnieć” oznacza być postrzegalnym przez umysł”), tak samo zresztą jak trójwymiarowej geometrii hiperbolicznej jako powierzchni czterowymiarowej kuli.

Spróbujmy wyobrazić sobie, jak możliwe jest istnienie hiperbolicznej przestrzeni o skończonej objętości. Dla uproszczenia skoncentrujemy najpierw uwagę na przypadku dwuwymiarowym. Wytnijmy z powierzchni hiperbolicznej ośmiokąt foremny i utożsammy jego przeciwległe boki. Otrzymamy w ten sposób twór, topologicznie równoważny preclowi (będącemu sumą prostą dwóch hantli, z których każda jest topologicznie równoważna torusowi, w którym wycięto dziurę). W wyniku zabiegu sklejania przeciwległych ścian, jeśli promień świetlny opuści ośmiokąt, przechodząc przez jeden z jego boków, to wyłoni się z przeciwległego boku. Oczywiście, taka powierzchnia nie może istnieć w \mathfrak{S}^3 , a precel jest jedynie jej wersją odkształconą pomagającą pracować naszej wyobraźni. Do ściślejszego sformułowania tych problemów jeszcze powrócimy w następnym paragrafie. Na razie możemy wyobrazić sobie ośmiokątny ekran gry komputerowej *Asteroidy*, w której cokolwiek przekracza którąś z krawędzi, wyłania się ponownie z przeciwległej krawędzi. I tak obserwator, znajdujący się w środku ośmiokąta, zobaczy swój obraz z ośmiu różnych kierunków.

W odróżnieniu od płaskiej dwugeometrii, gdzie istnieje pięć topologicznie różnych typów, i geometrii sferycznej, gdzie mamy do czynienia z dwoma przypadkami sfery i sfery z utożsamionymi punktami antypodalnymi (przestrzeń eliptyczna), geometria hiperboliczna może być realizowana na nieskończonej liczbie różnych dwuwymiarowych rozmaitości zupełnych. Jedną z takich form przestrzennych jest płaszczyzna Łobaczewskiego. Pokażemy jak, startując z pewnej płaszczyzny hiperbolicznej, możemy skonstruować nieskończoną liczbę innych form hiperbolicznych. Ograniczymy się do tych, które są zwarte, tj. posiadają skończoną objętość.

Wyobraźmy sobie torus, w którym zrobiono otwór, tak że otrzymaliśmy tzw. rączkę albo hantlę. Wówczas na kwadracie, z którego zrobiony jest torus, otwór ten będzie reprezentowany linią zamkniętą c przechodzącą przez punkt A (Rys. 7). Jeśli rozerwiemy tę linię w punkcie A , to po dokonaniu deformacji figury na ostatnim rysunku uzyskamy pięciokąt pokazany na Rys. 8. I odwrotnie, sklejąc odpowiednie boki pięciokąta w odpowiednich zaznaczonych kierunkach i pozostawiając swobodną krawędź c na brzeg figury, otrzymamy hantlę z brzegiem c . Dalej, sklejąc brzegi dwóch rączek, otrzy-

mamy hantlę (Rys. 9). Stąd naturalnym jest od samego początku traktować ośmiokąt z utożsamionymi odpowiednio krawędziami jako model hantli.

Jeśli na sferze (lub powierzchni homeomorficznej ze sferą) będzie zbudowany graf dzielący sferę na części homeomorficzne z kołem, to $W - K + S = 2$, gdzie W , K , S są odpowiednio liczbą wierzchołków, krawędzi i ścian grafu. Liczba ta jest niezmiennikiem topologicznym sfery i nazywa się charakterystyką Eulera. Charakterystyka Eulera sfery, w której wycięto q otworów jest równa $2 - 2q$ (liczbę q nazywamy genusem powierzchni). Stąd torus jest powierzchnią o genusie 1 i jest równoważny topologicznie sferze, w której wycięto jeden otwór. Hantla, będąca sumą prostą rączek, będzie więc powierzchnią o genusie 2 i w ogólności dowolna powierzchnia o genusie p może być otrzymana przez utożsamienie przeciwległych krawędzi $4p$ -kąta foremnego. Na Rys. 10 pokazano w szczególności taką konstrukcję dla przypadku $p = 3$. Wszystkie dotychczasowe powierzchnie były otrzymywane z kawałków płaszczyzny. Rozważmy analogiczną konstrukcję z pewnego ośmiokąta, P_8 , na płaszczyźnie Łobaczewskiego, którego przeciwległe krawędzie zostały utożsamione parami oraz osiem wierzchołków złożyło się w jeden punkt. Zakładając, że wszystkie punkty nowo utworzonej przestrzeni (oznaczone tą samą literą M) są elementami pewnej przestrzeni R , której teraz elementy oznaczamy $\{M\}$. Niech odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami przestrzeni będzie dana przez funkcję $d(M, N)$. Wtedy w przestrzeni R wprowadzamy metrykę $\rho(x, y)$, definiowaną jako najmniejsza wartość dwóch liczb zbioru $\{d(M, N), \min[d(M, T_1) + d(N, T_2)]\}$, gdzie T_1 i T_2 są dowolnymi dwoma utożsamionymi punktami. Tym sposobem przestrzeń R staje się przestrzenią metryczną, równoważną hantli z dwoma dziurami. O przestrzeni R możemy myśleć jak o hantli, na której została zadana pewna sztuczna metryka za pomocą nakrycia hantli ośmiokątem P_8 , tj. za pomocą pewnego odwzorowania P_8 na hantlę. Metryka ta będzie zwykłą metryką Łobaczewskiego w każdym dostatecznie małym otoczeniu dowolnego punktu hantli, z wyjątkiem otoczenia tego punktu, w którym dokonano utożsamienia wszystkich jego wierzchołków. Punkt ten będzie punktem osobliwym zmetryzowanej hantli, jeśli suma kątów wewnętrznych ośmiokąta będzie się różnić od czterech kątów prostych. Aby metryka zadana na hantli była regularna, należy wybrać taki ośmiokąt, dla którego suma kątów wewnętrznych będzie 2π .

W ten sposób podstawowy problem polega na możliwości przeprowadzenia regularnej hiperbolicznej metryzacji hantli albo – inaczej – sprowadza się do problemu znalezienia w geometrii Łobaczewskiego takiego ośmiokąta prawidłowego, aby po utożsamieniu przeciwległych boków i spotkaniu się

wszystkich jego wierzchołków w jednym punkcie boki skleły się ze sobą, a suma kątów w punkcie zbiegania się wierzchołków wynosiła 360° . Na płaszczyźnie kąty ośmioboku mają po 135° i powyższa konstrukcja nie jest możliwa. Okazuje się jednak wykonalna na powierzchni hiperbolicznej, gdzie tak jak na powierzchni sfery kąty ośmiokąta zależą od jego rozmiarów. Kąty te na powierzchni kuli rosną ze wzrostem rozmiarów wielokąta (mierzonych np. w jednostkach promienia krzywizny) i maleją na powierzchni hiperbolicznej. Wykonalność przedstawionej powyżej konstrukcji metryzacji wymaga ośmiokąta o kątach 45° . Taka konstrukcja może mieć miejsce jedynie w przestrzeni hiperbolicznej i dlatego przestrzeń o topologii hantli otrzymanej przez utożsamienie przeciwległych krawędzi musi być hiperboliczna.

Zauważmy, że na płaszczyźnie Łobaczewskiego każdy czworokąt posiada sumę kątów wewnętrznych mniejszą od 2π , co oznacza, że w podobny sposób nie można skonstruować metryki hiperbolicznej na torusie. Dlatego torus (powierzchnia o genusie 1) nie jest jedną z topologicznych form geometrii hiperbolicznej.

Natomiast każda dwustronna powierzchnia o genusie $p \geq 2$ może być metryzowana za pomocą metryki hiperbolicznej. Wynika to z faktu, że na płaszczyźnie Łobaczewskiego istnieje odpowiedni $4p$ -kąt foremny o sumie kątów wewnętrznych równej 2π .

O ile różne formy topologiczne powierzchni hiperbolicznych mogą być otrzymane z $4p$ -kąta, o tyle najprostsze trójwymiarowe topologie mogą być otrzymane z wielościanów. Najbardziej zwarta (o minimalnej objętości) topologia hiperboliczna została odkryta przez J. Weeksa w 1985 r. poprzez utożsamienie ścian osiemnastościanu. Jej objętość w jednostkach promienia krzywizny wynosi około 0,94 radiana sześciennego. Inne topologie powstają z wielościanów o większej liczbie ścian.

Problem pełnej klasyfikacji topologicznej trójwymiarowych przestrzeni hiperbolicznych jest wciąż jeszcze daleki od pełnego rozwiązania. Co więcej, okazuje się, że przypadek dwuwymiarowy nie daje nam dobrych intuicji, do której możemy się odwołać w przypadku trójwymiarowym. Dowodzi tego faktu chociażby twierdzenie Mostowa, mówiące, że podczas gdy powierzchnia o genusie większym lub równym 2 dopuszcza nieskończenie wiele (nieprzeliczalnie) nierównoważnych struktur hiperbolicznych, to dla $n \geq 3$ spójne, orientowalne n -wymiarowe rozmaitości dopuszczają co najwyżej jedną strukturę hiperboliczną.

Fakt ten (topologia narzuca geometrię) implikuje, że inwarianty geometryczne o trzech i więcej wymiarach, takie jak objętość albo długość zamkniętej geodezyjnej, są także inwariantami topologicznymi, a promień

krzywizny staje się charakterystyczną skalą długości dla topologii. Jest to powodem, dla którego może być dokonana klasyfikacja topologiczna zwartych rozmaitości hiperbolicznych według ich rosnących objętości. Istnieje również analityczny dowód istnienia rozmaitości o najmniejszej objętości ($V_{\min} = 0,1668$).

IV. KOSMICZNA KRYSTALOGRAFIA

Topologiczne własności są „nieczułe” na transformacje ciągłe obustronnie (homeomorfizmy), stąd odległości punktów przestają być ważne z punktu widzenia własności topologicznych obiektów. Dany obiekt geometryczny możemy poddać deformacjom, polegającym na ściskaniu i rozciąganiu i pozostanie on tym samym obiektem topologicznym albo – inaczej – jego własności topologiczne są niezmiennicze względem homeomorfizmów. Wykluczamy deformacje polegające na sklejeniu punktów czy też ich rozrywaniu.

Częstym sposobem wizualizacji dwuwymiarowych powierzchni jest ich przedstawienie poprzez zanurzenie bez samoprzebieg w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa. Zwróćmy jednak uwagę, że takie zanurzenie niekoniecznie musi istnieć, jak ma to chociażby miejsce dla butelki Kleina czy płaskiego torusa otrzymanego z \mathbb{S}^2 . Trójwymiarowe rozmaitości wymagają w celu ich wizualizacji pojęcia obszaru fundamentalnego. Jak widzieliśmy, różne topologicznie powierzchnie mogą być reprezentowane przez wielokąty, których krawędzie zostały w odpowiedni sposób zidentyfikowane parami. I tak poprzez utożsamienie pary przeciwległych krawędzi kwadratu otrzymujemy walec (a w zasadzie pewną jego część). Dalej rozciągając walec i sklejąc jego dwa brzegi tworzące okrąg, otrzymujemy prosty (niepłaski) torus. Oznacza to, że torus jest topologicznie równoważny prostokątowi, w którym utożsamione zostały przeciwległe boki. Z topologicznego punktu widzenia w tym przypadku obszar fundamentalny mógł być wybrany na różne sposoby: jako kwadrat, prostokąt, równoległobok, a nawet sześciokąt, ponieważ płaszczyzna może być również pokryta przez sześciokąty, płaski torus może być także reprezentowany przez sześciokąt z odpowiednio utożsamionymi krawędziami.

Opisana powyżej metoda klejenia jest również efektywną metodą wizualizacji przestrzeni trójwymiarowych. Przez analogię do przypadku dwuwymiarowego hipertorus może być otrzymany przez identyfikację przeciwległych ścian prostopadłościanu. Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się w środku takiego prostopadłościanu i promień światła został wyemitowany w kie-

runku ściany za naszymi plecami. Wówczas zobaczymy go na ścianie przed nami. Wobec tego możemy zobaczyć przed sobą swój tył, a patrząc w prawo – lewy profil. W zasadzie podobny efekt wizualny otrzymalibyśmy układając ściany prostopadłościanu lustrami. Znajdujący się wewnątrz obserwator będzie miał złudzenie przestrzeni nieskończonej, jakkolwiek realna przestrzeń będzie zamknięta. Jest jednak różnica, obrazy w lustrach nie będą odwrócone, np. obraz prawej dłoni nie będzie widziany jako dłoń lewa. W ogólności każdą trójwymiarową zwartą rozmaitość możemy przedstawić jako pełniący rolę obszaru fundamentalnego wielościan, w którym dokonano utożsamienia parami ścian w odpowiedni sposób. Dopóki liczba ścian nie przekracza osiem, zwarte rozmaitości mogą być utworzone z fragmentów trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa. Gdy liczba ścian jest większa lub równa osiem, obszar fundamentalny musi być, jak to wcześniej uzasadnialiśmy, utworzony z fragmentów trójwymiarowej przestrzeni hiperbolicznej.

W ogólności metoda topologicznej klasyfikacji rozmaitości \mathcal{M} zadaną metryką g wymaga

1. wyznaczenia jej uniwersalnego pokrycia $\mathcal{M}\square$;
2. znalezienia obszaru fundamentalnego, zwanego też komórką fundamentalną;
3. wyznaczenia grupy holonomii Γ działających na obszarze fundamentalnym.

Wszystkie powyższe pojęcia mają bardzo formalne i abstrakcyjne definicje, które można znaleźć w klasycznych monografiach z topologii algebraicznej. W niniejszej pracy definicje te zostaną podane w sposób mniej formalny, ale jednocześnie wystarczający dla zrozumienia istoty rzeczy – pojęcia kształtu przestrzeni, przedmiotu naszych zainteresowań.

W topologii w problemie charakteryzacji przestrzeni używa się strategii tzw. niezmienników topologicznych, które jednoznacznie określają daną klasę równoważnych obiektów. Dzieje się tak z tego prostego powodu, że trudno jest udowodnić równoważność topologiczną dwóch obiektów geometrycznych, natomiast łatwo wykazać ich niehomeomorficzność, pokazując, że ich niezmiennik topologiczny jest różny. Niezmienniki topologiczne przyjmują różną postać: mogą być liczbami (jak np. wymiar rozmaitości, liczba spójnych kawałków przestrzeni czy też charakterystyka Poincaré-Eulera) lub całymi strukturami matematycznymi (np. grupy homotopii).

Wprowadźmy pewien język opisu nietrywialnej topologii. Zaczniemy od pojęcia pętli. Pętla γ w punkcie $x \in \mathcal{M}$ nazywa się dowolną drogą, która rozpoczyna się i kończy w punkcie x . Dwie pętle, γ i γ' , są homotopijne, jeśli γ może być w ciągły sposób przekształcona do γ' . Rozmaitość \mathcal{M} jest jedno-

spójna, jeśli dla każdego x dowolne dwie pętle są homotopijne. Powyższa własność może być wyrażona w równoważny sposób. Rozmaitość jest jednospójna, jeśli każda pętla jest homotopijna z punktem lub – mówiąc inaczej – na rozmaitości \mathcal{M} dowolna pętla jest ściągalna do punktu. Jeśli tak nie jest, przestrzeń jest *wielospójna*. Przykładowo przestrzenie euklidesowskie $\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^2, \dots, \mathfrak{S}^n$ oraz sfery S^2, S^3, \dots, S^n są przestrzeniami jednospójnymi, podczas gdy okrąg S^1 , walec $S^1 \times \mathfrak{S}$, czy płaski torus $S^1 \times S^1$ są wielospójne.

Badanie homotopijnych pętli na rozmaitości \mathcal{M} jest sposobem wykrycia jej nietrywialnej topologii, np. za pomocą pętli możemy odkryć, czy przestrzeń ma dziury, rączki etc. Co więcej, klasy równoważności homotopijnych pętli można wyposażyć w strukturę grupy, jeśli wprowadzić dodawanie pętli poprzez połączenia końca z początkiem drugiej, tj. sumą dwóch pętli nazywamy nową pętlę składającą się z pierwszej, do której końca dołączono drugą. Elementem neutralnym (zerem grupy) jest pętla ściągalna do punktu. Grupa pętli (ich klas równoważności) nazywa się pierwszą grupą homotopii w punkcie x albo – w oryginalnej terminologii Poincarégo – *grupą fundamentalną* $\pi_1(\mathcal{M}, x)$. Grupa fundamentalna jest niezależna od wyboru punktu bazowego $\chi \in \mathcal{M}$, tzn. jest niezmiennikiem topologicznym rozmaitości.

Oczywiście dla powierzchni wielospójnych grupa fundamentalna będzie nietrywialna (dla powierzchni jednospójnych jest trywialna, ponieważ składa się jedynie z punktu). Oznacza to, że dla przestrzeni wielospójnych (o nietrywialnej geometrii) istnieje co najmniej jedna pętla, która nie może być ściągnięta do punktu. W wyższych wymiarach ($n \geq 3$) problem jest bardzo złożony i jednowymiarowe pętle nie są już wystarczające do detekcji nietrywialnej topologii tych rozmaitości. Domeną topologii algebraicznej jest badanie uogólnień grupy fundamentalnej oraz koncepcji homotopijnych pętli na wyższe wymiary.

Wygodny sposób patrzenia na przestrzeń wielospójną, który jest jednocześnie taki, że zachowuje 1 – 1 odpowiedniość punktów, daje nam pojęcie *uniwersalnej przestrzeni nakrywającej*.

W celu zdefiniowania tego pojęcia rozważmy rozmaitość \mathcal{M} z zadaną metryką g . Wybierzmy punkt bazowy $x \in \mathcal{M}$ i rozważmy różne *drogi* zaczynające się w punkcie x i kończące się w innym punkcie $y \in \mathcal{M}$. Każda droga γ należy do pewnej klasy homotopii pętli w punkcie x . Konstruujemy uniwersalną przestrzeń nakrywającą jako pewną nową rozmaitość $(\mathcal{M} \cdot, g \cdot)$, taką, że każdy punkt $y \cdot$ ($\mathcal{M} \cdot$ jest traktowany jako para (y, γ)), gdzie y jest punktem przebiegającym po całej rozmaitości \mathcal{M} , podczas gdy x jest ustalone i γ przebiega po wszystkich klasach homotopii). Metrykę $g \cdot$ otrzymujemy, definiując odległość od $x \cdot = (x, \gamma)$ do bliskiego punktu $x \cdot' = (x', \gamma)$ w $\mathcal{M} \cdot$

jako równą odległości od x do x' w \mathcal{M} . Z przeprowadzonej konstrukcji widać, że lokalnie $(\mathcal{M}^\square, g^\square)$ i (\mathcal{M}, g) są przestrzeniami nieodróżnialnymi. Oczywiście kiedy \mathcal{M} jest jednospójną przestrzenią, pozostanie ona identyczna z uniwersalną przestrzenią nakrywającą. Gdy natomiast \mathcal{M} jest przestrzenią wielospójną, wówczas każdy punkt \mathcal{M} nieskończoną liczbę nowych punktów w \mathcal{M}^\square , a uniwersalna przestrzeń nakrywająca jest pomysłem na rozwinięcie oryginalnej rozmaitości. Na przykład jeśli weźmiemy punkt x i drogę γ z x do x' na walcu, to mogą one być rozwinięte w punkt X i drogę Γ z X do X' w \mathfrak{S}^2 . Gdy punkt $x \in D$, który jest wielospójny, wtedy będą istnieć różne drogi $\gamma^1, \gamma^2, \dots$ i ich rozwinięcia $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots$, które generują nowe punkty X', X'', \dots w \mathfrak{S}^2 . Przestrzeń \mathfrak{S}^2 pojawia się nam jako uniwersalna przestrzeń nakrywająca walca $\mathfrak{S} \times S^1$.

Rozważmy punkt x i pętle γ w $x \in \mathcal{M}$. Jeśli γ przynależy do obszaru jednospójnego w \mathcal{M} , to para (x, γ) generuje pojedynczy punkt x^\square z \mathcal{M} . Z drugiej strony jeśli γ należy do obszaru wielospójnego w \mathcal{M} , wówczas para (x, γ) generuje dodatkowe punkty, powiedzmy x', x'', \dots , które będą nazywane *punktami homologicznymi do x* . Odwzorowania $x^\square \rightarrow x^\square', x^\square > x^\square'', \dots$ są izometriami i tworzą grupę przekształceń \mathcal{M}^\square , zwaną *grupą holonomii* Γ w \mathcal{M}^\square . Ta grupa jest nieciągła, tj. istnieje niezerowa najkrótsza odległość pomiędzy każdymi dwoma punktami homologicznymi oraz generatory tej grupy (za wyjątkiem jedności grupy) nie posiadają punktów stałych. Własność ta jest bardzo restrykcyjna (wyklucza np. obroty) i pozwala na klasyfikację wszystkich możliwych grup holonomii. O takiej grupie holonomii mówimy, że działa w sposób swobodny i nieciągły na \mathcal{M} . Grupa holonomii jest izomorficzna z grupą fundamentalną $\pi_1(\mathcal{M}^\square)$.

Oczywiście własności geometryczne rozmaitości \mathcal{M} wewnątrz obszaru jednospójnego będą takie same jak w jej rozwinięciu w uniwersalnym pokryciu \mathcal{M}^\square . Możemy teraz zapytać, jaki jest największy jednospójny obszar zawierający dany punkt $x \in \mathcal{M}$. Odpowiedzią jest najmniejszy zbiór zdefiniowany następująco

$$\{y \in \mathcal{M} : d(y^\square, x^\square) < d(y^\square \gamma(x^\square)), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Jego rozwinięcie (obraz) w przestrzeni nakrywającej jest nazywane *obszarem fundamentalnym*. Obszar fundamentalny jest zawsze zbiorem wypukłym i ma skończoną liczbę ścian, ponieważ grupa holonomii jest grupą dyskretną. Jego ściany są parami homologiczne, tzn. przekształcenia przeprowadzające jedną ścianę w drugą są generatorami grupy holonomii Γ . W dwóch wymiarach obszar fundamentalny jest powierzchnią, której brzeg jest utwo-

rzony przez linię, jest więc wielokątem. Natomiast w trzech wymiarach obszar fundamentalny jest ograniczony przez ściany, tworzy więc wielościan.

Konfiguracja utworzona przez obszar fundamentalny (komórkę elementarną) W oraz jej obraz w uniwersalnej przestrzeni $\gamma(W)$, gdzie $\gamma \in \Gamma$, jest nazywana tesselacją (parkietażem) \mathcal{M} . Każdy obraz $\gamma(W)$ jest elementarną komórką tesselacji.

Wprowadzone pojęcie obszaru fundamentalnego ma dwie główne zalety. Po pierwsze, grupa fundamentalna danej rozmaitości topologicznej \mathcal{M} jest izomorficzna z grupą fundamentalną obszaru fundamentalnego. Po drugie, w obszarze fundamentalnym może być reprezentowana dowolna krzywa z \mathcal{M} , ponieważ część tej krzywej leżąca na zewnątrz obszaru fundamentalnego może być przeprowadzona w odpowiednią krzywą wewnątrz obszaru fundamentalnego poprzez odpowiednią holonomię.

Celem zilustrowania wprowadzonych pojęć odwołajmy się do pedagogicznego, ale intuicyjnie zawodnego, przypadku dwuwymiarowego. Jak wiadomo każda powierzchnia Riemanna jest homeomorficzna z powierzchnią dopuszczającą metrykę o stałej krzywiznie k . Wobec tego każda powierzchnia Riemanna może być reprezentowana jako przestrzeń ilorazowa $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}} \backslash \Gamma$, gdzie $\tilde{\mathcal{M}}$ jest uniwersalną przestrzenią nakrywającą, tj. płaszczyzną Euklidesa \mathfrak{S}^2 , jeśli $k = 0$; sferą S^2 , jeśli $k > 0$; płaszczyzną hiperboliczną H^2 , gdy $k < 0$; oraz Γ jest dyskretną podgrupą grupy izometrii bez punktu stałego. Stąd lokalnie euklidesowskie powierzchnie to jednospójna płaszczyzna Euklidesa, wielospójny walec $\mathfrak{S} \times S^1$, wstęga Möbiusa, torus $S^1 \times S^1$ i butelka Kleina.

Pewne obszary fundamentalne charakterystyczne dla powierzchni Riemanna o stałej krzywiznie k zostały podsumowane na Rys. 10. Jak widzimy, przestrzeń nakrywająca dla $k > 0$ jest sferą, a w pozostałych przypadkach jest tak, jak zaznaczono schematycznie na rysunku.

W przypadku geometrii sferycznej istnieją tylko dwie przestrzenne formy: zwykła sfera S^2 oraz płaszczyzna rzutowa $P^2 \equiv S^2 \backslash Z_2$, gdzie Z_2 jest grupą odbić zwierciadlanych względem środka sfery. Podobnie jest w przypadku wielowymiarowej powierzchni o stałej dodatniej krzywiznie, której wymiar jest dowolną liczbą parzystą.

Hiperboliczna płaszczyzna H^2 , historycznie znana jako płaszczyzna Łobaczewskiego, jest trudna do wyobrażenia, ponieważ – jak już wspominaliśmy – nie może być izometrycznie zanurzona w \mathfrak{S}^3 (ściśnięta w \mathfrak{S}^3). Tym niemniej możemy o niej myśleć jak o powierzchni, która posiada ujemną krzywiznę w każdym punkcie i której nie widzimy w \mathfrak{S}^3 . Pełną grupę izometrii płaszczyzny hiperbolicznej H^2 jest $\text{PSL}(2, R) \equiv \text{SL}(2, R) \backslash Z_2$,

gdzie $SL(2, R)$ jest grupą macierzy rzeczywistych 2×2 o jednostkowym wyznaczniku. Najbardziej znanym przykładem zwartej powierzchni hiperbolicznej jest dwutorus T^2 z dziurą. W tym przypadku obszar fundamentalny jest regularnym ośmiokątem, którego boki zostały parami sklezione. W reprezentacji Poincarégo geometrii hiperbolicznej obszar fundamentalny jest krzywoliniowy i pokrycie jednostkowego koła takimi zniekształconymi ośmiokątami będzie tworzyć tesselację H^2 . W tej niesprzecznej reprezentacji płaszczyzna hiperboliczna jest reprezentowana przez koło, „linie proste” (geodezyjne są łukami, które przecinają brzeg koła pod kątem prostym lub średnicę okręgu). Słynny niemiecki artysta M. C. Escher przedstawiał fascynujące rysunki tesselacji (parkietażu) płaszczyzny hiperbolicznej dla zilustrowania jej własności.

Topologiczna klasyfikacja lokalnie hiperbolicznych powierzchni jest kompletna tylko dla zwartych struktur $H^2 \setminus \Gamma$ i zawiera następujące kategorie

1. spójna suma g torusów, w których wycięto dziurę, g -torus T_g ;
2. spójna suma n płaszczyzn rzutowych;
3. spójna suma zwartych, orientowalnych powierzchni (S^2 lub T_g) oraz płaszczyzny rzutowej albo butelki Kleina.

Wszystkie te powierzchnie mają pole powierzchni ograniczone z góry przez 2π oraz średnicę większą niż $\operatorname{tg}^{-1}(4) \approx 2,06$.

Podkreślimy, że istnieje nieskończona liczba niezwartych lokalnie hiperbolicznych powierzchni, ponieważ

- każda otwarta powierzchnia różna od płaszczyzny Euklidesa, walca czy wstęgi Möbiusa jest homeomorficzna z lokalnie hiperboliczną powierzchnią;
- każda zamknięta powierzchnia, która nie jest sferą, płaszczyzną rzutową (płaszczyznę domkniętą okręgiem w nieskończoności) czy torusem lub butelką Kleina, jest homeomorficznie z lokalnie hiperboliczną powierzchnią.

Przejdźmy teraz do interesującego nas przede wszystkim przypadku trójwymiarowego. Jak wiadomo, każda trójwymiarowa rozmaitość Riemanna \mathcal{M} , która dopuszcza przynajmniej trójwymiarową dyskretną grupę izometrii Γ , działającą prosto-tranzytywnie na \mathcal{M} jest przestrzenią jednorodną (nie ma wyróżnionych punktów) i może być traktowana jako przestrzeń ilorazowa $\tilde{\mathcal{M}} \setminus \Gamma$, gdzie $\tilde{\mathcal{M}}$ jest uniwersalnym nakryciem \mathcal{M} . Niech G będzie pełną grupą izometrii, która również zawiera dyskretną podgrupę Γ . W terminologii używanej w teorii klasyfikacji zwartych trójrozmaitości o \mathcal{M} mówimy, że dopuszcza *strukturę geometryczną modelowaną na* $(\tilde{\mathcal{M}}, G)$.

W. P. Thurston klasyfikował jednorodne trójwymiarowe geometrie, dzieląc je na osiem różnych typów. W kosmologii koncentrujemy się głównie na

przestrzeniach, które są jednorodne i izotropowe, tj. są trójwymiarowymi przestrzeniami o stałej krzywiznie.

Każda zwarta trójrozmaitość o stałej krzywiznie k może być przedstawiona jako przestrzeń ilorazowa $\mathcal{M} \equiv \tilde{\mathcal{M}} / \Gamma$, gdzie $\tilde{\mathcal{M}}$ jest przestrzenią nakrywającą będącą

- sferą S^3 , jeśli $k > 0$;
- przestrzenią Euklidesa, jeśli $k = 0$;
- trójprzestrzenią hiperboliczną, jeśli $k < 0$;

Γ jest podgrupą izometrii działających na $\tilde{\mathcal{M}}$ swobodnie i nieciągłe. W dalszej części skoncentrujemy się na bardziej szczegółowym opisie tych przestrzeni. Zaczniemy od przypadku form przestrzennych geometrii sferycznej.

Konsekwencją tego, że sfera S^3 jest uniwersalną przestrzenią nakrywającą jest to, że wszystkie jej formy przestrzenne są zwarte. Metryka na sferze S^3 może być zapisana w postaci

$$d\sigma^2 = R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Objętość przestrzeni jest równa $2\pi^2 R^3$. Pełną grupą izometrii jest grupa $SO(4)$. Dopuszczalne podgrupy Γ grupy $SO(4)$ bez punktów stałych, działające na sferze S^3 swobodnie i nieciągłe to

- grupa cykliczna rzędu p , Z_p dla $p \geq 2$;
- grupy dihedralne (dwaścianu) rzędu $2m$, D_m dla $m > 2$;
- grupy wielościenne, a mianowicie
 - grupa symetrii czworościanu (tetrahedronu) T (4 wierzchołki, 6 krawędzi, 4 ściany), jest ona rzędu 12;
 - grupa symetrii ośmiościanu (oktahedronu) O (6 wierzchołków, 12 krawędzi, 8 ścian), jest ona rzędu 24;
 - grupa symetrii ikosahedronu I (12 wierzchołków, 30 krawędzi, 20 ścian), jest ona rzędu 60.

Wszystkie przestrzenie jednorodne o stałej krzywiznie mogą być otrzymane przez podzielenie S^3 przez jedną z wymienionych powyżej grup. Ich liczba jest oczywiście nieskończona, ponieważ są one numerowane przez parametry p i m .

Objętość $\mathcal{M} = S^3 / \Gamma$ wyraża się związkiem

$$\text{vol}(\mathcal{M}) = \frac{2\pi^2 R^3}{|\Gamma|}$$

gdzie $|\Gamma|$ jest rzędem grupy Γ . Dla topologicznie złożonych sferycznych trójgeometrii $|\Gamma|$ przyjmuje duże wartości, a więc objętość będzie mała. Nie istnieje dolne ograniczenie na objętość rozmaitości \mathcal{M} , ponieważ $|\Gamma|$ może przyjmować dowolnie duże wartości

$$0 < \text{vol}(\mathcal{M}) \leq 2\pi^2 R^3.$$

Dobrze znanym przykładem przestrzeni należącej do tej klasy jest przestrzeń rzutowa $P^3 = S^3/Z_2$ otrzymana poprzez identyfikację antypodalnych punktów sfery S^3 . Ta przestrzeń była użyta przez de Sittera i Lemaitre'a jako przestrzenna struktura ich modelu kosmologicznego. Innym przykładem są tzw. przestrzenie soczewkowe S^3/Z_p , z których najprostszą jest przestrzeń S^3/Z_3 , dzieląca sferę S^3 na sześć komórek elementarnych, mających kształt soczewek. Kolejnym przykładem jest dwunastościan Poincarégo S^3/I . W tym przypadku wielościan fundamentalny jest regularnym dwunastościanem, którego ściany tworzą pięciokąty foremne. Przestrzeń zwartą otrzymujemy poprzez identyfikację przeciwległych ścian po obrocie $2\pi/10$, zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara wokół osi ortogonalnej do ścian. Dla otrzymania takiej konfiguracji trzeba wykonać aż 120 odpowiednich operacji co da nam ekstremalnie złożony przypadek wielospójnej topologii (Rys. 11).

Rozważmy teraz przypadek przestrzennych form euklidesowej przestrzeni \mathfrak{S}^3 . Element liniowy w uniwersalnej przestrzeni nakrywającej może być zapisany jako

$$d\sigma^2 = R^2[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Pełna grupa izometrii jest $G = ISO(3) \equiv R \times SO(3)$, i generatory dopuszczalnej grupy holonomii Γ (tj. dyskretnej grupy bez punktu stałego), włączając grupę identyczności, translacje, odbicia z poślizgiem, oraz ruchy spiralne, występują w różnych kombinacjach. Grupy te generują osiemnaście różnych typów przestrzeni lokalnie euklidesowych. Pośród nich siedemnaście to formy wielospójne odpowiadające siedemnastu grupom krystalograficznym, odkrytym więcej niż wiek temu przez Fedorowa. Osiem form to przestrzenie otwarte (niezwarte), a dziesięć reprezentuje przypadki zwarte. Te modele możemy sobie wyobrazić, identyfikując ściany wielościanu fundamentalnego. Sześć z nich jest orientowalnych. Na przykład wielościan fundamentalny może być skonstruowany jako graniastosłup prawidłowy o podstawie sześciokątnej z różnymi możliwymi utożsamieniami ścian. Innym prostym przykładem jest trójtorus z utożsamieniem przeciwległych ścian (Rys. 12).

Zaznaczmy, że w tych przypadkach objętość przestrzeni jest dowolna, ponieważ nie istnieje twierdzenie sztywno wiążące promień krzywizny z topologiczną skalą długości.

Najbardziej interesujące, tak z matematycznego punktu widzenia, jak i zastosowań do opisu realnego świata, są przestrzenie hiperboliczne. Im będziemy głównie poświęcać uwagę w dalszej części tekstu.

Przestrzenie lokalnie hiperboliczne są mniej poznanymi przestrzeniami w porównaniu z innymi przestrzeniami jednorodnymi. Jednakże dzięki pionierskim pracom Thurstona w tej dziedzinie wiemy, że „prawie wszystkie” trójrozmaitości mogą być wyposażone w strukturę hiperboliczną H^3 .

Metryka indukowana na H^3 może być zapisana w postaci

$$d\sigma^2 = R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Objętość H^3 jest nieskończona, a jej grupa izometrii jest izomorficzna do $\text{PSL}(2, C)$ – grupy wymiernych liniowych transformacji działających na płaszczyźnie zespolonej.

Tak jak już wcześniej podkreślaliśmy, w geometrii hiperbolicznej istnieje zasadnicza różnica między przypadkiem dwu i wyżej wymiarowym. Powierzchnia o genusie $g \geq 2$ dopuszcza nieprzeliczalnie wiele nierównoważnych metryk hiperbolicznych, podczas gdy dla $n \geq 3$ spójna orientowalna rozmaitość o wymiarze n dopuszcza co najwyżej jedną metrykę hiperboliczną. Mówiąc bardziej precyzyjnie, jeśli dwie rozmaitości hiperboliczne (dla ustalonej wartości R) o wymiarze $n \neq 3$ mają izomorficzne grupy fundamentalne, to z konieczności będą one izometryczne. Z faktu powyższego wynikają ważne konsekwencje, a mianowicie, że dla wymiaru $n \geq 3$ objętość rozmaitości tak samo jak i długości zamkniętych geodezyjnych na rozmaitości, są niezmiennikami topologicznymi. Wynika stąd pomysł użycia parametru objętości do klasyfikacji form przestrzennych, co na pierwszy rzut oka wydaje się przeczyć celowi badań topologicznych.

Z każdym typem topologii powiązane są pewne długości charakterystyczne. Dla zwartych przestrzeni lokalnie euklidesowskich obszar fundamentalny może posiadać dowolną objętość, ale nie więcej niż osiem ścian. W przypadku sferycznym objętość S^3 / Γ jest największą możliwą wartością objętości sfery S^3 podzieloną przez pewną liczbę całkowitą. W przeciwieństwie do powyższych przypadków możliwa jest tesselacja H^3 przez wielościany, mające dowolną liczbę ścian. W przypadku trójwymiarowym hiperbolicznym objętość obszaru fundamentalnego jest ograniczona z dołu. Innymi słowy, istnieje hiperboliczna trójrozmaitość o objętości dowolnie bliskiej pewnej objętości minimalnej dla wszystkich hiperbolicznych trójrozmaitości.

Z powodów praktycznych oraz pewnych racji fizycznych różni autorzy koncentrują uwagę na zwartych rozmaitościach hiperbolicznych i ich objętościach. Każda topologia posiada pewną specyficzną objętość mierzoną w jednostkach promienia krzywizny. Absolutne dolne ograniczenie na objętość tych przestrzeni wynosi 0,16668. Jest to wynik o charakterze egzysten-

cialnym, mającym niewielki wpływ na zastosowania kosmologiczne. Z kosmologicznego punktu widzenia większe znaczenie ma objętość najmniejszej rozmaitości, jaką do tej pory udało się znaleźć. Są to rozmaitości Weeksa, zwane też przestrzeniami Weeksa-Matréé-Fomenko, których minimalna objętość wynosi 0,942707. Wielościan fundamentalny dla przestrzeni Weeksa ma 26 wierzchołków i 18 ścian, z których 12 jest pięciokątami foremnymi, a 6 – deltoidami.

Rozmaitość Weeksa pozostawia wiele miejsca dla wielu topologicznych efektów soczewkowania, ponieważ objętość obserwowalnego Wszechświata jest około 200 razy większa niż objętość przestrzeni Weeksa dla $\Omega_0 = 0,3$. Wiele rozmaitości hiperbolicznych ma geodezyjne krótsze niż promień krzywizny, pozostawiając wiele miejsca dla wielu kopii wielościanu fundamentalnego wewnątrz promienia horyzontu, nawet dla rozmaitości o objętości około 10. W Internecie można znaleźć program komputerowy *SnapPea*¹, opracowany przez J. Weeksa do badań nietrywialnych struktur topologicznych. Można tam znaleźć kilka milionów zwartych rozmaitości hiperbolicznych o objętościach mniejszych niż 10. W Tabeli 2 przedstawiono przykładowe parametry przestrzeni hiperbolicznych, gdzie r_+ i r_- są odpowiednio promieniami największej i najmniejszej sfery wpisanej w przestrzeni nakrywającej, $l_{\min} \equiv 2r_{\text{inj}}$ jest długością najkrótszej geodezyjnej wielościanu fundamentalnego.

V. TOPOLOGIA I KOSMOLOGIA

Kosmologowie wierzą dzisiaj, że nasz Wszechświat jest dobrze opisany przez zaburzony model Friedmanna-Lemaitre'a. Modele te są rozwiązaniami równań Einsteina dla przypadku przestrzeni jednorodnej i izotropowej. Ta ostatnia własność pociąga za sobą fakt, że geometria trójprzestrzeni odpowiada geometrii o stałej krzywiznie ($k = -1, 0, 1$). Czasoprzestrzenna rozmaitość jest opisywana przez metrykę Robertsona-Walkera

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) d\sigma^2,$$

gdzie

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

¹ *SnapPea*, napisany przez J. Weeksa, jest programem komputerowym do tworzenia i badania hiperbolicznych trójrozmaitości – zob. <http://www.geom.umn.edu/software/>

jest metryką trójwymiarowej jednorodnej i izotropowej rozmaitości oraz $S_k(\chi)$, w zależności od krzywizny k , ma postać

$$\begin{aligned} S_k(\chi) &= \sinh \chi, \text{ jeśli } k = -1 \\ S_k(\chi) &= \chi, \text{ jeśli } k = 0 \\ S_k(\chi) &= \sin \chi, \text{ jeśli } k = 1. \end{aligned}$$

Czynnik skali $R(t)$ został wybrany tak, że jest równy promieniowi krzywizny przestrzennej dla modeli niepłaskich. Dlatego też krzywizna przestrzenna jest dana przez k/R^2 .

Będziemy dopuszczać możliwość, że przekroje stałego czasu $\{t = \text{const}\}$ są w ogólności przestrzeniami wielospójnymi, dla których możliwe są różne formy topologiczne. Mamy jednak świadomość, że jest to założenie dodatkowe, tzn. każdemu wielospójnemu modelowi zawsze odpowiada, w sposób jednoznaczny, pewien jednospójny model, posiadający identyczne własności kinematyczne i dynamiczne.

Jak wiadomo podstawowe parametry obserwacyjne, takie jak parametr gęstości Ω_0 czy bezwymiarowa stała kosmologiczna $\lambda_0 = c^2 \Lambda / (3H_0^2 = \Omega_\Lambda)$, nie są z obserwacji znane z taką dokładnością, aby określić krzywiznę przestrzeni, tj. odróżnić $\Omega_0 + \lambda_0 = 1$ od $\Omega_0 + \lambda_0 = 1 \pm \delta$, $\delta \ll 1$.

Z drugiej strony detekcja nietrywialnej topologii ma znaczenie dla determinacji przestrzennej krzywizny, ponieważ grupy holonomii są całkowicie różne dla przypadków $k = -1, 0, 1$. Co więcej, warto zauważyć, że przestrzenie wielospójne nakładają precyzyjne więzy na parametry metryczne przestrzeni niezależnie od skal odległości kosmicznej.

W przypadku jednospójnych rozmaitości jedyną skalą we współporuszającym się układzie, która nie jest określona, jest promień krzywizny. Zwykle odnosimy go do dzisiejszej epoki, oznaczając $R(t_0) = R_{\text{curv}}$. Stąd R_{curv} jest naturalną skalą długości we współporuszającej się przestrzeni dla uniwersalnego nakrycia wielospójnej trójprzestrzeni.

Równania Friedmanna implikują relację

$$\Omega_0 + \lambda_0 - 1 = \frac{kc^2}{H_0^2 R_{\text{curv}}^2}$$

Jedyną kosmologiczną skalą długości, do której mamy bezpośrednie odniesienie obserwacyjne jest długość Hubble'a

$$L_{\text{Hubble}} = cH_0^{-1} = 3000h^{-1}\text{Mps}, \quad h \in [0,55, 0,75],$$

gdzie h jest parametrem związanym z brakiem dokładnej wartości dla H_0 . Jeśli zdefiniujemy teraz wielkość $f = \sqrt{|\Omega + \lambda - 1|}$ dla wszechświata, który nie jest płaski (dla płaskiego wartość R_{curv} pozostaje dowolna)

$$R_{\text{curv}} = L_{\text{Hubble}} = 3000(fh)^{-1} \text{Mps.}$$

W praktyce długość Hubble'a jest wielkością tego rzędu co rozmiar horyzontu R_H – horyzontu cząstek, który określa obserwowalny Wszechświat jako sferę w uniwersalnej przestrzeni nakrywającej.

Ta wartość jest trochę większa niż promień powierzchni ostatniego rozproszenia, które jest obecnym ograniczeniem na obserwacje.

Inną naturalną skalą kosmologiczną jest skala sprzężona ze stałą kosmologiczną

$$L_\Lambda = \Lambda^{-1/2} = (3H_0^2 \lambda_0 / c^2)^{-1/2} = 1730 \lambda^{-1/2} h^{-1} \text{Mps.}$$

Koncepcja horyzontu zachowuje swój dokładny sens w przestrzeniach wielospójnych, lecz musimy ją zastosować do uniwersalnej przestrzeni nakrywającej. Obiekt może być potencjalnie zaobserwowalny, wtedy i tylko wtedy gdy jego (współporuszająca) odległość jest mniejsza niż R_H w (UN).

W przypadku wielospójności rozmaitości mamy dodatkowo do czynienia z topologiczną skalą odległości powiązaną z wielościanem fundamentalnym. Geometria sugeruje nam porównanie jej z R_{curv} , lecz często użyteczniejsze dla obserwacji jest porównać ją do R_H czy też wyliczać ją Mps albo h^{-1} Mps.

Na Rys. 13 zestawiono parametry reprezentujące rozmiary charakterystyczne wielościanu fundamentalnego. Efekty obserwacyjne związane z wielospójnością będą występować, jeśli topologiczne skale charakterystyczne są mniejsze od rozmiarów obserwowalnego Wszechświata, tj. promienia horyzontu.

Odrzucenie hipotezy, że realny Wszechświat posiada topologię przestrzeni jednopójnej, ma ważne implikacje. Jeśli co najmniej jedna topologiczna skala jest mniejsza od rozmiarów horyzontu, wówczas będą obserwowalne wielokrotne obrazy tego samego obiektu czy też regionu, z którego emitowane jest promieniowanie. Im mniejszy będzie obszar fundamentalny, tym łatwiej będzie zaobserwować wielokrotnie topologicznie obiekty. Badając trójwymiarowe przeglądy nieba, zawierające obiekty i ich redshifty, możemy porównać ich rozkład z rozkładem teoretycznym, ponieważ liczba obrazów topologicznych w przestrzeniach lokalnie hiperbolicznych czy eliptycznych jest funkcją parametrów Ω_0 i λ_0 .

VI. PROMIENIOWANIE RELIKTOWE PODPISEM TOPOLOGII WSZECHŚWIATA

W 1946 r. G. Gamow wysunął ideę Wielkiego Wybuchu, zgodnie z którą Wszechświat w pierwszych fazach swojego istnienia był wystarczająco gęsty i gorący, by mogły w nim zachodzić reakcje termojądrowe. Jego intencją było wyjaśnienie obfitości lekkich pierwiastków, w szczególności helu, występujących obecnie we Wszechświecie. W modelu Wielkiego Wybuchu znalazło odpowiedź wiele problemów, które wcześniej nurtowały kosmologów, jak chociażby paradoks Olbersa. Wszechświat istnieje skończony czas i światło, dochodzące od gwiazd do obserwatora na Ziemi, pochodzi ze skończonego obszaru o promieniu równym iloczynowi prędkości światła i wieku Wszechświata lub – bardziej formalnie – w rozszerzającym się Wszechświecie jasność galaktyk maleje szybciej niż r^{-2} (poczerwienienie), a zatem wkład do całkowitej jasności nieba od coraz odleglejszych galaktyk maleje ze względu na to, że ich liczba w odległości r od Ziemi rośnie tylko jak R^2 . Model Wielkiego Wybuchu przewiduje istnienie w przestrzeni kosmicznej izotropowego promieniowania elektromagnetycznego o natężeniu odpowiadającym promieniowaniu ciała doskonale czarnego o temperaturze około 2,7 K. Promieniowanie to jest reliktem po jednym z wczesnych etapów ewolucji Wszechświata, stąd usprawiedliwiona jest jego nazwa: promieniowanie reliktowe. Materia była wtedy całkowicie zjonizowana. W nieprzeźroczystej plazmie, złożonej z fotonów, protonów, elektronów i neutronów, fotony efektywnie rozpraszały się na swobodnych elektronach (rozpraszanie Thompsona), doprowadzając do równowagi termodynamicznej materii i promieniowaniem oraz termalizacji promieniowania relikтового. Następnie gdy Wszechświat ochłodził się do temperatury 3000 K, to na skutek rekombinacji wodoru efektywność procesu thompsonowskiego spada niemal do zera i Wszechświat staje się przeźroczysty dla promieniowania. Wtedy Wszechświat przeżył jedną tysięczną część swojego wieku, a fotony zamiast rozpraszać się, mogły swobodnie wędrować we Wszechświecie. W skali redshiftu z wydarzenie to odpowiadało $z = 10^3$ (dzisiaj $z = 0$) (przybliżona relacja $t = (1 + z)^{-1}$ pozwala przeliczać czas kosmologiczny t na z , na podstawie odpowiednich relacji we wszechświecie płaskim). Dzisiaj tkwimy zanurzeni w kąpeli tego promieniowania, które – jak się okazuje – jest podpisem kształtu Wszechświata. Na skutek ekspansji Wszechświata jakkolwiek planckowski charakter widma zostaje zachowany, jego temperatura się zmienia jak

$$T = \frac{T_{\text{rekombinacji}}}{1+z}$$

(ekspansja jest adiabatyczna i $a(t)T = \text{const}$, gdzie $a(t)$ jest czynnikiem skali).

Można sobie tylko wyobrazić radość, jaka towarzyszyła odkryciu tego promieniowania przez A. Penziasa i R. Wilsona w 1965 r. Do odkrycia doszło zupełnie przypadkowo, ponieważ obaj panowie zajmowali się badaniem odbiorników z punktu widzenia najmniejszych szumów aparatury. Badali oni szумы wywoływane obecnością atmosfery i zauważyli, że jeśli wyeliminować wszystkie znane szумы nadal pozostaje pozaatmosferyczne źródło szumów rejestrowanych przez antenę. Skonsultowali rzecz z grupą astrofizyków kierowaną przez R. Dicke'a, którzy następnie opublikowali pracę, twierdząc, że jest to promieniowanie reliktowe, przewidziane przez Gamow w jego modelu standardowym. Z chwilą tego odkrycia rozpoczyna się nowa epoka w rozwoju kosmologii, która od tej pory staje się nauką mniej lub bardziej, ale umocowaną w empirii.

Obserwowane z Ziemi promieniowanie reliktowe nie jest całkowicie izotropowe. W 1977 r. P. Henry zaobserwował tzw. anizotropię dipolową, związaną z ruchem Ziemi względem układu spoczywającego względem promieniowania relikтового. Istnienie tej składowej anizotropii można wytłumaczyć poprzez efekt Dopplera. Ziemia wykonuje ruch wokół Słońca, które uczestniczy w ruchu wokół centrum Galaktyki, która z kolei porusza się w gromadzie Virgo, zmierzającej w kierunku wielkiego atraktora. Wobec tego istnieje względna prędkość naszej ziemskiej anteny względem układu sztywno związanego z tłem. W związku z tym powinniśmy w różnych kierunkach, np. na wprost i do tyłu, obserwować różne temperatury promieniowania relikтового, tj. względną anizotropię temperatury tego promieniowania $\delta T/T$. Efekt Dopplera tłumaczy, jak powstaje taka anizotropia, i pozwala określić prędkość, z jaką Ziemia porusza się względem swojego „eteru”. Z przeprowadzonych pomiarów wynika, że Słońce porusza się z prędkością 360 km/s w kierunku gwiazdozbioru Lwa ($\delta T/T \propto v_0$), natomiast cała Droga Mleczna z prędkością 600 km/s w kierunku gwiazdozbioru Hydry.

Fundamentalne znaczenie dla kosmologii ma to, że fluktuacje promieniowania relikтового są jakby odciskami palców formacji wielkoskalowej struktury Wszechświata na powierzchni ostatniego rozproszenia – około 300 000 lat po Wielkim Wybuchu. Niejednorodności w rozkładzie materii w tym okresie, gdy promieniowanie po raz ostatni oddziaływało z materią, pozostawiły po sobie ślad w postaci kwadrupolowej anizotropii tego promieniowania. „Had astronomers seen ‘the face of God’? Had they found ‘the Holy Grail’?” – to tylko niektóre z komentarzy, które pojawiły się w prasie co-

dziennej wiosną 1992 r. po wykryciu przez satelitę COBE niewielkiej anizotropii w temperaturze promieniowania relikтового. Misja COBE miała, po pierwsze, zbadać, czy promieniowanie reliktowe jest izotropowe (projekt FIRAS był dedykowany pomiarom interferometrycznym promieniowania tła w zakresie częstotliwości 480-5000 μm); po drugie, dokonać pomiaru anizotropii tego promieniowania (projekt DMR za pomocą dwóch wiązek na częstotliwościach 31,5, 53 i 90 GHz).

COBE z niezwykłą precyzją ustalił Planckowski charakter widma i zmierzył składową izotropową. Co więcej temperatura mierzona przez COBE z obszarów o rozmiarach kątowych $\Theta \sim 7^\circ$ wykazała anizotropię $\delta T/T = (1,1 \pm 0,2)10^{-5}$.

Czego dowodzi istnienie anizotropii tego promieniowania, które możemy sobie wyobrazić jako cieplejsze i zimniejsze plamy na mapie nieba, tak jak plamy na powierzchni ciał zwierząt widzianych w podczerwieni? Promieniowanie reliktowe widzimy z Ziemi, a fotony docierają do nas z pewnej sfery, w której środku się znajdujemy. Sfera ta jest zwana powierzchnią ostatniego rozproszenia, której promień $R_{\text{sls}} = R_{\text{curv}} \text{arc cosh}((2 - \Omega_0) / \Omega_0)$, gdzie Ω_0 jest parametrem gęstości, R_{curv} jest promieniem krzywizny, a indeks zero oznacza, że mówimy o parametrach fizycznych odniesionych do dzisiejszej epoki (Rys. 14). W granicy gdy $\Omega_0 \rightarrow 1$, $R_{\text{sls}} = 2cH_0^{-1} \approx 6000h^{-1}$ Mps. Wyobrażamy sobie, że na powierzchni ostatniego rozproszenia istniały pierwsze zgęstki materii. Fotony, wychodząc z takiego obszaru o większej grawitacji, czyli z pewnej jamy potencjału, traciły energię i ich temperatura jest różna od fotonów wychodzących z obszarów o mniejszej gęstości o $\delta T/T \propto \delta\phi/c^2$, gdzie $\delta\phi$ jest odpowiednią różnicą potencjałów. I analogicznie: gdy fotony wchodzi do dołka potencjału, będą zyskiwać energię. To zjawisko nazywamy efektem Sachsa-Wolfe'a. Obserwowana anizotropia promieniowania relikтового może zatem wynikać z takiego oddziaływania fotonów reliktowych ze zmiennym polem grawitacyjnym. Fotony dzięki temu tracą bądź zyskują energię albo – inaczej mówiąc – ulegają przesunięciu ku czerwieni lub fioletowi. W ten sposób temperatura promieniowania relikowego, dochodzącego do nas z różnych miejsc na sferze niebieskiej, zależy od wielkości tego poczerwienienia, czyli od rozkładu i ewolucji czasowej zaburzeń pola grawitacyjnego. Sachs i Wolfe jako pierwsi podali opis tego mechanizmu w 1967 r., wyprowadzając zależność na anizotropię tego promieniowania we wszechświecie płaskim. Później w tym samym roku Anile i Motta uogólnili ich wyniki na przypadek geometrii hiperbolicznej i eliptycznej. Czynnikiem powodującym anizotropię może być również efekt Reesa-

Sciamy, gdzie niejednorodny rozkład fotonów jest wynikiem oddziaływania fotonów ze zmiennym w czasie polem grawitacyjnym.

Anizotropia rozkładu fotonów może również wynikać z oddziaływania fotonów z barionami na powierzchni ostatniego rozproszenia. Z kolei anizotropia dipolowa związana jest z ruchem Ziemi względem układu związanego z promieniowaniem tła, tak że $\delta T/T \propto v_0$, gdzie v_0 jest prędkością Ziemi względem tego układu.

Niestety COBE nie był w stanie rozróżnić struktur w skalach kątowych mniejszych niż 10° . Wybrana częstość 30,59 GHz odpowiada niestety poziomowi promieniowania pyłu galaktycznego; w tym zakresie promieniują również radioźródła. Obserwowane fluktuacje wynoszą $100 \mu\text{K}$, podczas gdy oczekiwana składowa kwadrupolowa to $1,5 \mu\text{K}$. Parametry takie jak mała zdolność rozdzielcza (7° – 10°) czy czułość (zdolność do wydzielenia słabych sygnałów ponad szumy aparaturowe – (poziom sygnału) / (poziom szumu) $\cong 15$ mają się zdecydowanie poprawić w niedalekiej przyszłości.

Spodziewamy się zasadniczego postępu w związku z obserwacjami dokonanymi za pomocą sondy MAP (Microwave Anisotropy Probe) zbudowanej przez NASA. Zdolność rozdzielcza detektora to $0,5^\circ$. W 2007 r. spodziewany jest start europejskiego satelity *Planck*, którego zdolność rozdzielcza będzie fascynująca – $10''$ (Tabela 3).

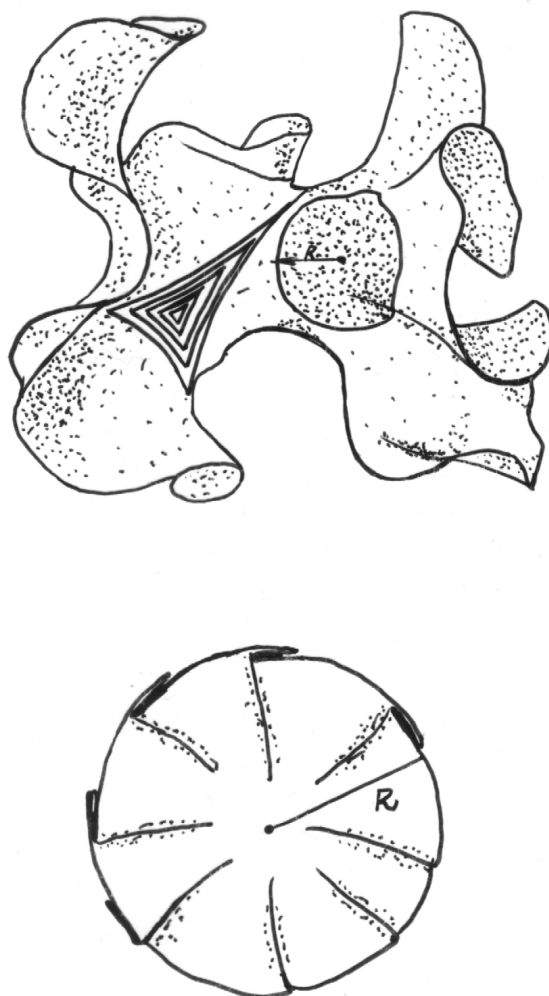
Tabela 3. Podstawowe parametry misji COBE, MAP i *Planck*.

	COBE	MAP	Planck
czułość $\delta T/T$	10^{-5}	$6 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
rozdzielczość	7°	$20'$	$10''$
częstość	30-90 GHz	22-90 GHz	30-860 GHz

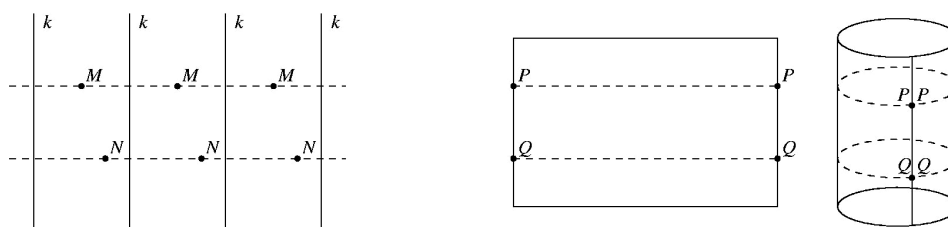
Fluktuacje temperatury promieniowania relikтового wydają się być kluczem do rozstrzygnięcia problemu topologicznej formy naszej przestrzeni, a dokładnie w geometrii powierzchni ostatniego rozproszenia, w jej samoprzecięciach. Jeżeli duży plaster nawiniemy na palec, to znajdzie on na sobie i dojdzie do jego przecięcia z samym sobą. Warunkiem jest, aby rozmiary charakterystyczne były małe albo porównywalne z rozmiarami powierzchni ostatniego rozproszenia. Wyjaśnijmy rzecz na przykładzie trójtorusa (Rys. 15). Wówczas uniwersalna przestrzeń nakrywająca będzie posiadać strukturę regularnej sieci krystalicznej z sześcienną komórką elementarną. Niech powierzchnia ostatniego rozproszenia przecina komórkę elementarną. Załóżmy, że obserwator znajduje się dokładnie w środku sześcianu, wówczas zauważy

on, że promieniowanie tła docierające do niego z punktów samoprzecięcia powierzchni ostatniego rozproszenia, będących okręgami, mają identyczną temperaturę. Jest tak dlatego, że te dwa okręgi (istnieją dwie pary takich) są w istocie tym samym okręgiem, tylko oglądanym z dwóch różnych kierunków i stąd fluktuacje temperatury muszą pozostać na nich ściśle skorelowane (Rys. 16). David Spergel i Neil Cornish poszukują na niebie par okręgów, wzdłuż których fluktuacje temperatury są ściśle skorelowane, z nadzieją znalezienia ścian, na których leżą odpowiednie okręgi, co pozwoli na rekonstrukcję grupy holonomii i rekonstrukcję przestrzeni. Zadanie jest trudne ze względu na obecność różnych czynników zniekształcających obrazy okręgów, ponieważ na drodze fotonów do obserwatora oddziałuje na niezmiennie pole grawitacyjne. Niestety celu tego nie potrafimy dzisiaj osiągnąć; potrzebne są detektory anizotropii promieniowania relikтового nowej generacji o zwiększonej zdolności rozdzielczej i czułości.

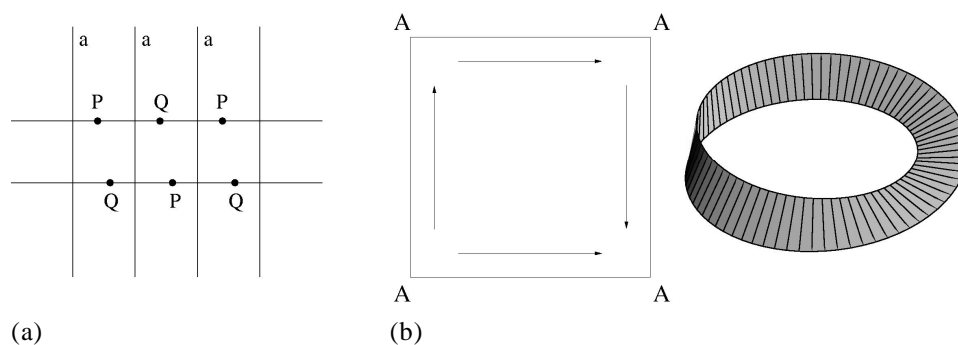
Wydaje się fascynujące dla naukowca żyć w takim właśnie okresie, kiedy postęp techniczny stwarza kosmologii prawdziwe możliwości odpowiedzi na tak fundamentalne pytania, jak pytanie o kształt przestrzeni, jej geometrię. Ta sama obserwacja – promieniowanie tła – która sprawiła, że zajmowanie się kosmologią przestało być rzeczą wstydliwą, otwiera dzisiaj kosmologom takie same możliwości jak kiedyś fizykom odkrycie mechaniki kwantowej.



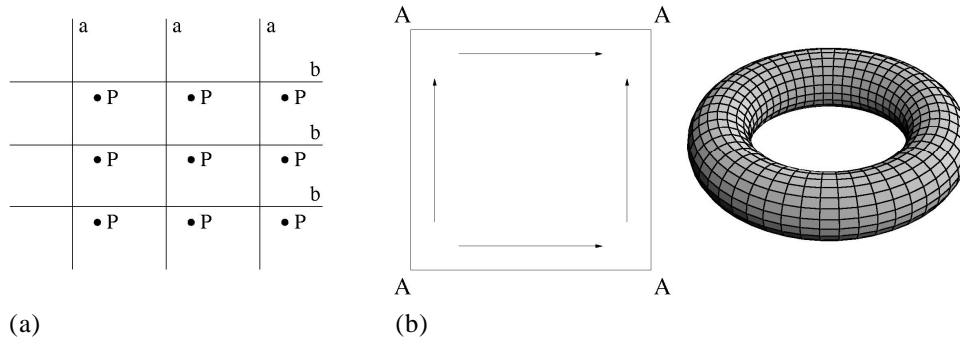
Rys. 1. Papierowy model powierzchni hiperbolicznej. Suma kątów wewnętrznych trójkąta na powierzchni hiperbolicznej jest mniejsza od 180° i maleje ze wzrostem powierzchni trójkąta. Papierowy model takiej powierzchni możemy skonstruować, jeśli w każdym wierzchołku zejdzie się siedem trójkątów równobocznych. Oczywiście powierzchnia koła na tej powierzchni będzie większa od powierzchni koła o tym samym promieniu – na płaszczyźnie okrąg przy rozłożeniu zachodzi sam na siebie.



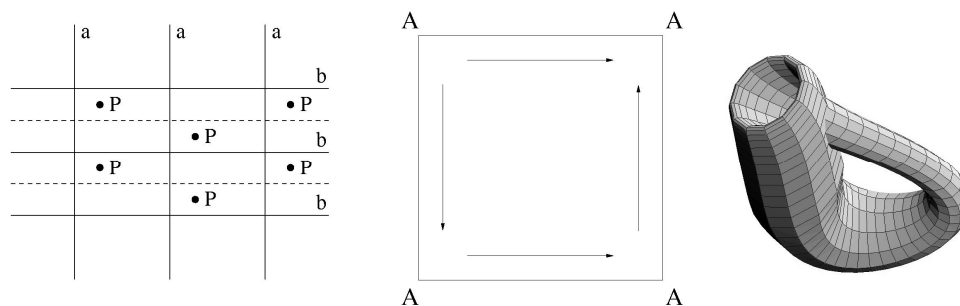
Rys. 2. Konstrukcja dwustronnego walca. Dzielimy płaszczyznę zbiorem prostych równoległych i dokonujemy, przesuując paski, utożsamienia odpowiednich punktów (a). Walec, przestrzenną formę geometrii płaskiej, otrzymujemy, utożsamiając (klejąc) w prostokątnym pasku przeciwległe punkty jego boków (b).



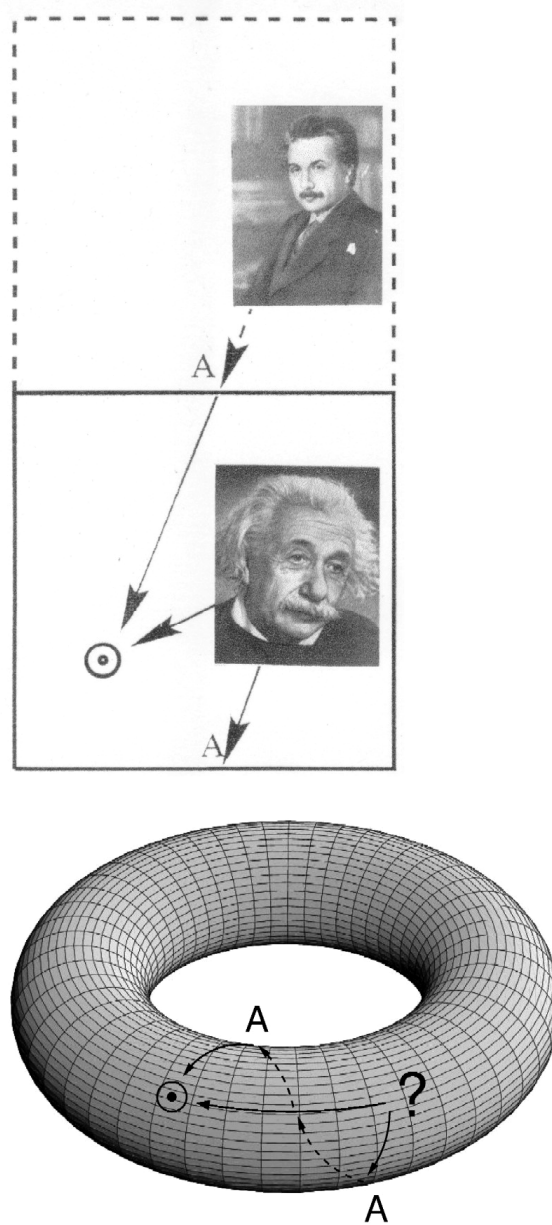
Rys. 3. Jednostronne formy przestrzenne geometrii płaskiej otrzymujemy, utożsamiając punkty w inny sposób, tj. dodatkowo odbijając je zwierciadlanie względem prostej prostopadłej (a). Wstęga Möbiusa (jednostronny walec) jest jednostronnym modelem przestrzennej formy geometrii płaskiej. Zamiast o utożsamionych punktach w paskach możemy o niej myśleć jak o prostokątnym pasku, w którym dokonano utożsamienia punktów, ale nie w kierunku zgodnym jak w walcu, ale przeciwnym, przekręcając jeden z końców paska o 180° (b).



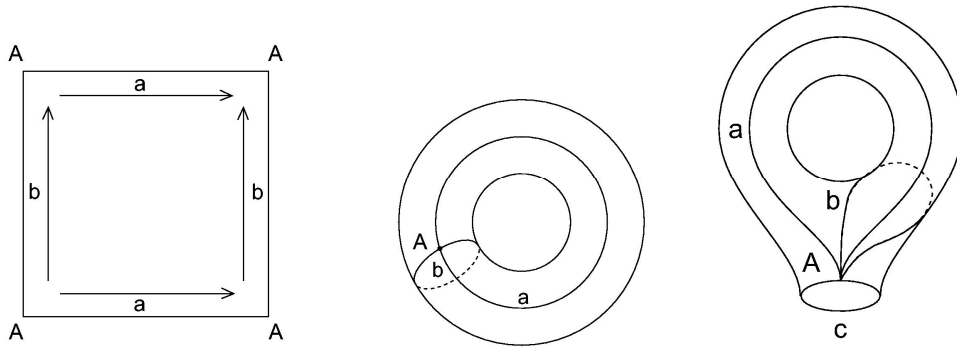
Rys. 4. Dwustronny torus otrzymamy, jeśli dokonamy podziału płaszczyzny przez dwa układy prostych równoległych $\{k\}$ i $\{l\}$. Przesuwając wybrany prostokąt w kierunku prostych $\{k\}$ i $\{l\}$ dokonujemy odpowiedniego utożsamienia punktów (a). Do wyobrażenia torusa możemy prościej dojść rozważając prostokąt, w którym utożsamiono w kierunkach zgodnych jego przeciwległe boki (b).



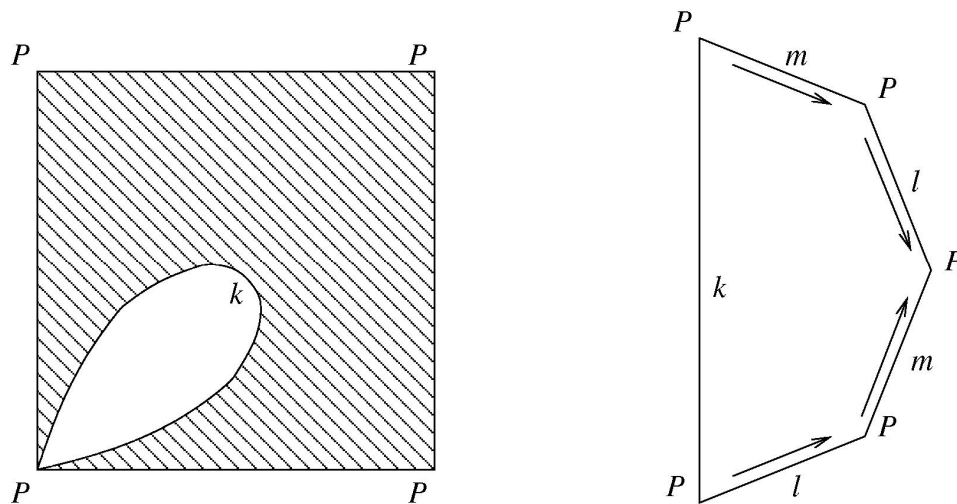
Rys. 5. Gdy wybierzemy inny sposób utożsamienia punktów z wykorzystaniem zwierciadlanego odbicia względem prostej dzielącej obszar między układem prostych $\{l\}$ na połowy (a), otrzymamy jednostronny wariant torusa zwany butelką Kleina (b).



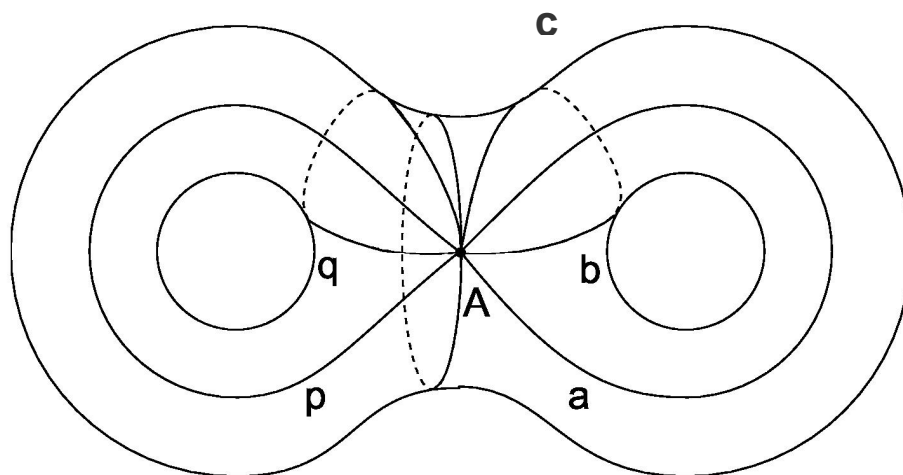
Rys. 6. Światło w przestrzeni wielospójnej może być zarejestrowane przez obserwatora na wiele różnych sposobów. W takim wszechświecie powinny być obserwowalne repliki tych samych obiektów (Einstein) na różnych etapach ewolucji.



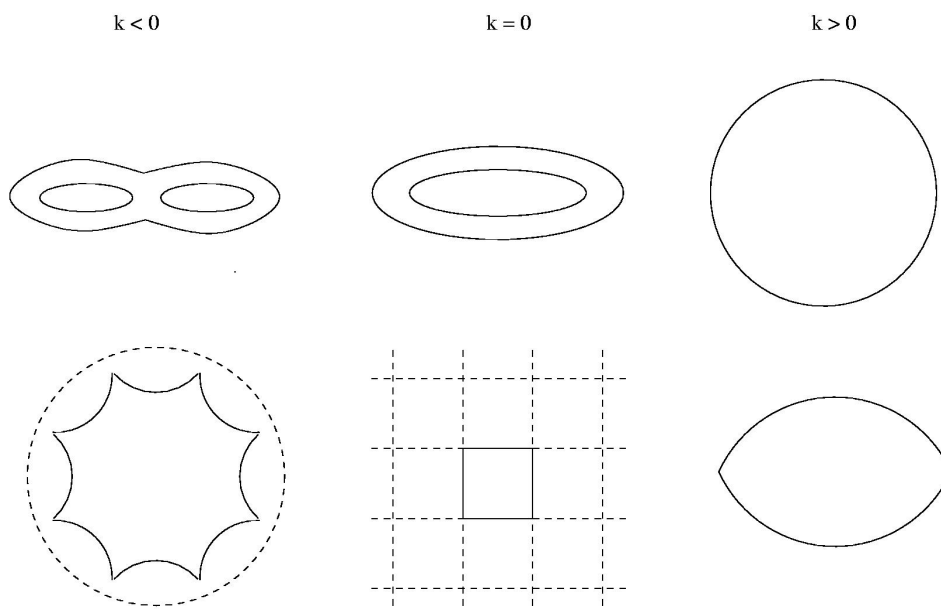
Rys. 7. Najprostsze przestrzenne formy geometrii hiperbolicznej zyskujemy wycinając z torusa otwór reprezentowany przez pętlę k .



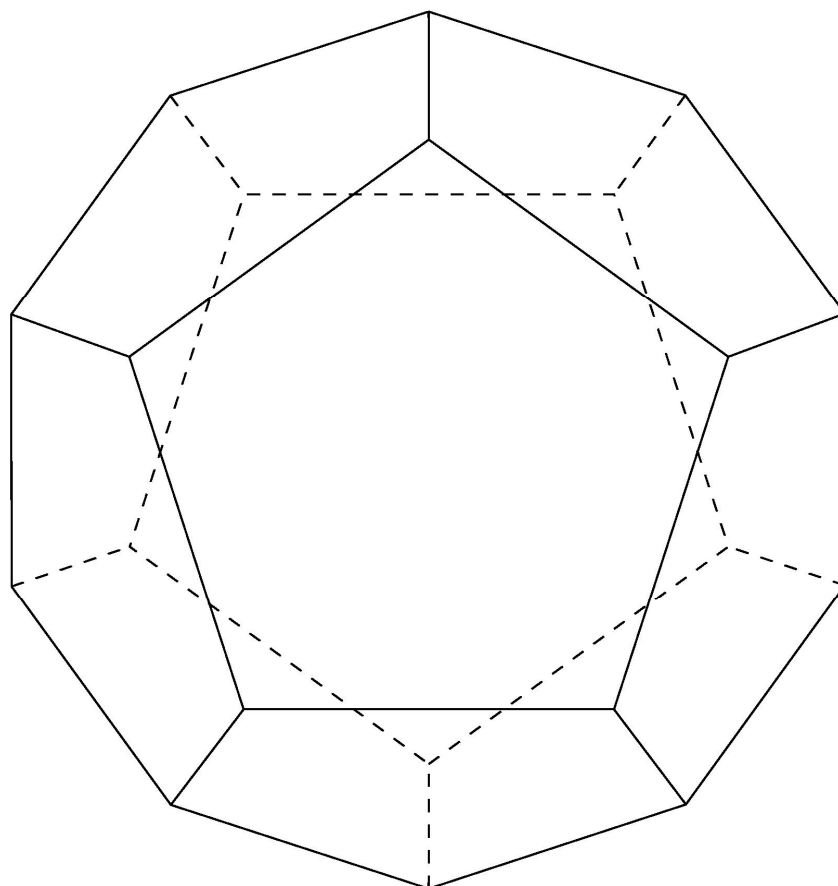
Rys. 8. Rozrywając pętlę k w punkcie P po odpowiednich deformacjach figurę tę możemy przekształcić do postaci pięciokąta. I odwrotnie klejąc boki tego pięciokąta w sposób pokazany na rysunku i pozostawiając swobodny bok k na brzeg otrzymamy rączkę.



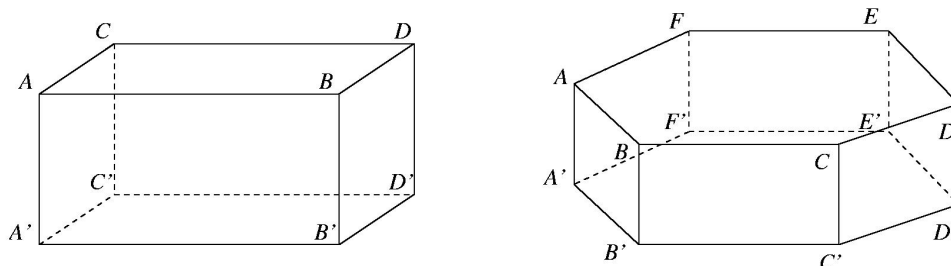
Rys. 9. Hantlę otrzymamy klejąc dwie rączki wzdłuż brzegu c .



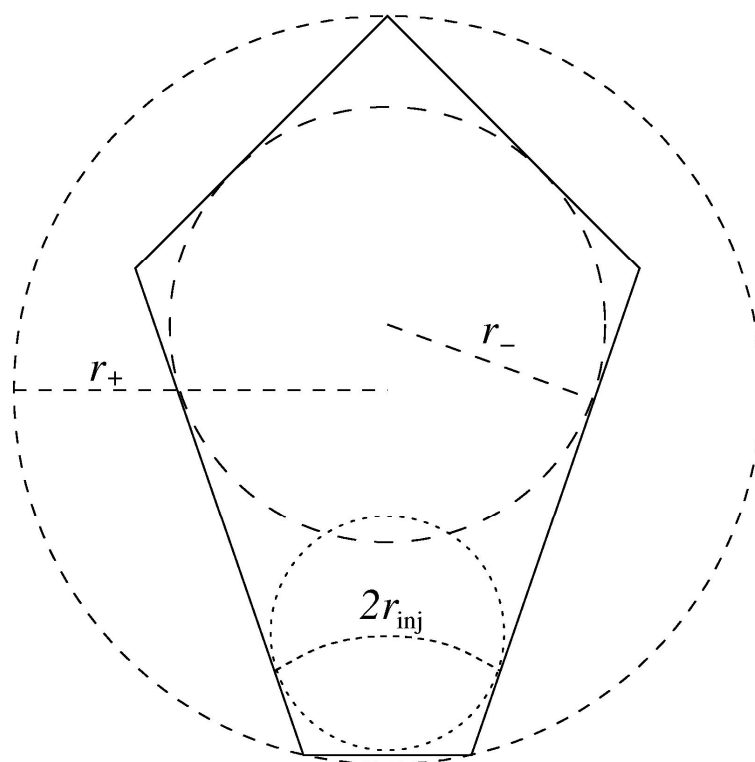
Rys. 10. Uniwersalne przestrzenie nakrywające dla trzech różnych zamkniętych powierzchni o stałej krzywiznie.



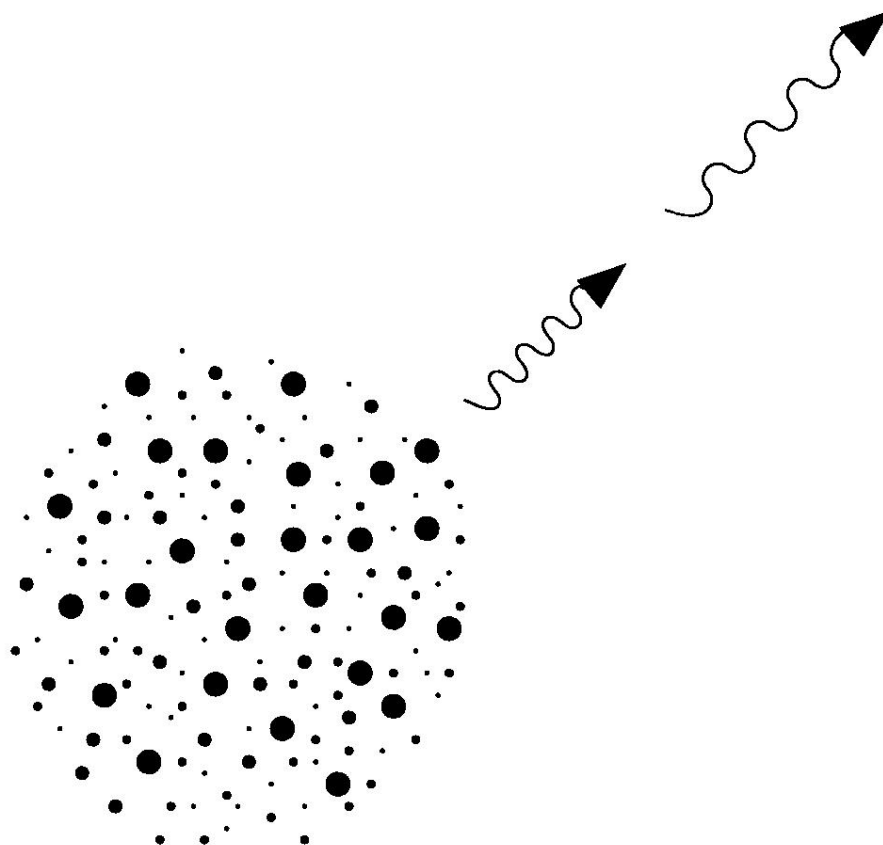
Rys. 11. Obszar fundamentalny przestrzeni sferycznej Poincarégo. Jest to dwunastościan, którego ściany są pięciokątem foremnym. Zwartą przestrzeń uzyskujemy przez identyfikację przeciwległych ścian po ich obrocie zgodnie ruchem wskazówek zegara o $1/10$ część pełnego obrotu wokół osi ortogonalnej do ściany. Aby uzyskać odpowiednią konfigurację należy wykonać 120 odpowiednich operacji, co może świadczyć o stopniu złożoności tej wielospójnej topologii geometrii sferycznej.



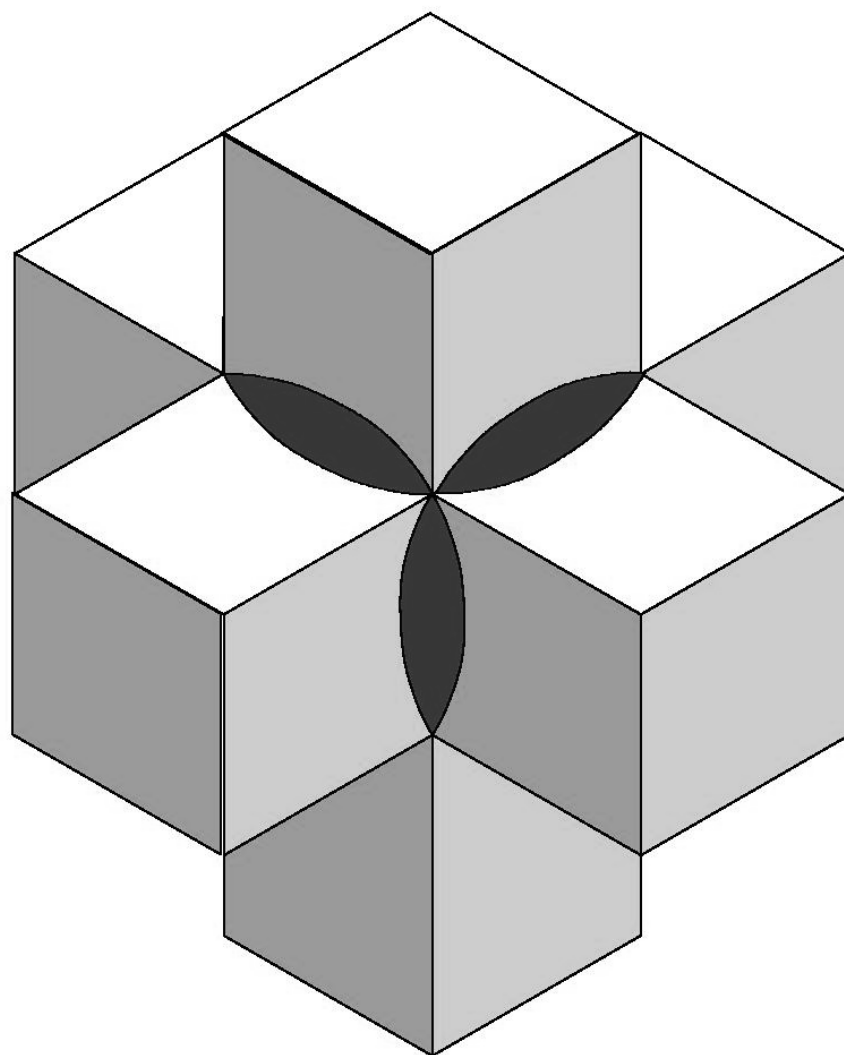
Rys. 12. Zwarte modele trójwymiarowych euklidesowych form przestrzennych najprościej jest pokazać przez utożsamienie odpowiednich ścian wielościanu tworzących tessalację \mathbb{R}^3 . Na rysunku pokazano najprostszy trójtorusa, ale w ogólności mamy 18 różnych typów z czego 17 to przypadki wielospójne odkryte przez Fedorowa. Osiem form są przestrzeniami otwartymi (niezwartymi), a dziesięć to przestrzenie zamknięte (zwarte).



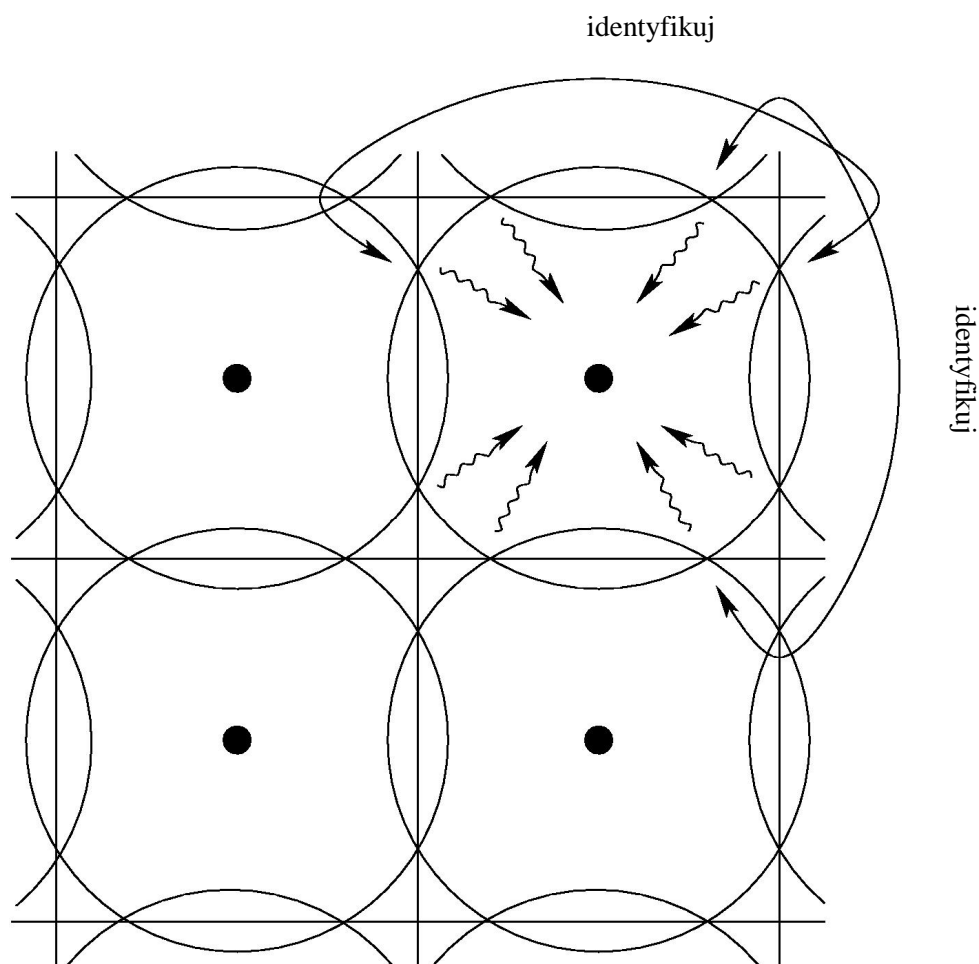
Rys. 13. Charakterystyczne parametry wielościanu fundamentalnego.



Rys. 14. Ilustracja efektu Sachs-Wolfe'a.



Rys. 15. Trójtorus (dwutorus) i uniwersalna przestrzeń nakrywająca.



Rys. 16. Ilustracja idei Neila Cornisha poszukiwania kąt wielkich dla rekonstrukcji topologicznej struktury przestrzeni fizycznej. Koła są samoprzecięciami na powierzchni ostatniego rozproszenia. Liczba odpowiadających sobie par kąty między ich środkami zależą od geometrii i topologii. Każda para leży na odpowiadających sobie ścianach wielościanu fundamentalnego.

LITERATURA

- [1] D. G. Christopherson, Q. J. Math. (Oxford Ser.). 11:63, 1940.
- [2] M. Kac, Am. Math. Monthly, 73:1, 1966.
- [3] J.-P. Luminet, B. F. Roukema, *Theoretical and Observational Cosmology*, ed. by M. Lachièze-Rey, Dordrecht: Kluwer 1999.
- [4] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 1989.
- [5] K. Schwarzschild, Vierteljahrschrift der Ast. Ges. 35:67, 1900.
- [6] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three Manifolds*, Princeton: Princeton University Press 1979.
- [7] A. M. Turing, Philos. Trans. R. Soc. London. B237:37, 1952.

THE RELICT RADIATION
AS A SIGNATURE OF TOPOLOGY FOR UNIVERSE

Summary

We consider the problem of possible topology for our Universe. It is shown that due to algebraic topology we can strictly define the shape of physical space whereas observations of anisotropy of microwave background radiation gives us an answer to the question whether our Universe is finite or not?

Summarized by Authors

Słowa kluczowe: promieniowanie mikrofalowe tła, topologia kosmiczna, kształt przestrzeni.

Key words: microwave background radiation, cosmic topology, shape of space.