świadomego ani tego, jak myśl jego powstała, ani też, jakie pociąga za sobą praktyczne konsekwencje dla samego człowieka i kultury Zachodu, ani tego, w jakiej znajduje się ona relacji do rzeczywistości – prawdy.

Pewnym brakiem książki jest nienależyte uporządkowanie i ujednolicenie zawartych w niej przypisów. Mam tu na uwadze takie ich uporządkowanie i przedstawienie, aby czytelnik nie miał żadnych wątpliwości, z jakiego i czyjego dzieła pochodzi dany cytat oraz w którym miejscu cytowany fragment występuje. Sprawa ta jest widoczna choćby na stronach 195-207, lecz także w licznych Aneksach w części II. Należało się również spodziewać, że zawarte w przypisach cytaty pochodzące z języków obcych zostaną także przetłumaczone na język polski.

Paweł Skrzydlewski
Katedra Metafizyki KUL

George S. Boolos, John P. Burgess, Richard C. Jeffrey, *Computability and Logic*, Fourth edition, Cambridge: Cambridge University Press 2003, ss. 355 + 12. ISBN 0-521-00758-5.

Problematyka efektywności metod dowodzenia należy do najwybitniejszych i najbardziej wyspecjalizowanych gałęzi logiki matematycznej. Jednocześnie – być może właśnie z uwagi na ten nader wysoki stopień specjalizacji – jest ona niemal wyłącznie domeną zawodowych logików (w sensie wąskim), tylko wyjątkowo stając się przedmiotem zainteresowania filozofów (w sensie szerokim). Tymczasem problematyka efektywności ma, jak się wydaje, spore znaczenie filozoficzne. Dotyczy to nie tylko filozofii logiki formalnej i filozofii matematyki, ale na przykład tak intensywnie dziś uprawianej kognitywistyki. Mamy więc do czynienia z doniosłą ontologicznie i epistemologicznie, a w pewnym sensie może również antropologicznie, częścią logiki matematycznej.

Celem tej recenzji jest zwrócenie uwagi środowiska filozoficznego na nieco zapomnianą przez nie dziedzinę, a okazji po temu dostarcza kolejne, zmodyfikowane wydanie klasycznej już pracy trzech logików: George'a S. Boolosa, Johna P. Burgessa oraz Richarda C. Jeffreya, zatytułowanej *Computability and Logic*. Recenzowane czwarte wydanie zostało gruntownie poprawione przez Burgessa (Princeton University) w taki sposób, by zwiększyć walor dydaktyczny książki, w szczególności, by uprzystępnić ją studentowi filozofii. Zadbano więc o stosowne wprowadzenie nawet dość podstawowej wiedzy oraz liczne objaśnienia i przykłady. Chodziło o to, by książka stała się w jak największym stopniu dostępna studentowi pozbawionemu dogłębniejszego wykształcenia w zakresie matematyki. Ulepszając książkę, Burgess dodał też nieco nowego, ważkiego materiału. Jeśli można porównywać *Computability* *and Logic* z wcześniejszymi dziełami poświęconymi podobnej problematyce, to chyba warto by przywołać w tym miejscu inną klasyczną pracę, *Zarys logiki matematycznej* prof. Andrzeja Grzegorczyka, kończącego w tym roku 85 lat i mającego wielkie osiągnięcia w teorii efektywności. Pod pewnym względem i do pewnego stopnia można by powiedzieć, że *Computability and Logic* jest młodszą siostrzaną pracą bardziej technicznego i wymagającego głębszego przygotowania, a zarazem bardziej kompleksowego *Zarysu*. Jądro recenzowanej pracy stanowi szeroko rozumiana teoria efektywności, ale przy tej okazji czytelnik uzyskuje również sporo wiedzy z innych dziedzin klasycznej metalogiki.

Problematyka efektywności leży u podstaw samej idei logiki matematycznej. Idea ta pochodzi od średniowiecznego franciszkanina Rajmunda Lulla, który wierzył w możliwość znalezienia metody rozwiązywania wszelkich problemów teoretycznych przez wykonywanie szeregu elementarnych operacji na symbolach (w istocie Lullus wierzył, że odkrył tę metodę). Miał on nadzieję, że za pomocą metod rachunkowych uda mu się nawrócić muzułmanów na chrześcijaństwo, ostatecznie jednak poniósł śmierć męczeńską, co samo już świadczy o istnieniu granic efektywności metod rachunkowych.

Główną wartością idei Lulla jest to, że stały się one inspiracją dla Gottfrieda W. Leibniza, który do swoich licznych osiągnięć w różnych dziedzinach wiedzy dołączył to, że sformułował w XVII wieku program *mathesis universalis*, algorytmicznego rachunku, mającego pozwalać na rozwiązywanie wszelkich problemów teoretycznych. Leibniz miał mawiać, że nadejdzie dzień, gdy uczeni różniący się poglądami w jakiejkolwiek dziedzinie będą mogli powiedzieć po prostu: ,,Calculemus" – „Przeliczmy to", a następnie algorytmicznie znaleźć rozwiązanie interesującej ich kwestii. Idea rachunku logicznego w wydaniu Leibniza nie była już mrzonką, można powiedzieć, że zaczęła się wówczas realizacja tej idei, aczkolwiek nie zdawano sobie jeszcze sprawy z czyhających ograniczeń

Ponieważ pisma logiczne Leibniza pozostawały niezauważone aż do początku XX wieku, gdy ogłosił je L. Couturat, logika matematyczna musiała powstać raz jeszcze. Za jej początek można by uznać rok 1847, kiedy to ukazały się historyczne prace George'a Boole'a i Augusta De Morgana. W tym okresie, a także w następnym, zapoczątkowanym przez ogłoszenie *Begriffsschrift* Gottloba Fregego w 1879 r., zagadnienie efektywności nie pojawiało się wyraźnie. Boole i De Morgan zastosowali metody matematyczne w logice, Frege, Peirce i Peano uczynili metody matematyczne przedmiotem badań logicznych, nie zastanawiano się jednak specjalnie nad tym, czy ani gdzie przebiegają granice możliwości badanych metod. Również okres zapoczątkowany przez wydanie w latach 1910-1913 *Principiów* Alfreda N. Whiteheada i Bertranda Russella był czasem skrajnego optymizmu w odniesieniu do możliwości metod rachunkowych. Wprawdzie z tego czasu pochodzi jeden z najważniejszych wyników limitacyjnych – Twierdzenie Skolema i Löwenheima – należący do klasyki teorii modeli. Omawiany czas był raczej zdominowany przez logicyzm *Principiów* oraz Program Hilberta. Dopiero po 1930 r., wraz z jakże dynamicznym rozwojem metalogiki, również teoria efektywności wkroczyła na drogę imponującego rozwoju. Z tego czasu pochodzą wyniki Alonza Churcha, Kurta Gödla, Alfreda Tarskiego, Alana Turinga i innych. Wkrótce potem rozpoczęła się ważka debata nad filozoficzną interpretacją wielu doniosłych rezultatów z zakresu teorii efektywności.

Recenzowana praca nie zawiera stanowiska w debacie filozoficznej ani nie relacjonuje jej przebiegu. Stanowi jednak trudne do zastąpienia narzędzie tej debaty, ponieważ wprowadza zasadniczo w całość problematyki efektywności i stowarzyszonych z nią zagadnień w sposób tak przystępny, jak to tylko możliwe bez utraty fachowości wykładu.

Książka liczy 355 + 12 stron. Wykład składa się z trzech części: część pierwsza dotyczy ściśle rozumianej teorii obliczalności, część druga wprowadza do zagadnień metalogiki związanych z efektywnością metod rachunkowych, a w części trzeciej wyłożono pewne bardziej szczegółowe zagadnienia. Każdy rozdział zaopatrzono w zestaw ćwiczeń (jest to nowość obecnego wydania), a na końcu zamieszczono wskazówki ułatwiające rozwiązanie niektórych z nich. Ułatwieniem lektury jest siedmiostronicowy indeks. Najciekawszy jest jednak problem spisu bibliograficznego. Spis treści zapowiada jednostronicową bibliografię, mającą zawierać literaturę przywoływaną w tekście, ale bibliografii tej w istocie w książce nie ma. Brak dobrej, uwspółcześnionej bibliografii (właściwie brak jakiejkolwiek bibliografii) wypada zaliczyć do największych słabości książki.

Computability and Logic zaczyna się wprowadzeniem do niektórych zagadnień teorii mnogości, w szczególności do pojęcia zbioru przeliczalnego i zbioru nieprzeliczalnego, co będzie potem wykorzystane m.in. w teorii dowodu, a także omówieniem metod dowodzenia przekątniowego. Potem następuje szczegółowy wykład problematyki obliczalności i funkcji rekurencyjnych, z uwzględnieniem teorii Turinga i liczydła. Wprowadzone pojęcia służą w drugiej części do prezentacji badań metalogicznych. Po wprowadzeniu do składni i semantyki logiki pierwszego rzędu następuje wykład najważniejszych rezultatów dotyczących szeroko rozumianej efektywności w logice. Arytmetyzacja języka i obydwa główne wyniki Gödla, ważne wiadomości z zakresu teorii dowodu i teorii modeli stanowią jądro tej części książki. W części trzeciej przedstawiono wiele bardziej szczegółowych wyników, takich jak eliminacja skolemowska i inne metody upraszczania języka, twierdzenie interpolacyjne Craiga, twierdzenie Robinsona o niesprzeczności sumy dwóch teorii, zagadnienia związane z rozstrzygalnością i definiowalnością prawdy w arytmetyce, twierdzenie Ramseya, zastosowania logiki modalnej w teorii efektywności – na przykład logika Gödla-Löba – i inne jeszcze, doniosłe informacje, których zwykle brakuje w okrojonych kursach logiki.

Jak powiedziano, wartością książki jest to, że wielce umiejętnie godzi ona przystępność z fachową rzetelnością. Zobaczmy, w jaki sposób Boolos, Burgess i Jeffrey prowadzą wykład, na przykładzie tezy Churcha. Jest to jeden z bardzo nośnych filozoficznie problemów teorii efektywności, a przykłady takich zagadnień, wyłożonych w recenzowanej pracy, można by mnożyć. Z drugiej strony teza Churcha odwołuje do zarania teorii efektywności oraz samej idei rachunku logicznego – do Lulla i Leibniza.

Krytycy filozofii zwracają często uwagę na to, że spory filozoficzne nie mają końca. Twierdzą, że – inaczej niż, na przykład, w fizyce – nie można *rozstrzygnąć* żadnego kluczowego problemu filozoficznego, bez względu na to, jak długo i intensywnie tego rozstrzygnięcia by dociekano. W rzeczywistości sprawa jest bardziej skomplikowana. Istnieją problemy, które można rozstrzygnąć *zawsze*, jeśli tylko nie brak nam czasu i cierpliwości. Tak rzecz się ma choćby z zero-jedynkowym sprawdzaniem wyrażeń klasycznego rachunku zdań oraz z badaniem odczynu chemicznego za pomocą papierka lakmusowego. Wielka jest grupa tych problemów, które dają ledwie *nadzieję* na znalezienie rozstrzygnięcia, aczkolwiek raz znalezione, rozstrzygnięcie to nie może budzić wątpliwości. Tutaj wypada wymienić poszukiwanie dowodów zaawansowanych twierdzeń logicznych i matematycznych. Wreszcie, pracując nad niektórymi zagadnieniami, trzeba liczyć się z tym, że się nad nimi posiwieje, jak Jan z Salisbury nad uniwersaliami.

Bez wątpienia wyjątkowe miejsce w całej wiedzy zajmuje pierwsza z wymienionych grup problemów. Problemy te nazywają się problemami *rozstrzygalnymi*. Dla każdego z takich problemów istnieje *efektywna* metoda ich rozwiązywania, to znaczy metoda, która zawsze daje ostateczną odpowiedź, i to w skończonej liczbie prostych, niebudzących wątpliwości kroków. Owe proste, niebudzące wątpliwości kroki to w istocie rzeczy kroki bezpośrednio empiryczne. Jeśli w chemii rozstrzygniecie może się opierać na takich danych zmysłowych, jak barwa papierka lakmusowego, to w logice i matematyce chodzić będzie o empirycznie uchwytne operacje na zewnętrznym kształcie symboli, które odnoszą się do logicznych i matematycznych obiektów. Tak jest z przywołanym sprawdzaniem zero-jedynkowym, z dodawaniem i mnożeniem pisemnym, badaniem zbioru pierwiastków rzeczywistych trójmianu kwadratowego za pomocą wyróżnika itd. Chociaż brak nam bezpośredniego dostępu do rzeczywistości matematycznej i logicznej, to mamy bezpośredni dostęp zmysłowy do napisów języka matematycznego. Mówiąc wyłącznie o zmianach kształtu tych napisów, możemy rozwiązać, rozstrzygnąć niektóre problemy. Lullus i Leibniz wierzyli, że może to dotyczyć wszelkich zagadnień. My jednak, żyjący w epoce nierozstrzygalności, wiemy, że to jest niemożliwe. Powstaje zatem pytanie, gdzie leży granica rozstrzygalności. Odpowiedzią na to pytanie, w odniesieniu do matematyki i logiki, jest teza Churcha.

Podstawowym pojęciem, które należy wprowadzić po to, by móc sformułować i zbadać tezę Churcha, jest pojęcie funkcji obliczalnej. Za funkcje obliczalne powinny być uznane te funkcje, w wypadku których problem obliczenia ich wartości dla dowolnego argumentu jest rozstrzygalny. Istnieje zatem efektywna metoda obliczania wartości tych funkcji. *Computability and Logic* wprowadza intuicyjne pojęcie funkcji obliczalnej (*effectively computable*) jako takiej funkcji argumentów naturalnych, że dla dowolnego argumentu można obliczyć wartość tej funkcji w skończonej liczbie określonych instrukcji. Owe instrukcje muszą spełniać dwa warunki: ich zastosowanie nie powinno wymagać żadnej informacji płynącej z zewnętrznego źródła ani nie powinno wymagać żadnej pomysłowości (s. 63). W polskiej tradycji, jak powiedzieliśmy, charakterystyka intuicyjnego pojęcia funkcji obliczalnej odwołuje się zwykle do pojęcia empirycznie dostępnej zmiany zewnętrznego kształtu napisu. Pojęcie funkcji obliczalnej zaproponowane w recenzowanej pracy ma prawdopodobnie od razu kierować intuicje ku teorii sztucznej inteligencji. Nie ulega wątpliwości, że w zamierzeniu konstruujących obydwa te pojęcia są równozakresowe, chodzi o te same funkcje obliczalne. Z drugiej strony samo intuicyjne pojęcie obliczalności i efektywności, używane dotąd głównie przez logików-matematyków, wciąż czeka na filozoficzne naświetlenie. Odwołanie się do pojęcia obliczalności sugerującego związek ze sztuczną inteligencją jest ciekawym pomysłem. Chodzi o to, że wiele wskazuje, iż funkcje obliczalne to dokładnie te funkcje, które zasadniczo mogą być zadane maszynie liczącej, a zatem, przynajmniej potencjalnie, leżą w zasięgu sztucznej inteligencji.

Autorzy odróżniają jeszcze funkcje częściowe (*partial*) od całościowych (*total*). Funkcja jest całościowa, gdy jej dziedziną jest cały zbiór dodatnich liczb całkowitych, natomiast jest częściowa, gdy jej dziedziną jest pewien podzbiór właściwy tego zbioru. Mamy tutaj do czynienia z modyfikacją utartego zwyczaju słownego (co nie wpływa jednak na istotę teorii), ponieważ zwykle, mówiąc o funkcji liczb całkowitych dodatnich, mamy na myśli funkcję całościową. W omawianej książce nie jest to przesądzone (s. 7).

Drugim pojęciem, które odgrywa istotną rolę w tezie Churcha, jest pojęcie funkcji (ogólnie) rekurencyjnej (*recursive*). Znowu przeciwnie niż w głównych polskich opracowaniach najpierw jest definiowana funkcja pierwotnie rekurencyjna, a następnie za pomocą jej pojęcia określane jest pojęcie funkcji (ogólnie) rekurencyjnej (s. 63-71). Ta definicja ma już charakter formalny, i to rekurencyjny. Jest jednak zbyt dobrze znana, by ją w całości przytaczać. Przypomnijmy tylko, że należy wybrać kilka najprostszych funkcji, które są uznane za funkcje rekurencyjne, a następnie określić operacje, które nie wyprowadzają poza zbiór funkcji rekurencyjnych. Na przykład operacja superponowania (składania) nie wyprowadza poza zbiór funkcji rekurencyjnych, tzn. superpozycja (złożenie) dwóch funkcji rekurencyjnych sama jest funkcją rekurencyjną. Na podstawie tak zbudowanej definicji można uzasadnić, że wszystkie funkcje (ogólnie) rekurencyjne są obliczalne.

Mianem *tezy Churcha* określa się tutaj implikację odwrotną do ostatnio wymienionego stwierdzenia, odniesionego do funkcji całościowych (*total*): wszystkie całościowe (*total*) funkcje obliczalne są (ogólnie) rekurencyjne, czyli spośród funkcji całościowych *tylko* funkcje (ogólnie) rekurencyjne są funkcjami obliczalnymi. Stwierdzenie to rozciągnięte również na funkcje częściowe (*partial*) nosi nazwę rozszerzonej albo wzmocnionej tezy Churcha (s. 71).

Sporo uwagi poświęcono w recenzowanej książce trudnej problematyce uzasadnienia tezy Churcha. O ile stosunkowo łatwo można pokazać, choćby metodą cechy dziedzicznej, że wszystkie funkcje ogólnie rekurencyjne są funkcjami obliczalnymi, o tyle odwrotna implikacja nie poddaje się zwykłym metodom dowodowym. Tradycyjnie pokazuje się, że funkcje wielu ważnych typów, jeśli są obliczalne, są też funkcjami ogólnie rekurencyjnymi. Możliwość ostatecznego i w pełni ogólnego dowiedzenia tezy Churcha jest jednak dyskusyjna. Wydaje się, że właśnie tutaj jest duże pole do popisu dla filozofów. Bliższa analiza samej tezy Churcha, jej założeń i konsekwencji byłaby pożądana. Nie należałoby chyba też bać się stawiania pytań o znaczenie tezy Churcha dla programu Lulla i Leibniza, pytanie o to, co w istocie rzeczy można policzyć, wypada zaliczyć do najdonioślejszych światopoglądowo. To pytanie – w całej jego interdyscyplinarności i najwyższym zawikłaniu – oczekuje ze wszech miar na większe zainteresowanie filozofów. A jest to tylko jeden przykład, wybrany z książki *Computability and Logic*.

Wypada wyrazić nadzieję, że recenzowana książka – wydana już po raz czwarty i tym razem specjalnie uprzystępniona – przyczyni się nie tylko do wzmocnienia bardziej zaawansowanej kultury logicznej, ale nadto zainteresuje filozofów rachunkową stroną problematyki efektywności, co może z czasem zaowocować ważkimi analizami filozoficznymi.

Marcin Tkaczyk
Katedra Logiki KUL

Marek Lechniak, *Elementy logiki dla prawników*, Lublin: Wydawnictwo KUL 2006, ss. 193. ISBN 978-83-7363-440-4.

Niektórzy mówią, że największym osiągnięciem naukowym współczesnego nauczyciela logiki jest nienapisanie podręcznika. Liczba podręczników elementarnej logiki jest bowiem rzeczywiście ogromna, a zawartość merytoryczna kolejnych propozycji nie zawsze pozwala na natychmiastowe zrozumienie ich celowości[1]. Nie wolno jednak zbywać nowych podręczników milczeniem, ponieważ odzwierciedlają one stan trwającej wśród logików debaty – częściowo uzewnętrznionej, częściowo zaś przyjmującej postać wewnętrznej lub nawet podświadomej rozterki – na temat właściwego sposobu nauczania Uniwersalnej Nauki Pomocniczej. Będąca niekiedy przedmiotem utyskiwania liczba podręczników świadczy o tym, że wspomniana debata jest rozogniona. Ogłoszenie recenzowanego opracowania M. Lechniaka *Elementy logiki dla prawników* można więc odczytywać zarówno jako dostarczenie studentowi kolejnej

[1] Szerzej na ten temat zob. M. Tkaczyk, [Rec.:] Daniel A. Bonevac, *Deduction. Introductory Symbolic Logic*, „Roczniki Filozoficzne” 55 (2007), nr 1, s. 319.