ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LIII, numer 2 – 2005

LECH GRUSZECKI

O INDUKCJI NIEZUPEŁNEJ W MATEMATYCE

Rola indukcji w metodologii nauk jest obecnie często kwestionowana. Wątpliwości przy tym budzi nie tylko jej rzeczywisty zakres i znaczenie dla postępu wiedzy naukowej, problematyczna wydaje się sama definicja tego pojęcia. Kontrowersje związane z indukcją mają z reguły zasięg ograniczony do nauk przyrodniczych. To fizyka, chemia czy biologia dostarczają na ogół argumentów adwersarzom w sporze o indukcję[1].

Celem tego artykułu jest spojrzenie na zagadnienie indukcji z nieco innego punktu widzenia, a mianowicie z perspektywy historii matematyki. Matematyka to nauka, dla której standardem jest, oczywiście, dedukcyjna metoda uzasadniania wiedzy. Tak jest obecnie, a i w przeszłości, mimo braku ścisłych definicji dowodu i wynikania logicznego, które z satysfakcjonującą dokładnością zostały sformułowane dopiero w pierwszej połowie XX wieku[2], matematyka uznawana była za naukę, posiadającą odrębną w stosunku

---

Dr LECH GRUSZECKI – Katedra Analizy Zespolonej w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym KUL; adres do korespondencji: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin; e-mail: lech.gruszecki@vp.pl

[1] Informacje na temat indukcji zawierają np. następujące prace: J. M. B o c h e ń s k i, *Współczesne metody myślenia*, Poznań 1992, s. 102-136; Z. H a j d u k, *O akceptacji teorii empirycznej*, Lublin 1983; K. S z a n i a w s k i, *Współczesne ujęcie procedur indukcyjnych*, „Zagadnienia Naukoznawstwa” 1965, nr 2-3, s. 26-44; J. W o l e ń s k i, *O indukcji i indukcjonizmie*, „Studia Filozoficzne” 1985, nr 8-9 (237-238), s. 67-80; I. L a k a t o s, *Changes in the Problem of Inductive Logic*, [w:] *The Problem of Inductive Logic*, Amsterdam 1968, s. 315-417.

[2] Proces uściślania podstaw matematyki, w szczególności analizy matematycznej, rozpoczął się znacznie wcześniej, bo wraz z *Course d’analise* A. Cauchy’ego z 1821 r., i był kontynuowany zwłaszcza przez szkołę Weierstrassa. Powstanie teorii mnogości, będące zasługą, przede wszystkim G. Cantora i R. Dedekinda oraz klasycznego rachunku predykatów stworzonego przez G. Fregego pozwoliło na dalszą precyzację pojęć matematyki. Za decydujące dla współczesnej matematyki należy jednak uznać wyodrębnienie z języka naturalnego formalnego języka

do nauk empirycznych metodę. Czy jednak zawsze matematycy w swoich badaniach posługiwali się tylko dedukcją, stosowaną z większą lub mniejszą precyzją w zależności od epoki historycznej i indywidualnego autora? Czy w szczególności stosowali oni także rozumowania o charakterze indukcyjnym (w sensie indukcji niezupełnej)? Postaram się wykazać, że tak właśnie było, i – co więcej – przedstawić argumenty na poparcie tezy, że indukcja odegrała istotną rolę w pewnych okresach rozwoju matematyki. Najlepszym sposobem uzasadnienia tego poglądu jest, jak sądzę, prezentacja odpowiednich przykładów zaczerpniętych z historii.

Analiza epizodów z historii matematyki pozwala na bliższe przyjrzenie się istotnym cechom procedur indukcyjnych w obszarze matematyki i zarazem umożliwia uzyskanie, przynajmniej częściowego, wyjaśnienia skuteczności wielu rozumowań indukcyjnych.

1. KRÓTKO O HISTORYCZNYM TLE SPORU WOKÓŁ INDUKCJI

Ponieważ kontrowersje związane z indukcją dotyczyły przede wszystkim nauk empirycznych, na początku więc, tytułem wprowadzenia, przypominam tę problematykę.

Jak wiadomo, najsilniejszy w XX wieku atak na indukcję jako na metodę zdobywania wiedzy prawomocnej został przeprowadzony przez K. Poppera[3]. Obok krytyki indukcji, analogicznej do tej, jaką sformułował dwa wieki wcześniej D. Hume, a mianowicie dotyczącej braku dostatecznych podstaw do wyprowadzenia zdań zawierających kwantyfikację uniwersalną ze zdań opisujących skończoną liczbę obserwacji, Popper dodał nowy zarzut. Wymierzony on był w szczególności w logicznych empirystów, którzy metodzie indukcyjnej przypisywali kluczowe znaczenie, jako „mechanizmowi" umoż-

---

matematyki ze ściśle określonym pojęciem dowodu formalnego. W sposób satysfakcjonujący wynikanie logiczne zdefiniował A. Tarski w 1936 r.

[3] Por. np. K. R. P o p p e r, *Logika odkrycia naukowego*, tł. U. Niklas, Warszawa 2002, s. 21-24; na temat filozofii nauki Poppera można znaleźć wiadomości np. w: A. C h m i e l e w s k i, *Filozofia Poppera. Analiza krytyczna*, Wrocław 1995; Z. H a j d u k, *Metodologia nauk przyrodniczych*, Lublin 2002, s.71-86, s. 101-132; W. S a d y, *Spór o racjonalność naukową od Poincarégo do Laudana*, Wrocław 2000; s. 154-186; J. Ż y c i ń s k i, *Elementy filozofii nauki*, Tarnów 1996, s. 101-132.

liwiającemu przejście od zdań protokolarnych, opisujących nieuwikłane teoretycznie dane doświadczenia, do ogólnych praw nauki. Popper zauważył, niewątpliwie słusznie, iż zdania protokolarne wykorzystują terminy o charakterze teoretycznym, a tym samym nie mogą być uznane za bezpieczny fundament wiedzy empirycznej, nieskażonej żadnymi, formułowanymi *a priori* w stosunku do doświadczenia, postulatami rozumu. Zdania protokolarne są, jak pisał Popper, przesiąknięte teorią (*theory-soaked*)[4].

Przedstawione wyżej uwagi twórcy racjonalizmu krytycznego wydają się merytorycznie zasadne. Jednakże nie jest wcale oczywiste, w jakiej mierze dotyczyły one rzeczywistych poglądów empirystów logicznych. Zarówno bowiem Schlick, jak i Neurath oraz Carnap zdawali sobie dość dobrze sprawę z tego, iż zdań protokolarnych empirycznie dowieść się nie da (dowieść można jedynie niewyrażalnych konstatacji, które z racji swego niejęzykowego charakteru nie mogą być właściwym budulcem nauki). Zdania protokolarne są więc w istocie, jak zauważali Schlick i Feigel, jedynie hipotezami.

Także poglądy większości empirystów logicznych na status indukcji w budowaniu wiedzy naukowej, były o wiele subtelniejsze, niż to sugerował Popper. Jak pisał Schlick: „Indukcja jest jedynie metodycznie kierowanym procesem zgadywania, procesem psychologicznym i biologicznym, którego pojmowanie nie ma z pewnością nic wspólnego z logiką"[5]. Z podobnymi uwagami na temat indukcji występował także Feigel. Jedynie Carnap, nie zważając na krytyczne uwagi Poppera, a później także ignorując Quine'owską krytykę rozróżnienia na to, co empiryczne, i na to, co analityczne, zdecydował się na budowę logiki indukcyjnego potwierdzania teorii i hipotez przez zdania bazowe. Kolejne wersje teorii Carnapa zostały poddane krytyce jako nieadekwatnie przedstawiające rozwój nauki. Do koncepcji Carnapa odwoływali się później liczni filozofowie nauki, m.in. H. Kyburg i J. Hintikka[6]. Wszystkie te wersje logiki indukcji w niewielkim tylko stopniu przystają do praktyki uczonych, odnoszą się bowiem do wyidealizowanych procesów zdobywania wiedzy.

Falsyfikacjonizm Poppera miał stanowić konkurencję wobec indukcjonizmu. Zdaniem Poppera nauka rozwija się dzięki śmiałym przypuszczeniom, które następnie poddawane są surowym sprawdzianom poprzez konfronto-

[4] C h m i e l e w s k i, dz. cyt., s. 49.

[5] Tamże, s. 116.

[6] Z. H a j d u k, *O akceptacji teorii empirycznej*, Lublin 2002, s. 74-104, 168-181; S a d y, dz. cyt., s. 118-123.

wanie zdań bazowych, wynikających logicznie z tworzonych teorii, z rzeczywistością. Można więc powiedzieć, że Popper przyznawał twórczej wyobraźni uczonych większe znaczenie niż przedstawiciele Koła Wiedeńskiego, którzy wydawali się optować za mozolnym gromadzeniem wiedzy o faktach, a następnie indukcyjnym uogólnianiem tejże wiedzy, by na końcu otrzymać prawa przyrody. Położenie przez Poppera akcentu na rolę wyobraźni w procesie budowania nauki wykluczało możliwość skonstruowania jakiejkolwiek logiki formalnej odkrycia naukowego, zarówno logiki dedukcyjnej, jak indukcyjnej.

Czy krytyka indukcji dokonana przez Poppera jest w pełni zasadna i czy istotnie posługiwanie się wyobraźnią przez uczonych całkowicie wyklucza indukcję? Odpowiedź na powyższe pytania zależy, oczywiście, od tego, jak się rozumie metodę indukcyjną. Z pewnością wszelkie próby tworzenia systemu logiki indukcyjnej, jak to czynił Carnap i jego następcy, są ryzykowne, gdyż zawsze można wskazać rozumowania, które wykraczają poza ramy konstruowanego systemu. Z drugiej strony nie można oprzeć się dość powszechnemu przekonaniu o ważnej roli rozumowań rozszerzających, prowadzących od zdań jednostkowych do uniwersalnych. Jak dobrze wiadomo, sam Popper nie uniknął pewnych niejawnych odwołań do zasady indukcji w związku z wprowadzonymi przez siebie koncepcjami potwierdzenia teorii oraz prawdoupodobnienia.

I. Lakatos, najbardziej oryginalny z uczniów Poppera, poczynił szereg głębszych uwag na temat roli pojęcia indukcji w epistemologii i metafizyce. Zdaniem Lakatosa jest ona niezbędnym elementem każdej racjonalnej filozofii nauki jako pewna syntetyczna zasada nadrzędna, chroniąca przed popadnięciem w radykalny sceptycyzm[7]. Zasady indukcji bronili również M. Black i H. Putnam, wskazując na jej pragmatyczne znaczenie w metodologii nauk empirycznych[8]. Przy antyindukcjonizmie pozostaje natomiast najwybitniejszy i najbardziej ortodoksyjny kontynuator myśli Poppera, J. Watkins[9].

---

[7] Pogląd taki przedstawia Lakatos w wymienionej już pracy *Changes in the Problem of Inductive Logic*, [w:] *The Problem of Inductive Logic*, Amsterdam 1968.

[8] Por. M. B l a c k, *Self-Supporting Inductive Arguments* w: *The Philosophy of Science*, ed. P. H. Nidditch, Oxford 1968, s. 136-143; H. P u t n a m, *The "Corroboration" Theories*, [w:] *Philosophy as It Is*, eds. T. Honderich, M. Burnyeat, Harmondsworth 1979. Omówienie poglądów Putnama na temat indukcji ma znaleźć także w: C h m i e l e w s k i, dz. cyt., s. 120-127.

[9] Por. J. W. N. W a t k i n s, *Nauka i sceptycyzm*, tł. E. i A. Chmielewscy, Warszawa 1989.

Ostatnie dwie dekady XX wieku to okres wyciszenia sporów wokół indukcji. Ma to związek zarówno z „wyczerpaniem amunicji” obu stron konfliktu, jak i wyłonieniem się nowych problemów angażujących filozofów nauki. Wśród tych problemów należy wymienić przede wszystkim kontrowersje związane z racjonalnością metody naukowej (lub – jak chcą niektórzy – brakiem takiej racjonalności) oraz dyskusje realistów z antyrealistami.

W filozofii i metodologii matematyki indukcjonizm był, czemu trudno się dziwić, powiązany zazwyczaj ze stanowiskiem empirystycznym. Lakatos w artykule *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* dokonuje przeglądu wybitnych matematyków i filozofów matematyki XX wieku, którzy opowiadali się za empirycznym pochodzeniem wiedzy matematycznej i indukcyjnym sposobem jej uzasadniania. Węgierski filozof powołuje się między innymi na poglądy Russella, Fraenkla, Gödla, Carnapa i Quine’a[10]. Do tej listy należałoby z pewnością dodać – nie wymienionego przez autora – G. Polyę, którego heurystyka matematyczna była dla Lakatosa jednym z głównych źródeł inspiracji w pracy nad doktoratem[11].

Sam Lakatos odrzucał indukcjonizm w obszarze nauk matematycznych (podobnie jak to czynił w stosunku do nauk empirycznych). Jego metodologia dowodzeń i obaleń, której dał wyraz w sławnym dziele *Proofs and Refutations*, zainspirowana była głównie poglądami Poppera na nauki empiryczne[12]. Lakatos kładł w niej nacisk na śmiałe racjonalne konstrukcje, które następnie winny być poddawane surowym sprawdzianom poprzez konfrontację z potencjalnymi kontrprzykładami wywodzącymi się z matematycznych teorii nieformalnych.

Lakatos nie wyjaśnił jednak, dlaczego pewne twierdzenia matematyki nieformalnej są powszechnie akceptowane, a ich status poznawczy jest tak wysoki, że mogą sfalsyfikować teorie formalne. Między potencjalnymi falsyfikatorami matematycznych teorii formalnych a zdaniami bazowymi, które mogą sfalsyfikować teorie empiryczne, istnieje podobieństwo, ale też zachodzą różnice, albowiem, czego Lakatos nie wykluczał, u podstaw matematycz-

---

[10] I. L a k a t o s, *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*, [w:] t e n ż e, *Philosophical Papers*, t. 2: *Mathematics, Science and Epistemology*, eds. J. Worrall, G. Currie, Cambridge 1978, s. 24-42.

[11] Por. G. P o l y a, *Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań*, tł. A. Góralski, Warszawa 1975.

[12] I. L a k a t o s, *Proofs and Refutations*, „The British Journal for the Philosophy of Science” 14 (1963-64), s. 1-25, 120-139, 221-245, 296-342.

nych teorii nieformalnych mogą leżeć nawet mocne założenia metafizyczne. Matematyka zatem, zdaniem węgierskiego filozofa, przypomina nauki empiryczne, a zarazem różni się od nich; jest, jak pisze, *quasi*-empiryczna.

Do poglądów Lakatosa nawiązuje H. Putnam w swoim artykule *What is mathematical truth?*[13]. W przeciwieństwie do Lakatosa Putnam uznaje istotną rolę rozumowań indukcyjnych w historii matematyki. Wśród prawd matematycznych, twierdzi Putnam, są prawdy epistemologicznie niekonieczne. Filozof podaje szereg przykładów na poparcie swojej tezy. Wymienia w tym kontekście, między innymi, koncepcję Kartezjusza liczb rzeczywistych, zgodnie z którą między liczbami a punktami na prostej istnieje wzajemnie-jednoznaczna odpowiedniość. Wspomina też o historii tworzenia ścisłych podstaw analizy matematycznej, dla której kluczowym pojęciem stało się, zdefiniowane poprawnie dopiero w XIX wieku, pojęcie granicy. Jednym z najnowszych przykładów *quasi*-empirycznego charakteru matematyki, jest zdaniem amerykańskiego filozofa, historia aksjomatu wyboru, zaproponowanego w 1908 r. przez E. Zermela. Według Putnama przykłady te ilustrują, w jaki sposób rozwija się matematyka. A dzieje się tak, iż matematycy, tworząc nowe teorie, operują dostępnymi im narzędziami, niejako poszerzając zakres ich użycia poza ustalone wcześniej ramy. Tym samym nowe teorie powstają zarazem dzięki wyobraźni twórczej uczonych, jak i indukcyjnemu przeniesieniu własności, zaakceptowanych już obiektów matematycznych, na nową dziedzinę matematyki.

O znaczeniu indukcji dla rozwoju wiedzy matematycznej przekonany jest również T. Koetsier, nawiązujący w swojej metodologii matematyki zarówno do Lakatosa, jak i Laudana, od którego przejmuje koncepcję tradycji badawczej[14]. Koetsier twierdzi, że indukcja niezupełna odgrywała istotną rolę zwłaszcza w niektórych okresach rozwoju matematyki. Przykładem indukcyjnej tradycji badawczej jest, zdaniem tego filozofa, tradycja formalistyczna XVIII stulecia, obejmująca swym zasięgiem głównie analizę matematyczną, stanowiącą najszybciej rozwijający się dział ówczesnej matematyki. Badania Koetsiera są o tyle interesujące, że poparte są dobrą znajomością historii.

Odwoływanie się do przykładów historycznych jest zresztą, od czasu Lakatosa, częste. O ile jednak rekonstrukcje Lakatosa są krytykowane jako nie-

[13] Por. H. P u t n a m, *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers*, vol. I, Cambridge 1975, s. 60-78.

[14] Por. T. K o e t s i e r, *Lakatos' Philosophy of Mathematics. A Historical Approach*, Amsterdam 1991.

adekwatne do rzeczywistego rozwoju wiedzy matematycznej, to ujęcie Koetsiera odznacza się wysokim profesjonalizmem. Na przykłady historyczne powołuje się także H. Putnam we wspomnianym już artykule; czynią to także inni znaczący filozofowie zajmujący się metodologią matematyki, m.in. G. Giorello i R. L. Wilder[15].

Przekonanie o znaczeniu wiedzy historycznej dla filozofii i metodologii matematyki jest podzielane także przez autora niniejszego artykułu. W dalszym ciągu postaram się przedstawić propozycję typologii rozumowań indukcyjnych, popartą przykładami z zakresu historii, a następnie sformułuję bardziej ogólne wnioski, dotyczące natury i prawomocności procesu rozumowania indukcyjnego w naukach matematycznych. Pominę przy tym całkowicie to, co Reichenbach nazywa kontekstem odkrycia, a zajmę się wyłącznie kontekstem uzasadniania wiedzy matematycznej. Z oczywistych powodów kontekst uzasadniania, mający swe odbicie w pracach publikowanych, znacznie łatwiej poddać analizie metodologicznej niż mgliste i często pozawerbalne doświadczenia uczonych, towarzyszące procesom mentalnym, w wyniku których dochodzą oni do poszukiwanych rozwiązań.

Wśród rozumowań indukcyjnych zawartych w kontekście uzasadniania także należy dokonać pewnego rozróżnienia. Otóż niektóre z tych rozumowań mają charakter świadomy; dzieje się tak wtedy, gdy matematycy są przekonani, że jakaś własność przenosi się w sposób oczywisty ze skończonego zbioru obiektów pewnego rodzaju na wszystkie obiekty tego rodzaju. Wtedy żmudny, a mało interesujący dowód, że tak właśnie jest, może być mocą decyzji uczonego pominięty. Ale spotkać się można w literaturze także z rozumowaniami, w których matematycy wyciągają wnioski indukcyjne bezwiednie, jako że ich wcześniejsze doświadczenie rachunkowe (a także, być może, doświadczenie w szerszym zakresie) nie wskazuje na żadne, kryjące się „pod powierzchnią" rozumowania, pułapki.

Na wspomniane rozróżnienie będę dalej zwracał uwagę, chociaż podstawą do typologii rozumowań indukcyjnych, którą chciałbym przedstawić, jest rola tychże rozumowań w konstruowaniu systemów dedukcyjnych obejmujących różne działy matematyki. Należy bowiem zauważyć, że jakkolwiek matematyka rozwija się poprzez dyskusję między uczonymi, w której toku formują się pojęcia i metody, to jednak ostatecznie, w wersji pod-

[15] Por. G. Giorello, *Archimedes and the Methodology of Research Programmes*, „Scientia" 110 (1975), s. 125-135; R. L. Wilder, *Mathematics As a Cultural System*, Oxford 1981.

ręcznikowej, przyjmuje ona kształt systemu dedukcyjnego z aksjomatami, pojęciami pierwotnymi i regułami inferencji.

2. RODZAJE ROZUMOWAŃ INDUKCYJNYCH W MATEMATYCE

W dalszym ciągu zwrócę uwagę na następujące typy indukcji, z którymi spotykamy się w historii matematyki:

I_1) indukcja prowadząca do sformułowania aksjomatów różnych teorii matematycznych,
I_2) indukcja enumeracyjna, wiodąca ku poszczególnym twierdzeniom na podstawie „świadectwa" skończonej liczby przypadków,
I_3) indukcja dotycząca zakresu stosowania symboli matematycznych,
I_4) indukcja przenosząca własności przedmiotów skończonych (np. liczb, zbiorów, działań) na przypadek nieskończony,
I_5) indukcja wskazująca na analogie między zagadnieniami należącymi do różnych obszarów matematyki.

Wymienione rodzaje indukcji występują niejednokrotnie w połączeniu z innymi metodami rozumowania. Gwoli przykładu aksjomaty geometrii Euklidesowej są wynikiem zarówno indukcyjnych uogólnień, jak i procesów idealizacyjnych. Koncepcja bezwymiarowego punktu oraz prostej jako „pozbawionej szerokości" są wynikiem idealizacji, lecz już sławny piąty postulat Euklidesa, stwierdzający, że *jeżeli prosta przecinając dwie proste tworzy z nimi po jednej stronie kąty wewnętrzne o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przedłużane nieograniczenie przecinają się po tej stronie, po której znajdują się owe kąty o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych*[16] , ma charakter uogólnienia indukcyjnego.

Zdarza się również, że wymienione typy indukcji występują łącznie. Przykładem może być chociażby aksjomatyczna teoria mnogości Zermela z 1908 r. Jeśli przyjrzymy się, powiedzmy, aksjomatowi sumy, to zauważymy przeniesienie własności zbiorów skończonych na zbiory nieskończone. Mamy tu więc do czynienia zarówno z indukcją I_1 jak i I_2. Podobnie rzecz się

[16] T. B a t ó g, *Dwa paradygmaty matematyki. Studium z dziejów i filozofii matematyki*, Poznań 1996, s. 15.

ma z pozostałymi aksjomatami, jakkolwiek bezkrytyczne przeniesienie indukcyjne własności zbiorów skończonych na zbiory nieskończone może prowadzić do paradoksów (czego znanym przykładem jest aksjomat wyboru) lub sprzeczności (np. aksjomat abstrakcji Fregego, jako prowadzący do zbyt dużych zbiorów, został przez Zermela zastąpiony aksjomatem wyróżniania)[17].

Odróżnienie poszczególnych rodzajów indukcji wydaje się jednak zasadne, jako że indukcje $I_1 - I_5$ mają odmienną strukturę oraz, co można wykazać badając materiał historyczny, występują także oddzielnie.

Zatrzymam się teraz nieco dłużej przy poszczególnych typach indukcji.

Indukcja I_1 ma bardzo szczególny charakter. Zdania jednostkowe, które są generalizowane w tym przypadku, wyprzedzają niejako całą teorię. Często jest tak, iż uogólnieniom indukcyjnym podlegają jeszcze nie spostrzeżenia odnoszące się do zdefiniowanych już pojęć teoretycznych, lecz pewne, nieoszlifowane teoretycznie, dane percepcji. Z taką sytuacją mamy do czynienia w (przywołanym już) przykładzie geometrii *Elementów*, ale także na przykład w podstawach teorii prawdopodobieństwa czy w abstrakcyjnej teorii zbiorów.

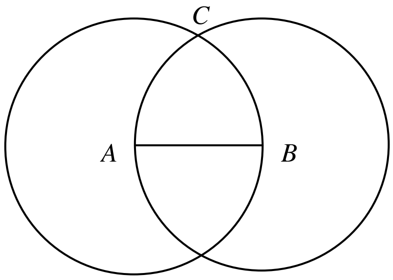
To, że aksjomaty formułowane są na bazie (oczywiście między innymi) indukcji, zauważamy zwłaszcza, gdy rozumowania dedukcyjne, bazujące na tych aksjomatach, zawierają luki. Ilustracją tego są liczne twierdzenia *Elementów*; już pierwsze twierdzenie, zgodnie z którym na dowolnym odcinku można, korzystając jedynie z cyrkla i linijki, zbudować trójkąt równoboczny, ma tego rodzaju braki[18]. W dowodzie tego twierdzenia przyjmuje się mianowicie jako rzecz oczywistą, że dwa okręgi o środkach odpowiednio w punktach A i B oraz o promieniu $r = |AB|$ przetną się w pewnym punkcie C. Rzeczywiście, rysunek zdaje się upoważniać do takiego stwierdzenia. Jednak z żadnego z postulatów nie wynika istnienie punktu C wspólnego obu

---

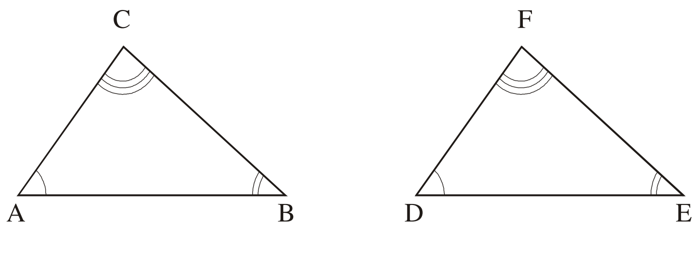
[17] Aksjomat wyboru stwierdza, że dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych istnieje zbiór utworzony poprzez wybór dokładnie po jednym elemencie z każdego zbioru tej rodziny. Aksjomat ten ma charakter niekonstruktywny, tzn. nie wskazuje na sposób, w jaki ów zbiór mógłby być zbudowany. Zarazem aksjomat ten prowadzi do paradoksów, por. L. Gruszecki, *Teoremat Banacha-Tarskiego*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 23 (1999), s. 129-132. Aksjomat abstrakcji Fregego głosi, że dla dowolnej funkcji zdaniowej f istnieje zbiór $\{x: f(x)\}$. Aksjomat ten prowadził do rozpatrywania zbyt dużych zbiorów, co z kolei wiodło ku sprzecznościom. Aksjomat wyróżniania Zermela stwierdza, iż za pomocą funkcji zdaniowej f można tworzyć jedynie podzbiory już istniejących zbiorów, tzn. dla funkcji zdaniowej f i dowolnego zbioru A istnieje zbiór $\{x \in A: f(x)\}$.

[18] Por. Batóg, dz. cyt., s. 19.

okręgom! Błąd Euklidesa wynika z nieświadomego przeniesienia indukcyjnego własności posiadanych przez pewien model geometrii w dziedzinę pojęć abstrakcyjnych ujętych w system dedukcyjny.



Podobne nieścisłości zawiera również teoria przystawania figur przedstawiona w *Elementach*. W aksjomacie czwartym Euklides stwierdza, że figury wzajemnie przystające (tzn. dające się na siebie nałożyć) są równe, co należy odczytywać w ten sposób, że relacja przystawania – mówiąc językiem współczesnym – jest relacją równoważności. Nigdzie jednak Euklides nie pisze, że figury równe są przystające, chociaż milcząco z własności tej korzysta. Na przykład dzieje się tak w dowodzie twierdzenia czwartego I księgi, zgodnie z którym, jeśli w dwu trójkątach ABC i DEF równe są kąty A i D, a także równe są boki AC i DF oraz AB i DE, to równe są i oba trójkąty.



Brak ścisłości w kwestii przystawania figur może wynikać z faktu, iż Euklides, w ślad za poprzedzającą go tradycją geometrii greckiej, uznał, że dwie równe figury można zawsze nałożyć na siebie. Sprawa jednak nie jest taka prosta. Wiemy obecnie, że ruch figury może wpływać na jej odkształcenie.

Autor *Elementów* tego wiedzieć nie mógł, albowiem jego doświadczenie w zakresie operowania rysunkowymi modelami figur nie wskazywało na to, że przestrzeń może nie być jednostajna w tym sensie, że jej własności mogą zależeć od miejsca oraz od rozmiarów obiektów geometrycznych. Tak więc przekonanie Euklidesa, że figury równe można doprowadzić do przystawania, ma charakter indukcyjnego uogólnienia.

Innym ważnym działem matematyki, którego podstawowe pojęcia powstają przy udziale indukcji typu I_1, jest, oczywiście, rachunek prawdopodobieństwa. Teoria ta jest w sposób paradygmatyczny związana z koncepcją indukcji. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa, z której pierwszym rudymentarnym sformułowaniem można zetknąć się już w *Ars conjectandi* (1713) Jakuba Bernoulliego, prowadzi do ogólnego schematu opartego na analizie jedynie skończonej liczby przypadków. Był to zresztą główny zarzut Leibniza przeciw teorii Bernoulliego, sformułowany przez twórcę rachunku różniczkowego i całkowego w korespondencji z Bernoullim, jaka miała miejsce w latach 1703-1705. Znakomity filozof powątpiewał w swoich listach w możliwość ilościowej oceny prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia empirycznego na podstawie tylko skończonej liczby obserwacji. Argumentację Leibniza można potraktować jako jeden z pierwszych ataków na prawomocność rozumowań indukcyjnych (zwłaszcza, jeśli są one połączone z oceną ilościową)[19].

Indukcja I_2 ma odmienny charakter od indukcji I_1, albowiem w przypadku I_2 spotykamy się z rozumowaniami enumerycznymi, które odbywają się niejako wewnątrz systemu. Indukcję enumeracyjną wykorzystywali niezwykle często matematycy XVII i XVIII wieku z racji bardzo skomplikowanych rachunków, które wtedy przeprowadzano w ramach powstającej analizy matematycznej. Przykłady jej stosowania znajdujemy w pracach wielu matematyków a wśród nich Wallisa, Leibniza, Eulera. W *Analizie nieskończoności* Wallis wielokrotnie wykorzystuje indukcję. Czyni to między innymi przy obliczaniu całki postaci

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1},$$

gdzie p jest dowolną liczbą wymierną różną od –1. Już dowód powyższego wzoru dla p naturalnych pozostawia, z dzisiejszego punktu widzenia, wiele do życzenia; jednak przeniesienie wzoru na wymierne potęgi x to zdecydo-

[19] Por. D. Bobrowski, *O pewnych koncepcjach probabilistycznych Jakuba Bernoulliego*, [w:] *Probabilistyka i mechanika w szkicach historycznych. Materiały z V Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki*, cz. I, red. S. Fudali, Szczecin 1992, s. 8.

wanie wynik indukcji niezupełnej I_2[20]. Podobnego braku ścisłości brak również fundamentalnej pracy Leibniza *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* z 1684 r., w której matematyk wprowadza podstawowe pojęcia rachunku różniczkowego. Tytuł pracy zapewnia czytelnika, że wspomniana metoda może być stosowana także w przypadku funkcji wymiernych i niewymiernych. Dowodu tego faktu jednak brakuje i wolno przypuszczać, iż Leibniz, posiadający już spore doświadczenie rachunkowe, uogólnił indukcyjnie swoje wcześniejsze spostrzeżenia na przypadek tak szerokiej klasy funkcji[21]. Również najznakomitszy matematyk XVIII wieku, Leonard Euler, wielokrotnie posługiwał się rozumowaniami indukcyjnymi. Na przykład w swoich *Institutiones calculi differentialis* z 1755 r. Euler wykazuje następujące prawa różniczkowania

$$d(pq) = pdq + qdp \quad \text{oraz} \quad d\frac{p}{q} = \frac{qdp - pdq}{q^2}$$

jedynie dla kilku szczególnych przypadków funkcji, by następnie zauważyć, że są one prawdziwe dla dowolnych funkcji wymiernych[22]. Tego rodzaju przykładów jest dużo w pracach Eulera i jemu współczesnych. Oczywiście indukcja I_2, jako najprostsza do zidentyfikowania i zakwestionowania, została z czasem niemal zupełnie wyeliminowana z matematyki. Przełomu w tym względzie dokonano w XIX wieku. Główne zasługi na polu uściślania pojęć i technik dowodowych analizy położyli, jak wiadomo, A. Cauchy, B. Bolzano oraz K. Weierstrass i jego szkoła.

Indukcja typu I_3 ma odmienny charakter od obu poprzednio przedstawionych rodzajów indukcji. Nie tworzy ona bezpośrednio fundamentów pojęciowych systemu ani też nie dokonuje się wewnątrz systemu. Raczej, wychodząc od pewnych ugruntowanych już pojęć i związanych z nimi technik operowania symbolami, dokonuje, poprzez rozszerzenie zakresu stosowalności tych symboli, także zmian w sferze pojęciowej. Te zmiany bywają zresztą początkowo przez matematyków ignorowane, jeśli tylko mechanizm rachunkowy jest skuteczny.

---

[20] A. P. J u s z k i e w i c z (red.), *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, t. 2, przeł. S. Dobrzycki, Warszawa 1976, s. 197-200.

[21] Tamże, s. 279-284.

[22] Por. T. K o e t s i e r, *Lakatos' Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1991, s. 205.

Klasycznym przykładem stosowania tego typu indukcji jest rozszerzenie zakresu pierwiastkowania na liczby ujemne, będące dziełem algebraików włoskich XVI wieku. Rozszerzenie to okazało się po prostu użyteczne. Na wielkościach postaci $\sqrt{a},\ a<0,$ wykonywano operacje w sposób podobny do operacji na zaakceptowanych już wielkościach rzeczywistych. Bezpośredni impuls do wprowadzenia nowych liczb dała teoria równania trzeciego stopnia, a dokładnie tzw. wzory Cardana zawarte w *Ars magna, sive de regulis algebraicis liber unus* (1545). Zgodnie z tymi wzorami równanie $x^3+px+q=0$ ma, przy założeniu, że $w=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0,$ jeden pierwiastek rzeczywisty

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{w}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{w}}.$$

Problem pojawia się, gdy w jest mniejsze od zera. Jak nietrudno zauważyć, równanie $x^3-15x-4=0$ posiada pierwiastek rzeczywisty $x=4.$ Jeśliby więc wzory Cardana rozciągały się i na ten przypadek, to zachodziłaby równość

$$4=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Cardano odrzucił jednak możliwość wyciągania pierwiastka z liczby ujemnej. Uczynił to jednak wkrótce Bombelli w dziele *L'Algebra*, przyznając zarazem, że początkowo uważał „wzór ten za czysto formalny i nie mający realnego znaczenia”[23].

Mamy tu więc do czynienia z indukcyjnym rozszerzeniem symboliki arytmetyczno-algebraicznej. Ponieważ rozszerzenie to okazało się owocne, więc z upływem czasu zaczęto mówić o liczbach niemożliwych (*impossibles*) lub urojonych (*imaginaires*); ścisła teoria obejmująca te liczby pojawiła się dopiero w XIX wieku dzięki Hamiltonowi[24].

Ważnym przykładem indukcji, związanej zresztą zarówno ze schematem I_3 jak też I_4, jest tzw. zasada generalizacji algebry, którą posługiwano się bardzo często w XVIII wieku. Zasada ta stwierdzała, że własności działań na

---

[23] S. Kulczycki, *Opowieści z dziejów liczb*, Warszawa 1975, s. 48.

[24] Juszkiewicz, dz. cyt., s. 28, s. 41; M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York 1972, s. 775-776.

skończonej liczbie elementów można przenieść na dowolną liczbę elementów. Przykładem trudności może tu być słynny szereg Grandiego[25]

$$1-1+1-1+\ldots$$

Jaka jest jego suma? Wiele zależy od tego, jak rozstawimy nawiasy. Można to zrobić jak następuje

$$(1-1)+(1-1)+\ldots=0$$

lub

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1.$$

Problem polega na tym, że działanie dodawania dla nieskończonej ilości składników nie ma tych własności, co w przypadku skończenie wielu składników, w szczególności nie musi być łączne! Indukcyjne rozszerzenie zasięgu stosowania symbolu + może prowadzić do błędów. Sam Grandi w książce *Quadratura Circuli et Hyperbolae* (1703) znalazł sumę powyższego szeregu w jeszcze inny sposób. Skorzystał z równości

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots,$$

podstawiając w niej $x=1$, dzięki czemu uzyskał zależność

$$1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}.$$

Rozumowanie Grandiego jest, według obecnych standardów, niepoprawne, gdyż operuje on szeregiem potęgowym poza obszarem zbieżności, tzn. poza przedziałem $(-1;1)$. Formalistyczne rachunki na szeregach potęgo-

[25] Koetsier, dz. cyt., s. 212-214. Paradoksalne własności tego szeregu były, co warto przypomnieć, wykorzystywane w kontekście teologii. Mianowicie to, że w zależności od sposobu wykonywania obliczeń suma szeregu przyjmuje wartość zero lub inne wartości rzeczywiste, uznawano za argument na rzecz tezy głoszącej, że świat powstał „z niczego” w akcie stworzenia. Z dzisiejszego punktu widzenia rozumowanie takie należy ocenić jako nieuprawnioną analogię.

wych poza dziedzinami zbieżności tychże szeregów należały w wieku XVIII do normy ze względu na bezkrytyczne stosowanie wspomnianej już zasady generalizacji algebry.

Teoria nieskończonych szeregów liczbowych i funkcyjnych kryje jeszcze inne pułapki. Różniczkowanie lub całkowanie szeregu funkcyjnego wyraz po wyrazie może być poprawne, ale też może prowadzić do rezultatu fałszywego. Tak więc nie dla każdego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ prawdziwe są wzory

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

oraz

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)\,dx.$$

Jak później wykazał Weierstrass, niezbędne jest w tych przypadkach założenie jednostajnej zbieżności. To, że wiele wyników XVIII-wiecznych w zakresie operowania szeregami nieskończonymi jest prawdziwych, jest konsekwencją tego, że szeregami bardzo często operowano w dziedzinach, w których odpowiednie założenia są spełnione.

Wiek XIX konsekwentnie zmierzał do usunięcia tego typu rozumowań z analizy matematycznej. Wysokie standardy ścisłości, jakie są udziałem współczesnej matematyki, a które narodziły się właśnie w pierwszej połowie XIX wieku, mają ją zabezpieczać przed takimi błędami. Stale jednak pojawiają się w obszarze matematyki nowe obiekty matematyczne i jest to niejednokrotnie wynikiem indukcyjnego rozszerzenia symboliki poza wcześniej dopuszczalny zakres. Stosunkowo świeżym tego przykładem jest teoria dystrybucji, zapoczątkowana wprowadzeniem przez Diraca „dziwnej” funkcji, przyjmującej w początku układu współrzędnych wartość ∞, poza tym wszędzie równej zeru a także posiadającej tę własność, że całka z tej funkcji jest równa jeden. Można więc uznać, że nie do końca ścisłe, przekraczające ustalone normy, ale zarazem głęboko umotywowane rozumowania typu I_3 stanowią ważny składnik rozwoju matematyki.

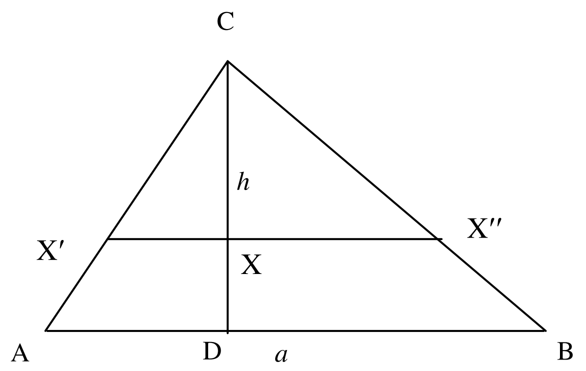
Indukcja I_4, jak już zauważyłem wcześniej, występuje często w powiązaniu z I_3. Jednakże w przypadku, gdy postuluje się istnienie obiektu aktualnie nieskończonego (np. zbioru lub liczby), mamy do czynienia z odrębnym typem indukcji, który warto wyróżnić z powodu znaczenia pojęcia nieskończoności dla epistemologii matematyki.

Symbol ∞ pochodzi od Johna Wallisa, który w swojej pracy *Arithmetica infinitorum* jako pierwszy z matematyków podjął próbę włączenia tego pojęcia do arytmetyki i analizy w sposób nadający mu pewne pozory ścisłości. Według Wallisa nieskończoność była liczbą następującą po wszystkich liczbach naturalnych. W rachunku stworzonym przez tego matematyka znak ∞ jest wykorzystywany tam, gdzie obecnie stosuje się, na ogół, pojęcie granicy, gdy wielkość zmienna rośnie nieograniczenie.

A oto bardzo szczególny przykład rozumowania Wallisa, które dotyczy stosunkowo elementarnego przypadku znajdowania pola trójkąta o podstawie *AB* i wysokości *CD*.

Pole trójkąta *ABC* jest równe „sumie” wszystkich odcinków $X'X''$ tego trójkąta równoległych do podstawy *AB*. „Liczba” takich odcinków wynosi ∞, podczas gdy „szerokość” każdego z odcinków jest równa CD/∞. Pole trójkąta może być zatem obliczone, przy zastosowaniu współczesnej symboliki, jak następuje

$$\sum_{X\in CD}\left(X'X''\cdot\frac{CD}{\infty}\right)=\frac{CD}{\infty}\sum_{X\in CD}X'X''=\frac{CD}{\infty}\cdot\frac{0+AB}{2}\cdot\infty=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD$$



W powyższych rachunkach suma wszystkich odcinków $X'X''$ została potraktowana jako suma szeregu arytmetycznego, o pierwszym wyrazie równym 0, a ostatnim wyrazie równym *AB*, posiadającym nieskończenie wiele składników.

Przedstawione rozumowanie wskazuje na to, że Wallis traktował ∞ i $\frac{CD}{\infty}$ jak liczby naturalne; zastosowanie wzoru na sumę szeregu arytmetycznego to oczywisty przykład indukcji.

Rozwój metod nieskończonościowych w XVII wieku, metod, które z czasem przeobraziły się w rachunek różniczkowy i całkowy, przy jednoczesnym braku ścisłych podstaw dla wykonywanych rachunków, sprawił, że pojawiło się wśród części matematyków zainteresowanie „arytmetyką nieskończoności". Próbował ja stworzyć Fontenelle, jednak jego podejście jest uznawane za zupełnie nieudane. Również inni matematycy w wieku XVIII, a nawet (w wyjątkowych przypadkach) w wieku XIX, posługiwali się symbolem ∞ lub ewentualnie innymi równoważnymi symbolami (Euler stosował początkowo literę „i") tak, jakby symbole te reprezentowały liczby, na których mogą być wykonywane pewne działania arytmetyczne. Rachunki te stanowiły próbę formalistycznego rozszerzenia arytmetyki liczb rzeczywistych na wielkości nieskończone z zachowaniem możliwie wielu własności arytmetyki wielkości skończonych.

Jak wiadomo, arytmetykę liczb pozaskończonych w zadowalającej logicznie postaci udało się stworzyć dopiero G. Cantorowi. Kierując się zasadami heurystycznymi, na które zwrócił uwagę J, Dadaczyński, a mianowicie m.in. tym, że: 1) koncepcja nieskończoności potencjalnej „odsyła" zawsze do związanej z nią koncepcji nieskończoności aktualnej oraz 2) zbiory nieskończone winny w możliwie największym stopniu odzwierciedlać własności zbiorów skończonych, Cantor zbudował teorię mnogości, której częścią właściwą jest właśnie arytmetyka liczb pozaskończonych. Na uwagę zasługuje przy tym fakt, że Cantor wykorzystał swoje wcześniejsze wyniki dotyczące pojęcia pochodnej zbioru. Inspirującą rolę odegrało zwłaszcza iterowanie operacji tworzenia pochodnych zbiorów, które matematyk z Halle nazywał zbiorami drugiego rodzaju[26].

[26] Por. J. Dadaczyński, *Matematyka w oczach filozofa*, Tarnów 2002, s. 117. Zauważmy zarazem, że pochodną zbioru A Cantor definiuje w zasadzie tak, jak się to czyni obecnie, jako zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A. Pochodna zbioru A jest oznaczona symbolem A'. W przypadku gdy $A' \neq \varnothing$ można rozważać pochodną rzędu drugiego A'' itd. Wszystkie zbiory liczbowe, jak zauważył Cantor, rozpadają się na dwie klasy. Do klasy pierwszej należą te zbiory, dla których $A^{(n)} = \varnothing$ dla pewnego n naturalnego i są to zbiory pierwszego rodzaju. Zbiory drugiego rodzaju mają tę własność, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ $A^{(n)} \neq \varnothing$. Dla zbiorów drugiego rodzaju możliwe jest zdefiniowanie pochodnej rzędu ∞ wzorem

$$A^{(\infty)} = \bigcap_{n \in N} A^{(n)}$$

Następnie można definiować kolejne pochodne rzędów $\infty + 1, \infty + 2, \ldots, \infty^2, \ldots, \infty^\infty$ itd.

Wspomniana wyżej druga zasada heurystyczna określana jest jako finityzm Cantorowski. Możemy ją uznać za mieszczącą się w schemacie indukcyjnym I_4. Konstrukcja liczb pozaskończonych, przedstawiona przez Cantora w *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, pracy z 1883 r., zawiera pewne elementy tego rodzaju indukcji[27]. Wśród tzw. zasad tworzenia liczb pozaskończonych są dwie, które wyraźnie nawiązują do własności liczb naturalnych. Jedna z tych zasad głosi, że zawsze można utworzyć liczbę o 1 większą od już istniejącej. A zatem, jeśli ω jest najmniejszą liczbą pozaskończoną, to kolejne liczby są równe:[28]

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots$$

Z kolei tzw. zasada hamowania albo ograniczania stwierdza, że każda liczba pozaskończona „przelicza" zbiór liczb naturalnych i pozaskończonych, które są niewiększe od tej liczby. Jest to własność przeniesiona ze zbioru liczb naturalnych, albowiem dowolna liczba naturalna n jest zarazem n-tym elementem ciągu 1, 2, …, n, …, jak również jest liczebnością zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Opisane rozumowania są poniekąd typowe. Gdy uczeni odwołują się do nieskończoności aktualnej i ujmują ją matematycznie, skazani są na to, że budowane przez nich pojęcie odtwarza w pewnym stopniu własności tych pojęć matematycznych, którymi już rozporządzają.

Indukcja I_5 opiera się na poszukiwaniu analogii między obiektami matematycznymi należącymi do różnych dziedzin matematyki. Jeśli analogia jest uchwycona właściwie, możliwe jest „przeniesienie" wyników z jednej dziedziny na drugą. Typowym przykładem takiej indukcji jest formułowanie twierdzeń stereometrycznych w oparciu o znane wcześniej wyniki dotyczące planimetrii.

Modelowym rozumowaniem tego rodzaju jest sławna wypowiedź Archimedesa zawarta w jego *Metodzie*, a odnosząca się do wzoru na pole powierzchni kuli. Archimedes dochodzi mianowicie do wniosku, że tak jak pole koła jest równe polu trójkąta o wysokości równej promieniowi koła oraz o podstawie równej obwodowi koła, tak podobnie objętość kuli jest równa objętości stożka o wysokości równej promieniowi kuli i podstawie równej

---

[27] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Hildesheim 1962, s. 165-209. W sprawie heurystyki Cantora por. Dadaczyński, dz. cyt., s. 98-142.

[28] Cantor, dz. cyt., s. 195.

powierzchni kuli[29]. Ponieważ objętość kuli została wcześniej obliczona przez matematyka z Syrakuz, który wykazał, iż wynosi ona 2/3 objętości walca opisanego na kuli, więc z powyższej analogii wynika, że powierzchnia kuli jest równa czterem kołom wielkim kuli (tzn. przekrojom kołowym płaszczyznami przechodzącymi przez środek kuli)[30]. Swoje rozumowanie Archimedes uzupełnia dowodem wspomnianego faktu przy użyciu tzw. metody wyczerpywania pochodzącej od Eudoksosa[31].

Innym przykładem śmiałej analogii jest geometryczna metoda rozwiązywania równania stopnia trzeciego postaci $x^3 + ax = b, \quad a,b > 0$, przedstawiona przez N. Fontanę w 1534 r., a zainspirowana arabskim sposobem rozwiązania równania kwadratowego $x^2 + ax = b, \quad a,b > 0$. Podobnie jak uczeni arabscy, którzy rozwiązywali równanie kwadratowe wymienionego typu, uzupełniając kwadrat o boku *x* do kwadratu o polu *b*, Fontana przedstawił konstrukcję, w której sześcian o boku *x* jest uzupełniany do sześcianu o objętości *b*[32]. Niestety, analogia między równaniami wyższych stopni a metodami geometrii nie jest, z oczywistych powodów, możliwa.

W ogóle, indukcja analogiczna często bywa zawodna. Świadczy o tym chociażby historia zagadnienia, które stało się treścią tzw. III problemu Hilberta[33]. Zagadnienie to dotyczy zakresu stosowalności pojęcia granicy w geometrii. Wiadomo bowiem, od czasów starożytnych, że pole dowolnego wielokąta może być obliczone bez użycia przejścia do granicy. Czy podobnie objętość dowolnego wielościanu można otrzymać bez zastosowania przejścia do granicy? Odpowiednie rachunki zawarte w *Elementach* Euklidesa dla ostrosłupów trójkątnych opierają się na metodzie wyczerpywania, a więc na starożytnym odpowiedniku teorii granic. Wielu matematyków, a wśród nich Gauss, zastanawiało się nad tym, czy wymienionych wyników nie można

---

[29] Por. A. A a b o e, *Matematyka w starożytności*, tł. R. Ramer, Warszawa 1968, s. 106-107.

[30] Objętość kuli jest równa, we współczesnej symbolice, $\frac{4}{3}\pi r^3$. Jeśli symbolem S oznaczymy pole powierzchni kuli, to na mocy tego rozumowania zachodzi równość $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot S$, skąd wynika, że $S = 4\pi r^2$.

[31] Na temat metody wyczerpywania por. np. M. K o r d o s, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 1994, s. 73-77.

[32] K o r d o s, dz. cyt., s. 118.

[33] S. F u d a l i, *III problem Hilberta – Równość objętości dwóch czworościanów o równych wysokościach i podstawach o równym polu*, [w:] *Problemy Hilberta*, red. W. Więsław, Warszawa 1997, s. 35-43.

uzyskać bez użycia pojęcia granicy, wykazując, że ostrosłupy te są przystające przez rozkład lub uzupełnienie do brył, których objętość może być obliczona bez odwołania się do tego pojęcia? Mimo pozytywnych rezultatów dotyczących niektórych typów wielościanów, ostatecznie M. Dehn wykazał w 1900 r. (a więc w tym samym roku, gdy sformułowane zostały problemy Hilberta), że jest to niemożliwe. Analogia między wielokątami a wielościanami okazała się zawodna.

3. NAUKI O POZNANIU A INDUKCJA

Przykłady przedstawione w poprzednim rozdziale artykułu pokazują, że rozumowania indukcyjne odgrywały w historii matematyki ważną rolę. Zauważmy zarazem, że jedynie rozumowania typu I_2 podpadają pod schemat

$$\frac{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n}{\bigwedge k\, A_k}, \tag{1}$$

gdzie $A_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ są przesłankami stwierdzającymi, że pewna własność matematyczna jest udziałem jakiegoś pojedynczego przedmiotu matematycznego (np. liczby), natomiast wyrażenie $\bigwedge k\, A_k$ jest wnioskiem, zgodnie z którym owa własność przynależy wszystkim przedmiotom z rozważanej dziedziny; pozioma kreska zastępuje znak implikacji.

Jeśli schemat (1) odnosi się do zbyt wąskiej klasy rozumowań, to należałoby zastąpić go innym, bardziej ogólnym. Naturalnym kandydatem jest tu schemat tzw. rozumowań redukcyjnych, mający postać

$$\frac{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n}{B}, \tag{2}$$

gdzie między przesłankami $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$ a wnioskiem B zachodzą zależności wyrażone implikacjami: $B \rightarrow A_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ a zarazem nie jest prawdą, że B wynika z $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$.

Jednakże i ten schemat nie obejmuje wielu rozumowań indukcyjnych. Można sobie przecież wyobrazić takie wnioskowania, które prowadzą do zmiany definicji rozpatrywanych pojęć lub wręcz przebudowy systemu, w którym zachodzi rozumowanie. W gruncie rzeczy większość doniosłych rozszerzeń indukcyjnych w historii miała taki właśnie charakter (dotyczy to indukcji typu I_1, I_3 oraz I_4). Jest to, jak sądzę, spostrzeżenie istotne, gdyż pozwala, przynajmniej częściowo, wyjaśnić skuteczność wnioskowań indukcyjnych w obrębie matematyki. Rozumowania te (na ogół) nie tyle służą *dowodzeniu twierdzeń* na podstawie ustalonej bazy pojęciowej, ale raczej prowadzą ku *definicjom nowych pojęć*. W tym miejscu trzeba koniecznie zaznaczyć, że omawiane typy indukcji występują w ścisłym powiązaniu z inwencją twórczą uczonych. A zatem przeciwstawianie sobie mozolnego, pozbawionego twórczych wzlotów procesu indukcyjnego rozszerzania wiedzy oraz opartych na wyobraźni i pomysłowości, śmiałych teorii, nie jest właściwe. Indukcja i inwencja są składnikami procesu tworzenia nowych pojęć i teorii, przy czym indukcja wskazuje na strukturalne podobieństwo między siatką pojęć w punkcie wyjścia tego procesu oraz systemem pojęć na jego końcu.

Bardziej szczegółowa analiza procesu tworzenia pojęć matematycznych, a także składających się nań komponentów: inwencji oraz indukcji jest możliwa dzięki koncepcjom, jakie proponują nauki kognitywne. Zdaniem przedstawicieli tych nauk fundamentalną rolę w epistemologii matematyki odgrywają tzw. schematy obrazowe (*schema images*) oraz metafory pojęciowe (*concept metaphors*)[34].

Schematy obrazowe obejmują najbardziej elementarne funkcje poznawcze umysłu, które przez kognitywistów są traktowane jako wrodzone. Kognitywiści zmierzają do tego, by funkcje te zrekonstruować za pomocą sieci neuronowych. Podstawową rolę wśród schematów obrazowych odgrywa tzw. schemat pojemnika (*container schema*), który służy do lokalizacji przedmiotu w określonym obszarze przestrzeni nazywanym pojemnikiem.

Z kolei metafory pojęciowe (nie należy ich mylić z metaforami rozumianymi jako figury stylistyczne) są mechanizmami poznawczymi, dzięki którym rozwija się wiedza. Jest zarazem charakterystyczne, że pojęcia o większym stopniu ogólności są rozumiane dzięki pojęciom bardziej konkretnym, zbliżonym do codziennego doświadczenia.

Tak więc, można uznać, że metafora jest odwzorowaniem, które opisuje następującą zależność[35]:

---

[34] Teoria metafory pojęciowej, co trzeba zaznaczyć, sięga swymi korzeniami koncepcji Arystotelesa. Mam na myśli teorię analogii atrybucji. Na ten temat por. M. A. K r ą p i e c, *Metafizyka*, Lublin 1984, s. 477-513; W. S t r ó ż e w s k i, *Ontologia*, Kraków 2004, s. 65-66.

[35] G. L a k o f f, R. E. N ú ñ e z, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York 2000, s. 39-49.

METAFORA : DZIEDZINA ŹRÓDŁOWA $\longrightarrow$ DZIEDZINA DOCELOWA

Zilustrujmy powyższy diagram przykładem metafory wyrażającej pojęcia arytmetyczne poprzez zbiory przedmiotów[36].

ARYTMETYKA JEST KOLEKCJĄ PRZEDMIOTÓW

DZIEDZINA ŹRÓDŁOWA		*DZIEDZINA DOCELOWA*
KOLEKCJA PRZEDMIOTÓW		ARYTMETYKA
Kolekcje przedmiotów tego samego rodzaju	$\longrightarrow$	Liczby
Większa kolekcja	$\longrightarrow$	Większa liczba
Mniejsza kolekcja	$\longrightarrow$	Mniejsza liczba
Najmniejsza kolekcja	$\longrightarrow$	Jedność
Połączenie kolekcji	$\longrightarrow$	Dodawanie liczb
Usunięcie kolekcji mniejszej z kolekcji większej	$\longrightarrow$	Odejmowanie liczb

Metafora powyższa jest, zdaniem Lakoffa i Núñeza, jedną z fundamentalnych metafor konstruujących arytmetykę elementarną. Dzięki niej możliwe jest przejście od dziedziny przedmiotów fizycznych do abstrakcyjnego pojęcia liczby. Metafora ta, co istotne, zachowuje wiele własności kolekcji przedmiotów fizycznych. Na przykład, usuwając kolekcję mniejszą od większej, a następnie łącząc otrzymaną kolekcję z kolekcją usuniętą otrzymujemy zawsze kolekcję wyjściową. Tę samą własność posiadają liczby, bowiem, co oczywiste, dodając do różnicy liczb odjemnik, uzyskuje się odjemną. Obie dziedziny posiadają więcej własności wspólnych, np. są uporządkowane liniowo pod względem wielkości itd. Tak więc powyższa metafora (a dotyczy to także innych metafor) indukuje w dziedzinie docelowej strukturę analogiczną do struktury posiadanej przez dziedzinę źródłową.

[36] Tamże, s. 55.

Metafory pojęciowe, zgodnie z zarysowaną teorią, mogą się nawarstwiać, ale także uzupełniać. Według Lakoffa i Núñeza istnieją jeszcze trzy podstawowe metafory konstruujące arytmetykę.

Można dyskutować z autorami *Where Mathematics Comes From?*, czy lista przedstawionych przez nich metafor jest pełna i czy opisy poszczególnych metafor są całkowicie trafne. Tym niemniej sama koncepcja metafory pojęciowej wydaje się interesująca i, mimo pewnych braków, nieźle potwierdzona. Zarazem widać wyraźnie, na czym opiera się indukcyjna komponenta metafory. Przenosi ona na dziedziny bardziej abstrakcyjne niektóre ważne własności dziedzin relatywnie bardziej konkretnych.

Co jednak sprawia, że pewne własności są „transmitowane" ku wyższym poziomom abstrakcji, a inne nie? W odpowiedzi przede wszystkim należy zaznaczyć, że obie dziedziny: źródłowa i docelowa są w stosunku do siebie niezależne, a do ich złączenia dochodzi w wyniku uaktywnienia odrębnych części kory mózgowej odpowiedzialnych za obie te dziedziny. Dochodzi wtedy do efektu *conflation* w terminologii kognitywnej. Mimo to każda z dziedzin zachowuje pewne odrębne własności (mogą być one ustrukturyzowane poprzez inne odpowiednio dobrane metafory).

Teoria metafor pojęciowych, ważna i obiecująca, wymaga jednak, jak się zdaje, dopracowania od strony filozoficznej. W obecnej postaci jest zanadto znaturalizowana ze szkodą dla wielu tradycyjnych pojęć filozofii umysłu, które w niej się nie mieszczą. Sieci neuronowe, nawet jeśli za pomocą odpowiednich algorytmów wyposaży się je w techniki uczenia się, są jedynie zubożonym modelem obdarzonej rozumem i wolnością osoby ludzkiej tworzącej koncepcje naukowe.

Przy tych wszystkich zastrzeżeniach, z którymi wiążą się jednak nadzieje na rozwiązanie zarysowanych problemów, kognitywistyczna teoria wiedzy matematycznej oferuje interesujące koncepcje, które na stałe – nie zaś tylko przelotnie na skutek przemijającej koniunktury – mogą znaleźć swoje miejsce w epistemologii.

Powróćmy na teren rozumowań indukcyjnych. Próby sformalizowania tych rozumowań za pomocą schematów (1) lub (2) nie są w pełni trafne, jako że ramy logiczne obu schematów same są wytworem długiego procesu historycznego, cechującego się zmiennością i fallibilnością. Jak zatem rozstrzygnąć problem znalezienia adekwatnego schematu dla rozumowań indukcyjnych?

Jeśli zatrzymamy się przy schemacie (2) jako bardziej ogólnym niż (1), musimy zauważyć, że w przypadku tych indukcji, które są częściami metafor pojęciowych, przesłanki $A_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ wyrażają relacje za pomocą pojęć dziedziny źródłowej, natomiast B opisuje związki między pojęciami dziedziny docelowej. Przy tym pojęcia dziedziny docelowej są metaforycznymi obrazami pojęć dziedziny źródłowej (w wielu przypadkach metafora pojęciowa przekształca tylko niektóre pojęcia, inne pozostawiając bez zmiany). A zatem, uwzględniając powyższe uwagi należałoby uznać, że rozważane w tym rozdziale rozumowania indukcyjne, opisuje następujący schemat:

$$\frac{D: A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n}{M(D): B}, \tag{3}$$

gdzie D i $M(D)$ oznaczają odpowiednio dziedzinę źródłową i dziedzinę docelową powiązane ze sobą za pomocą odpowiedniej metafory pojęciowej M, natomiast między przesłankami i wnioskiem indukcyjnym zachodzą związki $B \to M(A_i), i = 1, 2, ..., n,$ a także B nie wynika z $M(A_1) \wedge M(A_2) \wedge \ldots \wedge M(A_n)$. Zdania $M(A_i)$ są metaforycznymi obrazami zdań A_i, otrzymanymi przez zastąpienie pojęć dziedziny źródłowej przez pojęcia dziedziny docelowej[37].

Tak więc metafory pojęciowe posiadają składnik indukcyjny, który funkcjonuje zgodnie ze schematem (3). Czy jednak każde rozumowanie indukcyjne jest częścią jakiejś metafory? Oczywiście, że nie. W przypadku gdy nie ulegają zmianie znaczenia terminów wykorzystywanych we wnioskowaniu indukcyjnym, a tak jest wtedy, gdy stosujemy indukcję enumeracyjną I_2 albo indukcję I_5, nie mamy do czynienia z metaforą pojęciową. Tym niemniej schemat (3) może zachować swoją użyteczność w ogólnym przypadku rozumowań $I_1 - I_5$, jeśli przyjmiemy, że $M(D) = D$ w tych wnioskowaniach, które nie prowadzą do zmiany znaczeń terminów dziedziny D.

Zarazem trzeba pamiętać, że schemat (3) odpowiada sytuacjom wyidealizowanym, albowiem konstrukcja pojęć dowolnej dziedziny matematyki dokonuje się w wyniku wielu nakładających się na siebie interakcji, o charakterze metaforycznym, z innymi działami matematyki. Jest to proces o dużej złożoności; jego analiza, jak należy przypuszczać, będzie w przyszłości jednym z głównych zadań nauk kognitywnych.

[37] Rozumowania wykorzystujące pojęcia metafory lub analogii są istotne w teorii poznania. Warto w tym kontekście zwrócić uwagę na przedstawiane przez M. A. Krąpca rozumowania o charakterze analogicznym zaproponowane przez W. Biegańskiego. Mimo formalnych różnic w zapisie wykazują one jednak szereg podobieństw z zaproponowanym schematem (3); por. Krąpiec, dz. cyt., s. 510-511.

4. KONKLUZJE

Podsumowując treści zawarte w niniejszym artykule, chciałbym zwrócić uwagę na najbardziej istotne, zawarte w nim tezy, a mianowicie na to, że:

1) indukcja niezupełna odgrywa istotną rolę w metodologii matematyki;

2) indukcja niezupełna w naukach matematycznych przyczynia się zarówno do budowy aksjomatycznych fundamentów tych nauk i wykorzystywana jest w rozumowaniach, które nie zmieniają ustalonych wcześniej pojęć;

3) przeciwstawianie indukcji oraz kreatywności uczonych nie jest właściwe, indukcja bowiem często stanowi ważny, chociaż nie zawsze uświadomiony składnik twórczości naukowej;

4) siła wielu rozumowań indukcyjnych wynika w znacznej mierze z tego, że przyczyniają się one do zdefiniowania pojęć matematycznych poprzez ustalenie reguł ich użycia;

5) do ujęcia rozumowań indukcyjnych za pomocą schematu inferencyjnego przydatna jest zaproponowana przez Lakoffa i Núñeza teoria metafory pojęciowej.

BIBLIOGRAFIA

Aaboe A.: Matematyka w starożytności, Warszawa: PWN 1968.

Batóg T.: Dwa paradygmaty matematyki. Studium z dziejów i filozofii matematyki, Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM 1996.

Black M.: Self-Supporting Inductive Arguments, [w:] The Philosophy of Science, ed. P. H. Nidditch, Oxford: Oxford University Press 1968, s. 136-143.

Bobrowski D.: O pewnych koncepcjach probabilistycznych Jakuba Bernoulliego, [w:] Probabilistyka i mechanika w szkicach historycznych. Materiały z V Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, cz. I. (red. S. Fudali), Szczecin 1992, s. 1-8.

Bocheński J. M.: Współczesne metody myślenia, Poznań: W drodze 1992.

Cantor G.: Gesammelte Abhandlungen, Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung 1962.

Chmielewski A.: Filozofia Poppera. Analiza krytyczna, Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego 1995.

Dadaczyński J.: Matematyka w oczach filozofa, Tarnów OBI i Biblos 2002.

Fudali S.: III problem Hilberta – Równość objętości dwóch czworościanów o równych wysokościach i podstawach o równym polu, [w:] Problemy Hilberta, red. W. Więsław, Warszawa: IHN PAN 1997, s. 35-43.

Giorello G.: Archimedes and the Methodology of Research Programmes, „Scientia” 110 (1975).

G r u s z e c k i L.: Teoremat Banacha-Tarskiego, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” 23 (1999), s. 129-132.

— Matematyka w osiemnastym stuleciu a metodologia naukowych tradycji badawczych Teuna Koetsiera, [w:] Matematyka XVIII wieku. Materiały z XIII Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Szczecin 2001, s. 327-332.

H a j d u k Z.: Metodologia nauk przyrodniczych, Lublin: RW KUL 2002.

— O akceptacji teorii empirycznej, Lublin: RW KUL 1983.

J u s z k i e w i c z A. P. (red.): Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia, t. 2, przeł. S. Dobrzycki, Warszawa: PWN 1976.

K l i n e M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York: Oxford University Press 1972.

K o e t s i e r T.: Lakatos' Philosophy of Mathematics, Amsterdam: North-Holland 1991.

K o r d o s M.: Wykłady z historii matematyki, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne 1994.

K r ą p i e c M. A.: Metafizyka, Lublin: RW KUL 1984.

K u l c z y c k i S.: Opowieści z dziejów liczb, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne 1975.

L a k a t o s I.: A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?, [w:] t e n ż e, Philosophical Papers, t. 2, Mathematics, Science and Epistemology, eds. J. Worrall, G. Currie, Cambridge: Cambridge University Press 1978, s. 24-42.

— Changes in the Problem of Inductive Logic, [w:] The Problem of Inductive Logic, Amsterdam: North-Holland 1968, s. 315-417.

— Pisma z filozofii nauk empirycznych, tł. W. Sady, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1995.

— Proofs and Refutations, „The British Journal for the Philosophy of Science” 14 (1963-64), s. 1-25, 120-139, 221-245, 296-342.

L a k o f f G., N ú ñ e z R. E.: Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, New York: Basic Books 2000.

P o l y a G.: Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań, przeł. A. Góralski, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 1975.

P o p p e r K. R.: Logika odkrycia naukowego, przeł. U. Niklas, Warszawa: Aletheia 2002.

P u t n a m H.: The “Corroboration” Theories, [w:] Philosophy as It Is, eds. T. Honderich, M. Burnyeat, Harmondsworth: Penguin Books 1979.

— Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers, vol. I, Cambridge: Cambridge University Press 1975.

S t r ó ż e w s k i W.: Ontologia, Kraków: Aureus i Znak 2004.

S z a n i a w s k i K.: Współczesne ujęcie procedur indukcyjnych, „Zagadnienia Naukoznawstwa” 1965, nr 2-3, s. 26-44.

W a t k i n s J. W. N.: Nauka i sceptycyzm, przeł. E. i A. Chmielewscy, Warszawa: PWN 1989.

W i l d e r R. L.: Mathematics As a Cultural System, Oxford: Pergamon Press 1981.

W o l e ń s k i J.: O indukcji i indukcjonizmie, „Studia Filozoficzne” 1985, nr 8-9 (237-238), s. 67-80.

Ż y c i ń s k i J.: Elementy filozofii nauki, Tarnów: Biblos 1996.

ON INCOMPLETE INDUCTION IN MATHEMATICS

Summary

The subject of this article is the role of inductive reasoning (in the meaning of induction by incomplete enumeration) in the methodology of mathematics.

The following types of induction have been distinguished:

I_1) induction which causes formulation of axioms of different mathematical theories;

I_2) enumerative induction which causes formulation of theorems on the basis of a finite number of cases;

I_3) induction concerning the range of application of mathematical symbols;

I_4) induction generalising the properties of finite sets to the infinite case;

I_5) induction pointing to analogies between problems belonging to different domains of mathematics.

Inductive reasoning should not be put against the creativity of scientists, as induction is often an important, though not always conscious part of our cognition. The concept of notional metaphor can be useful for explaining the nature of inductive reasoning. With this concept, a general scheme of inductive reasoning has been proposed, which, in the opinion of the authors, is more adequate for presenting the nature of induction than traditional approaches.

Translated by Marta Cechowicz

Słowa kluczowe: historia, indukcja, matematyka, metafora, Popper.

Key words: history, induction, mathematics, metaphor, Popper.