ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LIII, numer 1 – 2005

KRZYSZTOF MAŚLANKA

HIPOTEZA RIEMANNA
REFLEKSJE NA TEMAT NAJWIĘKSZEJ ZAGADKI MATEMATYKI

HIPOTEZA RIEMANNA

Przyjęty po drugiej wojnie światowej na Zachodzie (i ostatnio przeszczepiony na rodzimy grunt) system finansowania badań naukowych może sprawiać wrażenie, że zbudować, rozwiązać lub odkryć można właściwie wszystko – byle tylko stworzyć dogodne warunki: sprawną organizację, motywacje do efektywnej pracy i dostatecznie hojne finansowanie badań. Można wskazać dziesiątki przykładów, gdzie metodyczne podejście tego typu dało nader spektakularne wyniki: bomba atomowa, lot człowieka na Księżyc, satelitarne badania obiektów kosmicznych, akceleratory cząstek elementarnych, wszechobecne komputery, telefonia komórkowa, ludzki genotyp, …

Są jednak też inne dziedziny nauki, mniej efektowne, trudniejsze do zareklamowania. W matematyce, na przykład, żadne nakłady nie przyspieszą wyniku. Jedynie przebłysk ulotnej intuicji, będący źródłem nowej idei, do którego dochodzi w nielicznych, pracujących samotnie, utalentowanych umysłach, w atmosferze nieskrępowanej niczym swobody, może czasem przynieść upragniony wynik. Może, ale wcale nie musi. Twórcze idee są niezależne od wszelkich nacisków i zupełnie nieprzekupne. Są jak wiatr z Ewangelii według św. Jana, który „wieje dokąd chce, […] i nikt nie wie, skąd przybywa i dokąd zmierza” (J 3, 8).

Wybitny matematyk szwajcarski Leonhard Euler (1707-1783) żył w epoce, w której despotyczni skądinąd władcy zaczęli pozwalać sobie na luksus sponsorowania czystej nauki. Był to zapewne pierwowzór wspomnianego powyżej

---

Dr hab. KRZYSZTOF MAŚLANKA – Zakład Astrofizyki Relatywistycznej i Kosmologii, Obserwatorium Astronomiczne UJ, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ; adres do korespondencji: ul. Orla 171, 30-244 Kraków; e-mail: maslanka@oa.uj.edu.pl

finansowania badań. Nie twierdzę, że okazały dom dla licznej rodziny Eulera, służba i prywatny kucharz z carskiego dworu były tu całkiem bez znaczenia. Niemniej, jak pisze w swej biografii angielski matematyk Eric Temple Bell, „Euler [...] mógł pracować gdziekolwiek i w każdych warunkach[1]".

Przebywając w dalekim Petersburgu, zauważył on, że jedna ze znanych mu matematycznych funkcji, oznaczana obecnie grecką literą ζ (dzeta) i zdefiniowana lapidarnym wzorem jako:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots,$$

posiada też drugie, zupełnie inne oblicze[2]:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{p^s}{p^s - 1} = \frac{2^s}{2^s - 1} \cdot \frac{3^s}{3^s - 1} \cdot \frac{5^s}{5^s - 1} \cdot \frac{7^s}{7^s - 1} \cdot \frac{11^s}{11^s - 1} \ldots.$$

(W obydwu formułach należy założyć, że zmienna s jest większa od jedynki; w przeciwnym razie obie formuły tracą sens: prowadzą do wyrażeń rozbieżnych.) W drugim z tych wzorów nieskończony iloczyn przebiega po wszystkich liczbach pierwszych $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ Stało się odtąd jasne, że funkcja ζ kryje w sobie, mocno zaszyfrowaną, informację o rozmieszczeniu liczb pierwszych wśród wszystkich liczb naturalnych. Z problemem tym, postawionym jeszcze w starożytności, a wciąż dalekim od pełnego rozwiązania, zmagało się wielu wybitnych matematyków[3], ale dopiero spostrzeżenie Eulera stało się

[1] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, London 1937, s. 170. Większą część życia Euler spędził poza rodzinną Bazyleą: w Petersburgu, na zaproszenie Katarzyny I, oraz w Berlinie, na zaproszenie Fryderyka Wielkiego.

[2] L. Euler, *Variae observationes circa series infinitas*. „Commentarii" 1737, 1744. Dowód jest krótki i zupełnie elementarny; korzysta on z tego, że każda liczba naturalna posiada jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze.

[3] Wyniki dotyczące liczb pierwszych były zawsze nieliczne, a uzyskiwali je tylko najwięksi: Euklides w swych *Elementach* pokazał metodą *reductio ad absurdum*, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych; jego elegancki dowód jest wciąż cytowany we współczesnych podręcznikach teorii liczb. Euler, przy użyciu funkcji ζ, podał nowy, wyrafinowany dowód tego samego twierdzenia; pokazał ponadto, że suma odwrotności liczb pierwszych $\sum 1/p$ jest rozbieżna. Wynika stąd, że w zbiorze wszystkich liczb naturalnych liczby pierwsze są rozmieszczone raczej gęsto – gęściej np. niż kwadraty liczb naturalnych, albowiem suma $\sum 1/n^2$ jest skończona i równa $\pi^2/6$. Ten ostatni wynik, poszukiwany bezskutecznie przez wielu, a uzyskany dopiero przez młodego Eulera (1735) był autentyczną sensacją i przypieczętował jego matematyczną reputa-

przysłowiowym światłem w tunelu. Było to jakby znalezienie tajemniczej szkatułki, z niewątpliwie cenną zawartością, jednak pozbawioną klucza. Trzeba było ponad stu lat, nim pojawił się odkrywca owego klucza – jedyny w swym rodzaju dalekowzroczny wizjoner: Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Nie było mu dane żyć tak długo jak Eulerowi. Był słabego zdrowia i chorobliwie nieśmiały. Los obdarzył go za to niezwykłym, wizjonerskim talentem matematycznym, fenomenalnymi zdolnościami wykonywania analitycznych obliczeń, a także liczną grupą przyjaciół – wybitnych matematyków. Miał też najlepszego z możliwych nauczycieli: samego „księcia matematyków", Johanna Carla Friedricha Gaussa (1777-1855).

W 1859 r. Riemann przedstawił berlińskiej Akademii ośmiostronicową pracę na temat rozmieszczenia liczb pierwszych. W pracy tej, przy użyciu kilku bardzo pomysłowych obliczeń, dokonał wnikliwej analizy tego, co dzieje się „na styku" dwu powyższych reprezentacji funkcji ζ. Stwierdził, że rozmieszczenie liczb pierwszych zależy *de facto* od rozmieszczenia zespolonych miejsc zerowych funkcji ζ, czyli rozwiązań równania $\zeta(s) = 0$. (W literaturze fachowej owe rozwiązania, czyli miejsca zerowe, zwykło się nazywać w skrócie po prostu „zerami".) Postawił też, dość mimochodem, pewną hipotezę: *wszystkie* zespolone zera leżą „jak strzelił" na pewnej prostej. Oto jedno z najbardziej brzemiennych w skutki zdań, jakie kiedykolwiek napisano w naukowej pracy:

> […] jest bardzo prawdopodobne, że [wszystkie zespolone rozwiązania równania $\zeta(s) = 0$ leżą na prostej]. Oczywiście, ścisły dowód byłby tu bardzo pożądany. Po kilku krótkich, nieudanych próbach odłożyłem chwilowo na jakiś czas poszukiwania tego dowodu, nie wydaje się on bowiem niezbędny dla kolejnego przedmiotu moich badań[4].

Postawiona (i, niestety, pozostawiona bez dowodu) przez Riemanna hipoteza nie została do dziś zamieniona na ścisłe twierdzenie. Rozstrzygnięcie wątpliwości, czy jest ona prawdziwa, czy też nie – to kwestia zarówno niezmiernie ważna, jak i skrajnie trudna. Ewentualna prawdziwość hipotezy Riemanna rzuciłaby wiele światła na prawo opisujące rozmieszczenie liczb pierwszych. Paradoksalnie, prawo to jest dobrze znane: niemal pół wieku po śmierci

---

cję. Por. K. Maślanka, *Pietro Mengoli i szeregi liczbowe. Prehistoria funkcji ζ Riemanna*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki", 2004.

[4] G. F. B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 671, 1859.

Riemanna zostało dowiedzione twierdzenie o liczbach pierwszych (ang. *Prime Number Theorem*, *PNT*). Nie jest natomiast jasne, na ile jest ono przydatne; w przypadku nieprawdziwości hipotezy Riemanna byłby to wynik raczej słaby, a sam rozkład liczb pierwszych – nieestetycznie skomplikowany[5].

GALERIA MOŻLIWOŚCI

Zanim więc – jeżeli w ogóle – poznany pełną prawdę o hipotezie Riemanna, winniśmy *a priori* dopuścić co najmniej trzy możliwości[6]. Hipoteza ta jest: (*a*) prawdziwa, (*b*) nieprawdziwa, (*c*) nierozstrzygalna. (O czwartej, dość zaskakującej możliwości poniżej.)

Naukowiec, który przez ostatnie ćwierć wieku bardzo wiele zdziałał w kwestii numerycznych badań nad funkcją ζ Riemanna, wszechstronny amerykański matematyk polskiego pochodzenia, prof. Andrew Odlyzko (ur. 1949), udzielił kiedyś wywiadu, w którym zajął asekuracyjnie ostrożne stanowisko:

> [Hipoteza Riemanna] jest albo prawdziwa, albo fałszywa i nie będę ryzykował zgadywania, która z tych możliwości zachodzi. Jak dotąd nie zdarzyło mi się zauważyć żadnych pomysłów, które w najbliższej przyszłości mogłyby doprowadzić do dowodu tej hipotezy. Nie oznacza to jednak, że taki dowód nie pojawi się już jutro[7].

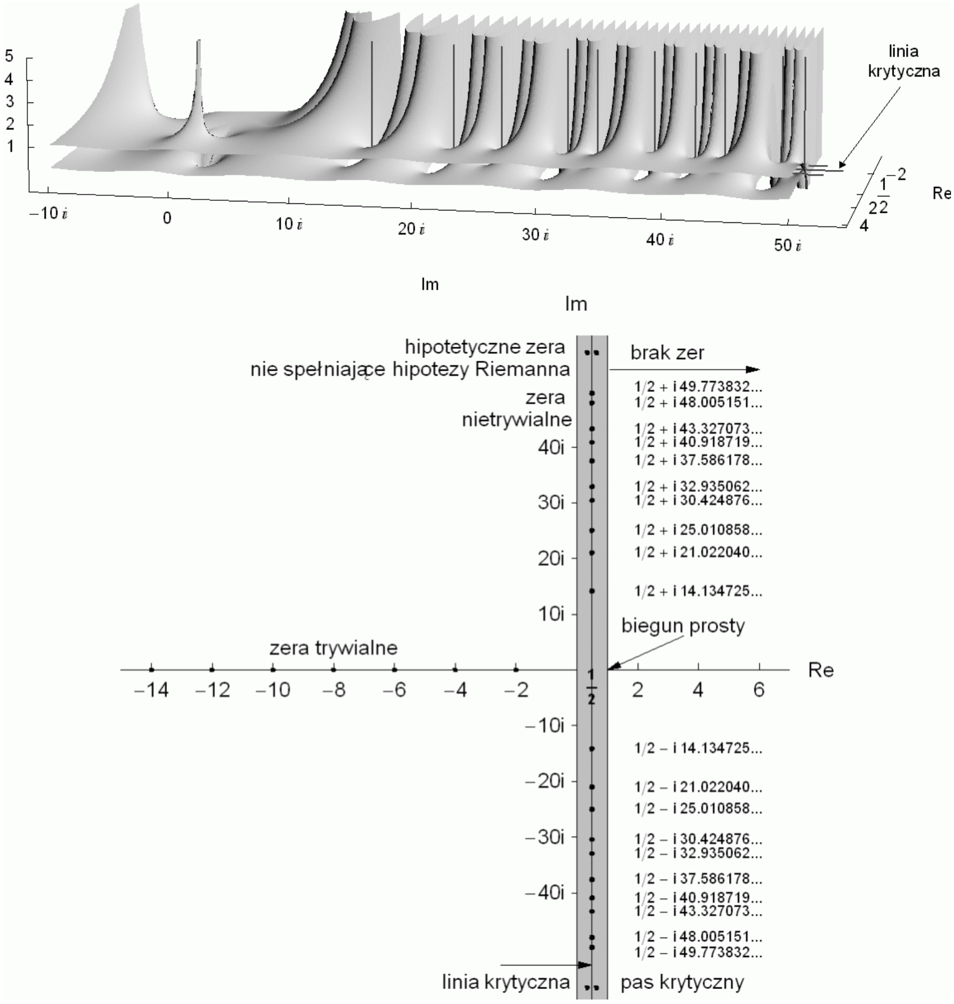
[5] Mówiąc ściślej, Riemann badał funkcję $\pi(x)$, która zlicza liczby pierwsze do danego argumentu x. Hadamard i de la Valée Poussin (1896), a później, w prostszy sposób, Erdös i Selberg (1949) udowodnili twierdzenie o liczbach pierwszych. Mówi ono, że:

$\pi(x) \approx \mathrm{li}(x) + \text{reszta}.$

(funkcja li to tzw. logarytm całkowy). Jeśli hipoteza Riemanna jest prawdziwa, to wspomniana reszta jest „mała” w porównaniu z członem wiodącym $\mathrm{li}(x)$ i ma postać const $\sqrt{x}\ln(x)$; jeśli natomiast funkcja ζ posiada zera poza prostą krytyczną, to owa reszta nie jest wcale mała – nie zasługuje zatem nawet na nazwę „reszty”.

[6] Rozważanie zbioru wszystkich możliwości to dość powszechna taktyka metodologiczna stosowana w wielu dziedzinach wiedzy. Na gruncie astronomii rozpowszechnił ją w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku amerykański astronom Fritz Zwicky jako tzw. skrzynkę morfologiczną. W kosmologii z kolei stałą praktyką jest rozważanie wszystkich (nawet tych zupełnie nierealistycznych) modeli Wszechświata, który z natury jest jeden. Metodą odrzucania kolejnych możliwości ogranicza się następnie ich zbiór do najbardziej prawdopodobnych. Mówiąc żartobliwie: przypomina to nieco taktykę Sherlocka Holmesa: „It is an old maxim of mine that, when you have excluded the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth” (Sir Arthur Conan Doyle, *The Adventure of the Beryl Coronet*).

[7] M. Drmota, *Interview mit Andrew Odlyzko*, „Internationale Mathematische Nachrichten”, Wien, August 1998, Nr. 178.



Rys. 1. Wykres u góry przedstawia część rzeczywistą i część urojoną funkcji ζ Riemanna. Pionowe czarne kreski wskazują kilka początkowych zespolonych miejsc zerowych: punktów, w których $\zeta(s) = 0$, czyli Re $\zeta(s)$ = Im $\zeta(s) = 0$.

Poniżej: fragment płaszczyzny Gaussa, czyli zespolonej dziedziny argumentu funkcji ζ. Dowiedziono, że wszystkie pierwiastki równania $\zeta(s) = 0$ (z wyjątkiem tzw. trywialnych równych −2, −4, −6,…) muszą leżeć wewnątrz pasa krytycznego $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Wszystkie obliczone dotąd numerycznie zespolone pierwiastki tego równania – zgodnie z hipotezą Riemanna – leżą dokładnie na prostej krytycznej $\mathrm{Re}(s) = ½$. W lokalizacji tych właśnie punktów zawiera się rozwiązanie zagadki rozmieszczenia liczb pierwszych.

Aby dowieść nieprawdziwości hipotezy Riemanna, wystarczyłoby wskazać miejsce zerowe odstające od prostej krytycznej. Międzynarodowy projekt o nazwie ZetaGrid prowadzi od ponad trzech lat „polowanie" na takie ewentualne niesforne miejsce zerowe. Projekt ten, pod egidą firmy IBM Deutschland, zrzesza ochotników z całego świata, którzy, poprzez Internet, użyczają mocy obliczeniowej swych komputerów.

Rzeczą znacznie prostszą niż podanie dowodu prawdziwości hipotezy Riemanna byłoby zatem jej obalenie[8]. Tu bowiem, zamiast pokazywać, że dokładnie *wszystkie* z nieskończonej ilości zer leżą na prostej, wystarczy *wskazać jedno* niesforne zero (kontrprzykład), które by odstawało od owej prostej. (Ze względu na pewne symetrie byłyby od razu co najmniej cztery takie miejsca; por. rysunek na stronie poprzedniej.) Do tego nie trzeba „porządnej" matematyki; wystarczą „brutalne" metody numeryczne. Innymi słowy: zamiast odkrywczej idei – przyziemny komputer. Byle szybki i posiadający dostatecznie dużo pamięci.

Oczywiście sam komputer, nawet najnowszej generacji, nie wykona niczego sam. Potrzebny jest stosowny algorytm. W przypadku obliczania zer funkcji ζ znane są trzy takie algorytmy. Najstarszy, Eulera-Maclaurina (1734 r.), był używany przez pionierów tych badań. Algorytm Riemanna-Siegela został „odkryty" przez Carla Siegela w nie opublikowanych notatkach pozostawionych przez Riemanna (1932 r.). Najnowszy, bardzo skuteczny algorytm opracował cytowany powyżej Odlyzko wraz z Arnoldem Schönhagem (1987 r.). Ten ostatni pozwala znajdować skrajnie odległe zera[9].

Zakrojone na szeroką skalę, z wykorzystaniem najszybszych z dostępnych komputerów prace trwają. Aktualnie (2004 r.) obliczono położenia 50 miliardów początkowych miejsc zerowych oraz kilka miliardów odległych w okolicy miejsca zerowego numer 10^{23}.

[8] Język angielski ma dwa zgrabne, jawnie komplementarne określenia: *proof* (dowód prawdziwości) oraz *disproof* (dowód nieprawdziwości, obalenie).

[9] Wszystkie trzy wymienione algorytmy są skuteczne (ang. *effective*) w tym sensie, że można nimi policzyć wartości funkcji ζ z dowolną dokładnością i dla dowolnie dużych wartości argumentu. Natomiast nie wszystkie one są jednakowo wydajne (ang. *efficient*): za pomocą pierwszego można (w sensownym czasie pracy komputera, tj. rzędu najwyżej kilku miesięcy) sięgnąć do zera nr 10^6, za pomocą drugiego – do zera nr 10^{12}, a za pomocą trzeciego – aż do zera nr 10^{23}. By sięgnąć jeszcze wyżej, trzeba by radykalnego, jakościowego postępu w szybkości procesorów lub/i nowego algorytmu. Jeśli pierwszy kontrprzykład hipotezy Riemanna znajduje się np. w okolicy zera nr 10^{100} (w teorii liczb są znane takie przypadki), to atakowanie tego problemu metodami numerycznymi jest raczej beznadziejne: ani obecne, ani będące w sferze projektów komputery nie dotrą nigdy do takich miejsc płaszczyzny zespolonej.

numer kolejny	miejsce zerowe
1	½ +*i* 14 . 13472514173…
2	½ +*i* 21 . 02203963877…
3	½ +*i* 25 . 01085758015…
4	½ +*i* 30 . 42487612586…
…	…
10	½ +*i* 49 . 77383247767…
10^2	½ +*i* 236 . 524229666…
10^3	½ +*i* 1419 . 422480946…
10^4	½ +*i* 9877 . 782654004…
10^5	½ +*i* 74 920 . 827498994…
10^6	½ +*i* 600 269 . 677012445…
10^{22}	½ +*i* 1 370 919 909 931 995 308 226 . 627511…

Jak dotąd, wszystkie one leżą dokładnie na prostej krytycznej. Jest zatem bardzo prawdopodobne, że pozostałe też będą na niej leżeć. Nikt jednak nie wie, jak określenie „jest bardzo prawdopodobne” zastąpić określeniem „jest pewne”. 50 miliardów przypadków to, psychologicznie rzecz biorąc, bardzo dużo. Niemniej zawsze pozostaje nieskończenie wiele niezbadanych przypadków. Jak mówi Odlyzko:

> Jeśli istnieją jakieś kontrprzykłady, to, jak mi się wydaje, leżą one znacznie powyżej zakresu, w którym potrafimy obliczać [numerycznie] funkcję ζ.

Tak więc sprawa wygląda na beznadziejną. Aby udowodnić hipotezę Riemanna, potrzeba radykalnie nowej idei, a zatem kogoś na miarę przynajmniej jej twórcy; aby ją obalić, trzeba by znacznie większych mocy obliczeniowych.

Tymczasem matematycy robią, co mogą: formułują wciąż nowe kryteria dla tej hipotezy – czyli twierdzenia równoważne samej hipotezie, lecz równie hipotetyczne i równie trudne jak ona sama. Ci, którzy nie boją się komputerów, pracowicie gromadzą tablice wciąż nowych miejsc zerowych i zdają się zapominać, że jakkolwiek nie byłyby one obszerne, to i tak jest to tylko przysłowiowa kropla w nieskończonym morzu. Ci z kolei, którzy mają trochę intuicji fizycznej, szukają w tak zgromadzonym materiale rozmaitych prawidłowości: traktują te liczby jak swoiste, absolutne[10] „obserwacje". Spora grupa ambitnych megalomanów, skuszonych wizją sławy i milionem obiecanych dolarów, twierdzi, że już ma dowód – co najwyżej wymagający pewnych retuszów. Jedynie najwybitniejsi, których lata pracy też nie doprowadziły do celu, jawnie przyznają się do porażki. Wybitny matematyk włoski pracujący w Princeton, Enrico Bombieri, laureat medalu Fieldsa, powiedział ostatnio w wywiadzie: „Hipotezie Riemanna poświęciłem czterdzieści lat życia […] nie poddałem się, porażka bowiem też [czemuś] służy [*anche l'insuccesso serve*]"[11].

LICZBY PIERWSZE

Zawsze, gdy jest mowa o liczbach pierwszych, nieuchronnie pojawiają się – nawet w bardzo fachowych publikacjach – nieskrywane emocje, przejawiające się używaniem licznych superlatyw. Zwłaszcza artykuły przeglądowe i teksty popularnonaukowe na temat własności liczb pierwszych pełne są przymiotników typu: „zaskakujący", „zdumiewający", „godny uwagi", „wspaniały", „piękny". Czym usprawiedliwić tak jawne naruszenie ustalonego stylu matematyki? Chłodna i obiektywna prawda matematyczna nie musi podpierać się egzaltowanym słownictwem. Możliwe, że wynika to z przekonania o bezradności ludzkiego umysłu wobec tak postawionego zadania, świadomość jedynego w swym rodzaju misterium:

> Matematycy próbowali na próżno odkryć jakiś porządek w ciągu liczb pierwszych. My jednak mamy wszelkie powody by wierzyć, że jest w tym jakaś tajemnica, której umysł ludzki nie zgłębi nigdy. By się o tym przekonać wystarczy rzut oka na tablice liczb pierwszych (które niektórzy skonstruowali powyżej wartości 100,000): wówczas zauważymy, że nie ma tam ani porządku, ani żadnych reguł[12].

Sto tysięcy liczb pierwszych, rekord w czasach Eulera, został osiągnięty jako wynik benedyktyńskiej cierpliwości oraz pewnej dość mechanicznej me-

[10] Są to niewątpliwie „obserwacje" zasługujące w pełni na dostojne określenie *God given*, którym to – w przeciwieństwie do komplementarnego *human made* – określa się czasem w literaturze byty absolutne, nie podlegające rozmyślnym modyfikacjom człowieka. Badając metodami statystycznymi zgromadzone zera odkryto w nich wiele długozasięgowych korelacji. Fakt ten ma wielkie znaczenie dla nowej dziedziny fizyki zwanej chaosem kwantowym.

[11] E. Bombieri, *I numeri portano a Dio*, wywiad udzielony Giovanni Morandi dla „Il Giorno", 11 marca 2003 r..

[12] L. Euler, 1751. Cyt. za: G. Simmons, *Calculus Gems*, New York 1992.

tody, pochodzącej jeszcze z czasów starożytnych, tzw. sita Eratostenesa. Dziś owych sto tysięcy liczb pierwszych można policzyć na przeciętnym komputerze domowym w czasie poniżej jednej sekundy[13].

W 1977 r., na inauguracji roku akademickiego w Uniwersytecie w Bonn, matematyk Don Zagier wygłosił wykład o liczbach pierwszych. W zacytowanym poniżej fragmencie tego wykładu pojawiły się wyraźne emocje, które nakazały usunąć na dalszy plan obowiązujący, chłodny i precyzyjny styl matematycznych wypowiedzi. W każdym innym przypadku byłoby to pretensjonalne, rażące, po prostu – niedopuszczalne. Jednakże styl wykładu, zwłaszcza dobrego wykładu, w który mówca wkłada całą swą osobowość, jest wolny od sztywnych reguł obowiązujących w pracach fachowych. Tak więc w tym jednym przypadku emocje nie rażą; przeciwnie – wzmacniają u słuchacza wrażenie skali trudności problemu, wywołują niemal poczucie tajemnicy:

> Rozkład liczb pierwszych posiada dwie właściwości i mam nadzieję, że przekonam was o tym na tyle mocno, że już na zawsze wyryją się one w waszych sercach.
>
> Pierwsza z nich powiada, że – pomimo prostej definicji i roli cegiełek, z których zbudowane są liczby naturalne – należą one do najbardziej niesfornych tworów [*the most arbitrary and ornery objects*], które badają matematycy: wśród liczb naturalnych rosną niby chwasty i nie wydają się podlegać żadnym innym prawom, jak tylko prawom przypadku. Nikt więc nie może odgadnąć, gdzie [w ciągu liczb naturalnych] pojawi się kolejna z nich.
>
> Druga własność jest jeszcze bardziej zdumiewająca, albowiem sprzeczna z pierwszą: liczby pierwsze wykazują zdumiewającą regularność; istnieją prawa rządzące ich zachowaniem, a prawom tym są one posłuszne z niemal wojskową dokładnością [*they obey these laws with almost military precision*][14].

Zestawienie tych dwu własności liczb pierwszych, tj. losowości w małej skali i regularności w dużej skali, wywołuje uczucie niedosytu oraz palącą potrzebę zrozumienia.

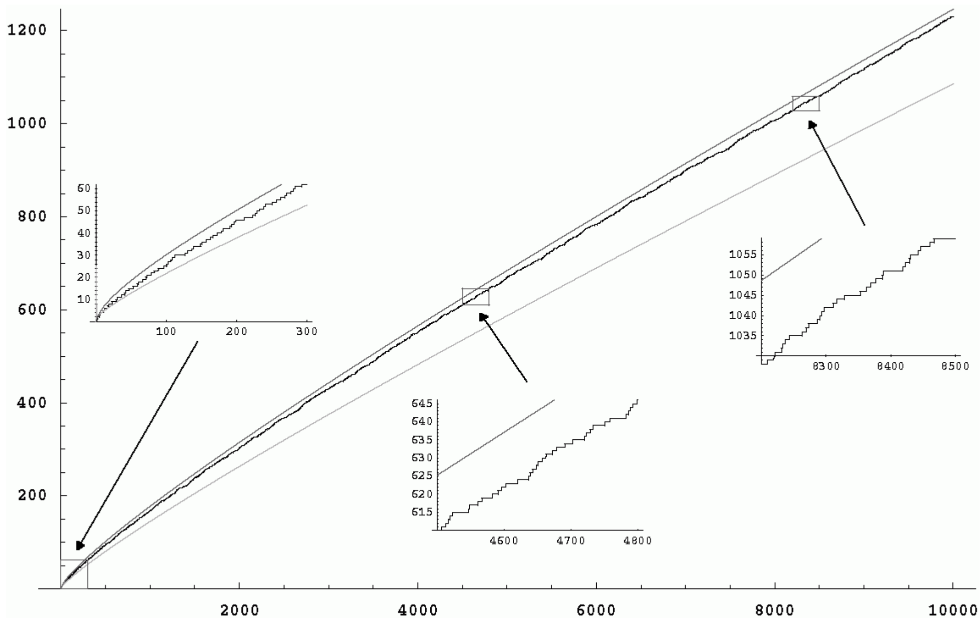
W powyższym fragmencie wypowiedzi Don Zagiera słowo „sprzeczność" budzi szczególny niepokój. Nie można go ominąć tłumacząc, że to tylko przenośnia mająca na celu wzmocnienie efektu. Jak to możliwe, by ten sam,

---

[13] Programem, którego możliwości trudno przecenić, jest produkt firmy Wolfram Research – *Mathematica*, który m.in. zamienia komputer w szybki kalkulator symboliczny. Z jego pomocą można przy użyciu funkcji `Prime[n]` po ułamku sekundy dostać kilka względnie dużych liczb pierwszych, które w czasach Eulera były daleko poza zasięgiem ówczesnych metod – milionową: $p(10^6) = 15485863$, miliardową: $p(10^9) = 22801763489$, bilionową: $p(10^{12}) = 29996224275833$.

[14] Wykład inauguracyjny Don Zagiera *The first 50 million prime numbers* na uniwersytecie w Bonn, przedrukowany w „Mathematical Intelligencer", 0 (1977), s. 7-19.

tak jednoznacznie określony byt podlegał jednocześnie dwu, wzajemnie przeciwnym regułom? W całej matematyce trudno trafić na coś analogicznego. Najbliższy przykład tego typu znajdziemy poza królestwem matematyki: w fizyce. Zachowanie się materii (a w konsekwencji jej opis) również zależy od skali odległości: w dużej skali zachowanie to jest klasyczne; materię można przybliżać przez ciągły rozkład. Natomiast w małej skali dochodzą do głosu efekty kwantowe związane z falową naturą cząstek elementarnych. Mówiąc poglądowo: z konstruktywnej interferencji fal materii wyłania się makroskopowa rzeczywistość. Nasze klasyczne zmysły widzą tylko tę ostatnią, ale bardziej podstawowa jest niewątpliwie ta pierwsza.



Rys. 2. Ilustracja paradoksalnych własności liczb pierwszych, o których mówił w swym wykładzie z r. 1977 Don Zagier. Wykreślona jest na nim fundamentalna funkcja $\pi(x)$, która zlicza ilość liczb pierwszych nie większych niż x (środkowa linia) oraz dwa jej analityczne przybliżenia: gorsze, $x/\ln(x)$ (dolna linia) i lepsze, logarytm całkowy, $\mathrm{li}(x)$ (górna linia). Widać, że w dużej skali funkcja $\pi(x)$ robi wrażenie dość gładkiej krzywej – tym gładszej, im większa jest ta skala; niemniej w małej skali jest to zawsze funkcja schodkowa o zachowaniu chaotycznym, dalekim od jakichkolwiek prawidłowości, co pokazują trzy małe powiększenia oznaczone strzałkami.

W teorii liczb ilustracją powyższego są tzw. *explicit formulae*. Są to jawne relacje między zerami funkcji ζ, oznaczanymi literą ρ, a liczbami pierwszymi. Na przykład relacja badana przez von Mangoldta ma postać:

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho}$$

gdzie $\Lambda(n)$ jest funkcją von Mangoldta. Zlicza ona liczby pierwsze oraz ich potęgi z wagą równą logarytmowi danej liczby pierwszej. Nie wchodząc tu w szczegóły techniczne, można powiedzieć, że z lewej strony równości pojawiają się liczby pierwsze, z prawej zaś – zespolone zera funkcji ζ. Po lewej mamy bardzo prostą funkcję schodkową: każdy taki schodek ma wysokość logarytmu naturalnego liczby pierwszej (2, 3, 5, 7, ...) lub *podstawy* jej potęgi (4, 8, 9, 16, 25, ...). Liczby złożone, np. $6=2\cdot 3$ czy $30=2\cdot 3\cdot 5$ są ignorowane. Natomiast po stronie prawej, z pozornego chaosu zespolonych zer ρ, wskutek jakiejś niepojętej interferencji, stopniowo wyłania się dokładnie ta sama, lokalnie chaotyczna funkcja schodkowa.

Liczby pierwsze wydają się „prostsze" niż zera funkcji ζ – przynajmniej ich definicja jest prosta i można ją wprowadzić już w początkach nauczania matematyki. Dydaktycznie spójny wykład na temat zer funkcji ζ wymaga natomiast wprowadzenia wielu pojęć wstępnych: pojęcia funkcji, szeregu, płaszczyzny Gaussa, całki po krzywej, przedłużenia analitycznego,… W tym sensie zera wydają się znacznie bardziej skomplikowane niż liczby pierwsze. Ale wrażenie to jest bardzo subiektywne.

Nie pierwszy to raz, kiedy logika matematycznego opisu nie przystaje do antropomorficznych stereotypów człowieka. Tak „naprawdę" to bardziej pierwotne są zera funkcji ζ; z ich interferencji składa się obraz rozmieszczenia liczb pierwszych – dokładnie tak paradoksalny, jak to opisał Don Zagier: chaotyczny w małej i gładki w dużej skali[15].

ZJAWISKO LEHMERA I KŁOPOTY Z JĘZYKIEM

Badania zespolonych zer funkcji ζ Riemanna najwygodniej jest prowadzić analizując pewną inną funkcję, którą wspomniany powyżej matematyk Carl Siegel „odkrył" w notatkach pozostawionych przez Riemanna i która odtąd nosi

---

[15] Por. K. Maślanka, *Riemann i jego funkcja ζ*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 30 (2002), s. 18.

nazwę funkcji Riemanna-Siegela $Z(t)$. Jest to funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej t; zakres zmienności tej zmiennej pokrywa się z prostą krytyczną:

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

gdzie $\theta(t)$ jest pewną inną, nieskomplikowaną funkcją.

Udowodniono, że jeśli hipoteza Riemanna jest prawdziwa, to wartość bezwzględna $|Z|$ nie może mieć lokalnego minimum pomiędzy dwoma sąsiednimi zerami. Obserwuje się jednak pary bardzo bliskich miejsc zerowych. Jest to tzw. zjawisko Lehmera[16]. Ostatnio poświęcono mu bardzo wiele uwagi, albowiem, mówiąc poglądowo, „bardzo małe" zaburzenia funkcji ζ (a tym samym funkcji Z) mogą sprawić, że taka para bliskich miejsc zerowych połączy się w jedno miejsce zerowe, po czym zniknie przechodząc we wspomniane powyżej lokalne minimum. W tym właśnie sensie powiada się, że zjawisko Lehmera pokazuje, że, w jakimś sensie, hipoteza Riemanna jest „niemal pogwałcona (nieprawdziwa) [*almost violated*]"[17].

Sformułowanie to budzi zrozumiały niepokój. Powyżej stwierdziłem, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa lub nie; może być ewentualnie nierozstrzygalna[18]. Jednakże „niemal nieprawdziwa"? Kolejny komentarz wybitnego eksperta niepokój ten jedynie pogłębia:

> Zjawisko Lehmera jest źródłem dość interesującej heurystyki – zarówno za hipotezą Riemanna, jak też przeciw niej[19].

Taki styl wydaje się nie mieć już nic wspólnego z matematyką, jako domeną precyzji; przypomina bardziej pokrętny slogan polityków: „Jestem za, a nawet przeciw". Ale to, co wypada politykowi, jest niegodne matematyka.

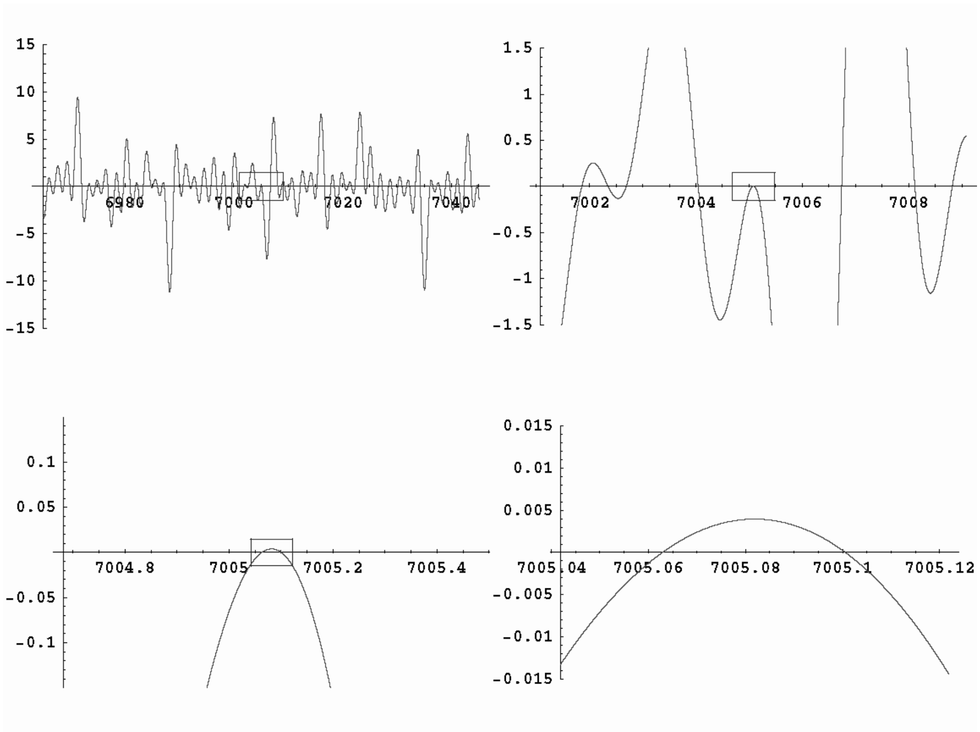
---

[16] D.H. Lehmer, *On the roots of the Riemann zeta-function*, „Acta Mathematica" 95 (1956), s. 291-298.

[17] A.M. Odlyzko, *The 10^{20}-th Zero of the Riemann Zeta Function and 70 Million of its Neighbors*, AT&T Bell Laboratories preprint, 1997.

[18] Od czasu przełomowych wyników Gödla (1931 r.) matematycy, chcąc nie chcąc, pogodzili się z faktem, że pewne precyzyjnie sformułowane twierdzenia mogą być nierozstrzygalne.

[19] Odlyzko, *ibid*.



Rys. 3. Zjawisko Lehmera odkryte w r. 1956. Wykres w lewym górnym rogu przedstawia fragment funkcji Riemanna-Siegela $Z(t)$, której miejsca zerowe dla rzeczywistego t pokrywają się z miejscami zerowymi funkcji ζ na prostej krytycznej. W środku tego rysunku widać, że wykres zdaje się dotykać osi t. Jednak kolejne powiększenia ujawniają, że w istocie jest tam para bardzo bliskich miejsc zerowych. Gdyby udało się trafić na sytuację, w której lokalny grzbiet wykresu nie dochodzi do osi t, tj. na minimum $|Z(t)|$, wówczas nieprawdziwość hipotezy Riemanna byłaby pewna.

I kolejny fragment fachowej publikacji, dotyczącej również hipotezy Riemanna, tym razem podpisanej przez czterech wybitnych matematyków. Rzecz dotyczy pewnej stałej matematycznej. Styl tego fragmentu może robić wrażenie celowo zawiłego[20]:

[20] G. Csordas, A. M. Odlyzko, W. Smith, R. S. Varga, *A New Lehmer pair of zeros and a new lower bound for the de Bruijn-Newman constant Λ*, Electr. Trans. Num. Anal., 1 (1993), s. 104-111. Ktokolwiek miał do czynienia z kosmologią, temu natychmiast nasuwa się nieodparte skojarzenie stałej de Bruijna-Newmana z tzw. gęstością krytyczną modelu kosmologicznego. Przytoczony cytat miałby zatem następującą, czytelną analogię: „Jeśli gęstość Wszechświata jest mniejsza od krytycznej, wówczas jest on otwarty; jeśli jest większa – jest zamknięty.”

W literaturze stałą Λ nazywa się obecnie stałą de Bruijna-Newmana. Hipoteza Riemanna jest równoważna temu, że $\Lambda \leq 0$. Z drugiej strony, C. M. Newman wysunął przypuszczenie[21] [*conjecture*], że $\Lambda \geq 0$. Znaczenie przypuszczenia Newmana polega na tym, że jeśli jest ono prawdziwe, wówczas hipoteza Riemanna, nawet jeśli jest prawdziwa, to jest jedynie ledwo prawdziwa [podkreślenie moje, K. M. W oryginale: *even if it is true, is only barely so*], bowiem nawet drobne zaburzenie funkcji ζ sprawia, że pewne zera nie leżą na linii krytycznej.

Włożono ostatnio sporo wysiłku, by znaleźć oszacowanie dolnej granicy dla Λ [...] najlepsze dolne oszacowanie wynosi $-4.379 \cdot 10^{-6} < \Lambda$.

W ten sposób do poprzedniego zwrotu „niemal nieprawdziwa" doszedł nowy, równie kontrowersyjny: „ledwo prawdziwa". Dopuszczenie możliwości, że do matematyki wdarło się jakieś tajemnicze stopniowanie prawdziwości, byłoby absurdem. Jedno jest pewne: mówiąc o hipotezie Riemanna, matematycy, używając najlepszego z aktualnie dostępnych słowników pojęć, chcieliby zobrazować coś, co ewidentnie do tego słownika (jeszcze?) nie należy. Stąd tak żałosna nieporadność powyższych sformułowań, które usiłując wyrazić coś, co na razie dość mgliście dostrzega tylko intuicja – wyrazić „choćby i na gruzach składni".

Najwyraźniej za tak nieskomplikowanym stwierdzeniem jak to, że pewne – dobrze przecież określone – punkty leżą na linii prostej, kryje się rzecz jakościowo nowa. W tym konkretnym przypadku matematycy natrafili na coś autentycznie niezwykłego. Tym też zapewne można by tłumaczyć niewątpliwy fakt, że od półtora wieku nikomu nie udało się trafić nawet na ślad rozwiązania. Hipoteza Riemanna zdaje się być przejawem jakiejś fundamentalnej złośliwości. Słowo „złośliwość" też nie należy do matematyki. Należałoby raczej mówić o szczególnej niestabilności, radykalnej wrażliwości na nieskończenie małe zaburzenia.

[21] W literaturze angielskojęzycznej funkcjonują dwa terminy: *conjecture* oraz *hypothesis*. W języku potocznym ich znaczenie jest praktycznie tożsame. W języku prac matematycznych z kolei obydwa oznaczają nie dowiedzione, ale prawdopodobnie prawdziwe twierdzenie. Obydwa też na ogół tłumaczy się jako *hipoteza*. Różnica jest niewielka i raczej umowna: *hypothesis* dotyczy zwykle bardziej znanego lub bardziej prawdopodobnego stwierdzenia. Np. *Riemann hypothesis* ale *Mertens conjecture*. Ta pierwsza jest bardzo sławna i nie dowiedziona; to drugie obalono w r. 1985.

WNIOSKI

Powszechnie znane jest powiedzenie Alberta Einsteina: „Pan Bóg jest wyrafinowany, ale nie jest złośliwy”[22]. Była to zapewne luźna deklaracja wiary w poznawalność praw przyrody. Kto jak kto, ale właśnie Einstein, uczony oszołamiającego sukcesu, który kilkakrotnie zobaczył w swych równaniach coś, co później obserwacyjnie stwierdzili inni, miał pełne prawo, by w tę poznawalność wierzyć. *A priori* wcale tak być nie musi: można by bez trudu wyobrazić sobie fikcyjny świat rządzony dobrze określonymi, ścisłymi prawami, które z zasady nie byłyby poznawalne – ani metodą wyciągania logicznych wniosków z licznych eksperymentów, ani metodą konstruowania prostych pojęciowo modeli[23].

Podane powyżej przykłady związane ze stałą de Bruijna-Newmana oraz zjawiskiem Lehmera dowodzą, że w przypadku hipotezy Riemanna mamy do czynienia nie tyle ze złośliwością, lecz z jakościowo nowym stopniem trudności. Nieodparcie przypominają się tu sceptyczne słowa Koheleta: „Bóg dał ludziom to trudne zadanie i kazał im się trudzić” (Koh 1, 13).

Nad trudnym zadaniem, któremu na imię hipoteza Riemanna, zadaniem rzuconym mimochodem, przez genialnego wizjonera, w niepozornej pracy sprzed półtora wieku, trudziło, i wciąż trudzi się, wielu. Jak dotąd – na próżno.

---

[22] „Raffiniert ist der Herr Gott, aber boshaft ist er nicht”. Sentencja Einsteina wyryta w kamieniu nad kominkiem w sali 202 w budynku, który kiedyś nazywał się Fine Hall, w Princeton. – By nie doprowadzać tu do dalszych (bo i tak już dostatecznie licznych w literaturze) nieporozumień, trzeba z naciskiem podkreślić, że dla Einsteina, jako zdeklarowanego agnostyka, często przezeń powtarzane określenie *Herr Gott* miało znaczenie nader wąskie. Z czasem stało się dlań przejawem pewnej, pozbawionej głębszej treści, maniery. „Wierzę w Boga Spinozy, przejawiającego się w harmonii wszystkiego, co istnieje, a nie w Boga, który zajmowałby się losem i uczynkami każdego człowieka” – napisał w telegramie z r. 1929 do jednej z żydowskich gazet. Jego symboliczny *Herr Gott* nie jest więc Bogiem osobowym: ani starotestamentowym, ani tym bardziej chrześcijańskim: *dives in misericordia*. Jako taki – zredukowany wyłącznie do swego materialnego dzieła, tj. Wszechświata oraz rządzących nim praw – jest On pozbawiony swej najgłębszej istoty. W sparafrazowanej tu sentencji Einsteina mam, oczywiście, na myśli „Boga” w sensie jedynie Spinozy.

Komentarz ten wydaje się konieczny, jako że niepowtarzalny geniusz Einsteina, niewątpliwego proroka w dziejach fizyki, oraz jego liczne sentencje, po nieodpowiedzialnym uogólnieniu na całość wiedzy (a niekiedy i dalej), mogą być szkodliwe.

[23] Niezrównaną pracę porządkującą te, często nie rozumiane lub – co gorsze – źle rozumiane, kwestie wykonał wybitny krakowski fizyk teoretyk A. Staruszkiewicz, autor nielicznych, niestety, lecz bardzo kompetentnych prac, w których trafia w samo sedno problemu. Por. np. A. Staruszkiewicz, *Wstęp* do *Zapisków autobiograficznych* A. Einsteina, Kraków 1996.

REFERENCJE

Bell E.T.: Men of Mathematics, London: The Camelot Press Ltd. 1937.

Bombieri E.: I numeri portano a Dio, wywiad udzielony Giovanni Morandi dla „Il Giorno", 11 marca 2003 r.

Csordas G., Odlyzko A. M., Smith W., Varga R. S.: A New Lehmer pair of zeros and a new lower bound for the de Bruijn-Newman constant Λ, Electr. Trans. Num. Anal., 1 (1993), s. 104-111.

Drmota M.: Interview mit Andrew Odlyzko, „Internationale Mathematische Nachrichten", Wien, August 1998, Nr. 178.

Euler L.: Variae observationes circa series infinitas. „Commentarii" 1737, 1744.

Lehmer D. H.: On the roots of the Riemann zeta-function, „Acta Mathematica" 95 (1956), s. 291-298.

Maślanka K.: Pietro Mengoli i szeregi liczbowe. Prehistoria funkcji ζ Riemanna, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki", 2004.

— Riemann i jego funkcja ζ, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 30 (2002), s. 18-30.

Odlyzko A. M.: The 10^{20}-th Zero of the Riemann Zeta Function and 70 Million of its Neighbors, AT&T Bell Laboratories preprint, 1997.

Riemann G. F. B.: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsberichte Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 671, 1859.

Simmons G.: Calculus Gems, New York: McGraw Hill Inc. 1992.

Staruszkiewicz A.: Wstęp do *Zapisków autobiograficznych* A. Einsteina, Kraków: Wyd. „Znak" 1996.

Zagier D.: The first 50 million prime numbers, „Mathematical Intelligencer", 0 (1977), s. 7-19.

RIEMANN HYPOTHESIS
REFLECTIONS ON THE GREATEST MYSTERY OF MATHEMATICS

Summary

The article presents a few aspects of the most important of the unsolved problems of mathematics, the Riemann hypothesis, in the context of the most recent results. The so-called Lehmer's phenomenon discovered half a century ago and recently studied very intensively, as well as Newman's hypothesis concerning the de Bruijn-Newman's constant that is connected with it, seem to suggest that unexpectedly controversial elements sneak into mathematics, and they can be seen even on the level of the language used in it. This probably results from the fact that even the best tools that mathematicians at the moment have at their disposal and by means of which they try in vain to verify the Riemann hypothesis are – for fundamental reasons – inadequate.

Translated by Tadeusz Karłowicz

Słowa kluczowe: teoria liczb, liczby pierwsze, hipoteza Riemanna.

Key words: number theory, prime numbers, Riemann hypothesis.