ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LV, numer 2 – 2007

KRZYSZTOF WÓJTOWICZ

DOWÓD MATEMATYCZNY Z PUNKTU WIDZENIA FORMALIZMU MATEMATYCZNEGO

CZĘŚĆ I

UWAGI WSTĘPNE

Niniejszy tekst stanowi pierwszą część artykułu poświęconego ewolucji rozumienia pojęcia dowodu matematycznego. Problem ten przestawiam w kontekście rozwoju stanowiska formalizmu matematycznego, a więc w pewnym kontekście historycznym, jednak praca nie ma charakteru historycznego.

Analiza rozwoju stanowiska formalistycznego pozwoli na ukazanie procesu odchodzenia od poglądu, w myśl którego matematyczna argumentacja winna opierać się na intuicji, na rzecz poglądu, zgodnie z którym ta argumentacja może mieć charakter czysto formalny (zaś rola intuicji zostaje mocno zredukowana). Natomiast „produktem ubocznym” będzie też wyjaśnienie pewnych często spotykanych uproszczeń (wręcz nieporozumień) związanych z uproszczonym rozumieniem stanowiska formalistycznego. Niekiedy bowiem utożsamia się formalizm ze skrajną jego wersją, w myśl której matematyka to gra niezinterpretowanych symboli, która odbywa się zgodnie z arbitralnie ustalonymi regułami. Takie rozumienie formalizmu może sprawiać wrażenie, że formalizm jest stanowiskiem filozoficznie jałowym i wręcz absurdalnym. Tu chcę wskazać mniej skrajne jego warianty, które pozwalają na ukazanie ciekawych aspektów problemu dowodu matematycznego.

Dr hab. KRZYSZTOF WÓJTOWICZ, prof. SWPS – Instytut Filozofii Szkoły Wyższej Psychologii Społecznej (SWPS); adres do korespondencji: ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa; e-mail: kwojtowicz@swps.edu.pl

2. FORMALIZM W MATEMATYCE – UWAGI OGÓLNE

Mówiąc o formalizmie matematycznym, będę miał na myśli pewien sposób myślenia o matematyce, pewną wizję tego, czym matematyka jest i na czym polega jej uprawianie. Skorzystam z charakterystyki podanej przez Detlefsena, aby wskazać najważniejsze punkty, niejako konstytutywne dla formalistycznego sposobu myślenia o matematyce. Zdaniem Detlefsena wyróżnikiem formalizmu jest bowiem:

1. Odrzucenie (dość powszechnego do pewnego momentu w historii matematyki) przekonania o tym, że to intuicja i wiedza geometryczna stanowią fundament matematyki.

2. Odrzucenie klasycznej koncepcji dowodu matematycznego i wiedzy matematycznej, którą Detlefsen określa jako koncepcję genetyczną. Zgodnie z tą koncepcją uzyskujemy wiedzę na temat przedmiotu badań, gdy znamy przyczynę – w przypadku matematyki chodziłoby tutaj o przyczynę formalną.

3. Odrzucenie poglądu, w myśl którego w trakcie dowodu konieczny jest – mówiąc metaforycznie – stały ogląd intelektualny przedmiotu, którego dany dowód dotyczy. Ujęcie formalistyczne postuluje raczej abstrahowanie od intuicyjnego oglądu i od problemu znaczenia.

4. Uznanie, iż język pełni w rozumowaniach matematycznych funkcję nie tylko reprezentacjonistyczną, ale również instrumentalistyczną. Służy bowiem nie tylko do przekazywania myśli, ale również do dokonywania pewnych operacji, które nie muszą być w pełni zinterpretowane, a mimo to pozwalają na wzbogacanie naszej wiedzy matematycznej.

5. Detlefsen wyróżnia również składową kreatywistyczną: matematyk ma pełną swobodę w tworzeniu narzędzi, które będą pomocne w osiąganiu jego celów poznawczych (tj. w rozwiązywaniu problemów matematycznych)[1]. (DETLEFSEN 2005, 236-237).

Powyższych punktów nie będę poddawał osobnej, systematycznej analizie, ale będę je traktował jako punkty orientacyjne w prowadzonych dalej

[1] Ten warunek rozumiem w sposób następujący: jeśli mamy przekonanie, iż to intuicja ukazuje nam pewne obiektywne prawdy, to tym samym musimy zaakceptować daleko idące ograniczenia dotyczące tworzenia narzędzi matematycznych – muszą być one zgodne z naszymi przekonaniami dotyczącymi rzeczywistości matematycznej. Jeśli jednak uważamy, że teorie matematyczne są konstruowane w sposób formalny, kwestia zaś ich interpretacji (a już tym bardziej obiektywnej prawdziwości) nie jest istotna, to wtedy nie podlegamy żadnym ograniczeniom – z wyjątkiem oczywiście ograniczeń o charakterze czysto metodologicznym.

rozważaniach. Podana wyżej charakterystyka ma charakter raczej metodologiczny niż metafizyczny – tak rozumiane stanowisko formalizmu jest do pogodzenia z (przynajmniej słabą) formą realizmu matematycznego. Nie będę więc w artykule podejmował problemów ontologicznych, skupiając się na zagadnieniach o charakterze metodologicznym.

Ponieważ w niniejszym artykule ograniczam się do czasów nowożytnych, więc naturalnym punktem wyjścia – w kontekście problemu intuicji matematycznej – będzie stanowisko Kartezjusza. Jest ono charakterystyczne (a nawet wręcz modelowe) dla „treściowego" ujęcia rozumowań matematycznych (od którego stopniowo odchodzono w czasach nowożytnych).

3. KARTEZJUSZ – INTUICJA JAKO ŹRÓDŁO WIEDZY

Dla podjętego w niniejszym artykule problemu fundamentalne znaczenie ma przyjęte przez Kartezjusza kryterium prawdy, które stanowi kamień węgielny jego epistemologii. Podstawą naszego poznania ma być zdolność do intelektualnego ujmowania jako oczywistych pewnych prawd, które jawią się nam w sposób wyraźny i jasny. Mówi o tym pierwsza z podanych przez Kartezjusza czterech fundamentalnych dla naszego myślenia zasad[2]. To kryterium znajduje oczywiste zastosowanie w matematyce: prawdy matematyczne jawią się nam w jasny i wyraźny sposób, i to właśnie stanowi gwarancję ich prawdziwości.

Źródłem wiedzy matematycznej (i w ogóle wiedzy) w ujęciu Kartezjusza jest więc nasz rozum. Podstawowe czynności naszego umysłu, za pomocą których możemy – bez ryzyka błędu – dojść do poznania danej rzeczy, to intuicja i dedukcja. Intuicję Kartezjusz określa jako „nie zmienne świadectwo zmysłów, lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy" (DESCARTES 1958, 12). Intuicyjne poznawanie (które obejmuje w szczególności poznanie matematyczne) stanowi więc pewien czysto

[2] „Nie przyjmować nigdy żadnej rzeczy za prawdziwą, zanim jej nie poznam z całą oczywistością jako takiej: to znaczy unikać starannie pośpiechu i uprzedzeń i nie obejmować swoim sądem niczego poza tym, co się przedstawia memu umysłowi tak jasno i wyraźnie, iż nie miałbym żadnego powodu podania tego w wątpliwość" (DESCARTES 2002, 17).

intelektualny akt. Mówiąc metaforycznie, jest to bezpośrednie widzenie oczyma rozumu (Kartezjusz mówi, że poznanie to pochodzi „ze światła samego rozumu").

Drugą podstawową czynnością naszego umysłu jest dedukcja, dzięki której można z koniecznością, w sposób pewny wysnuć wniosek z rzeczy już wiadomych. Jednakże dedukcja nie jest bynajmniej przeciwstawiana intuicji. Również w dedukcji mamy bowiem do czynienia z elementami intuicyjnego postrzegania: do prowadzenia operacji dedukcyjnych konieczne jest mianowicie intuicyjne postrzeganie prawdziwości dedukowanego w danym kroku twierdzenia (można by też powiedzieć: oczywistości i prawomocności danego kroku). Kartezjusz pisze tu o ciągłym ruchu myśli, w ramach którego w intuicyjny i wyraźny sposób ujmujemy poszczególne etapy (człony) rozumowania. Pisze wyraźnie o tym, że podstawowe prawdy (pierwsze zasady) poznajemy przy pomocy intuicji, natomiast wnioski z tych zasad przy pomocy dedukcji (DESCARTES 1958, 13-14).

Dla Kartezjusza metoda matematyczna stanowi wzór racjonalnego poznania. Podkreślić należy wyraźnie, że chodzi o metodę „treściową": za intuicyjnie oczywiste muszą być uznane nie tylko podstawowe założenia, lecz również wszystkie kroki procesu dedukcyjnego muszą być intuicyjnie uchwytne jako prawomocne[3]. Dowody matematyczne w ujęciu Kartezjusza nie mogą więc mieć charakteru czysto formalnego. Formalne, symboliczne operacje mogą co najwyżej stanowić wsparcie dla argumentacji opartej na intuicyjnym postrzeganiu pewnych prawd i prawomocności pewnych kroków dowodowych. Fundament poznania matematycznego stanowi intuicyjny wgląd w przedmiot analiz[4]. Ten postulat intuicyjnego, treściowego ujmowania wszystkich etapów rozumowania jest charakterystyczny dla pewnego sposobu myślenia o dowodzie matematycznym – sposobu myślenia odrzucanego przez zwolenników (szeroko rozumianego) formalistycznego podejścia do matematyki.

Kartezjusz zwraca uwagę nie tylko na wymóg, aby każdy krok naszego rozumowania był postrzegany jako oczywisty[5], ale też na to, że powinniśmy

[3] „Wszelako owa oczywistość i pewność intuicji wymagana jest nie tylko dla samych wypowiedzi, ale także dla jakichkolwiek rozumowań" (DESCARTES 1958, 13).

[4] To racjonalne poznanie dotyczy nie tylko sfery prawd matematycznych, ale stanowi fundament naszego poznania. Poznanie matematyczne ma zatem niejako wzorcowy charakter.

[5] „Jeśli w szeregu rzeczy, będących przedmiotem badania, napotyka się coś, czego nasz umysł nie może dość dobrze ująć intuicyjnie, należy przy tym zatrzymać się i nie badać rzeczy następnych, ale powstrzymywać się od daremnej pracy" (DESCARTES 1958, 36).

umieć ująć strukturę tego dowodu jako pewnej całości[6]. O tym warunku „globalnej ogarnialności" (*global surveyability*) pisze Bassler (BASSLER 2006). Analizuje tam problem, czy dowody matematyczne dają się „ogarnąć" (analizuje m.in. dowód twierdzenia o czterech barwach), rozróżniając „ogarnialność lokalną" (oczywistość poszczególnych kroków) od globalnej (oczywistość rozumowania jako całości, które intuicyjnie ujmujemy). Postulat globalnej ogarnialności dowodów matematycznych przypisuje właśnie Kartezjuszowi[7].

Poglądy Kartezjusza stanowią modelowy przykład treściowego ujęcia dowodu matematycznego, od którego matematyka nowożytna zacznie już niebawem odchodzić. Kartezjusz w wyraźny sposób sformułował założenia leżące u podłoża takiego sposobu myślenia. Warto pamiętać, że Kartezjusz nie oddziela wiedzy matematycznej jako szczególnego, wyróżnionego fragmentu naszej wiedzy, który jest niezależny od np. wiedzy dotyczącej świata fizycznego. Nie ma więc rozróżnienia np. na empiryczną wiedzę dotyczącą świata fizycznego oraz wiedzę czysto racjonalną (analityczną, aprioryczną) wiedzę matematyczną. Zauważmy na przykład, że – zdaniem Kartezjusza – podstawowe prawdy dotyczące rozciągłości (jako kategorii charakteryzującej substancję materialną) są poznawane na drodze rozumowej. Można powiedzieć, że prawdy geometrii dotyczą realnego świata (ale w innym sensie niż później u Kanta). U Kartezjusza intuicyjne poznanie, „wgląd" w prawdziwość dotyczy więc nie tylko samej matematyki, ale obejmuje znacznie szerszą sferę. Można powiedzieć, że podział na poznanie matematyczne i niematematyczne nie jest ostry. Takie ujęcie pozwala rozwiązać problem pogodzenia aprioryczności matematyki z jej stosowalnością. W ujęciu Kartezjusza to rozwiązanie można sformułować następująco: aprioryczność matematyki nie budzi wątpliwości – prawdy matematyki poznajemy bowiem na mocy „światła czystego rozumu", które pozwala nam w jasny i wyraźny sposób

[6] „Dlatego przebiegnę je kilkakrotnie swego rodzaju ciągłym ruchem wyobraźni, która widzi od razu człony poszczególne w chwili, gdy do innych przechodzi, aż się nauczę od pierwszego stosunku do ostatniego tak szybko przechodzić, iż będę mógł niemal zupełnie bez pomocy pamięci objąć jednym spojrzeniem całość" (DESCARTES 1958, 31-32). „Dla uzupełnienia nauki należy wszystkie i poszczególne rzeczy, które odnoszą się do naszego celu, przeglądnąć ciągłym i nieprzerwanym ruchem myśli i objąć je w dostatecznym i uporządkowanym wyliczeniu" (DESCARTES 1958, 31).

[7] Fallis (2003), analizując problem luk w dowodach matematycznych, mówi o *Cartesian story*, w myśl której dowody są takich luk pozbawione, matematyk zaś jest w stanie ująć wszystkie kroki dowodowe.

postrzegać prawdziwość jej twierdzeń. Natomiast fakt, że matematyka stosuje się do opisu świata, wynika stąd, że podstawowym atrybutem substancji cielesnej jest rozciągłość, kategoria rozciągłości zaś jest podstawowa dla naszego poznawania prawd geometrycznych[8]. Intuicja pozwala nam na dotarcie do podstawowych prawd matematycznych, ale również do podstawowych prawd metafizycznych (w szczególności istnienia Boga, naszej jaźni, świata zewnętrznego). Nasza wiedza matematyczna wpisana jest więc w naturalny sposób w ten cały system przekonań.

4. „LINGWISTYCZNY INSTRUMENTALIZM" BERKELEYA

Charakterystyczne dla stanowiska formalistycznego jest przyjęcie pewnego poglądu dotyczącego języka (w szczególności języka matematycznego) – a mianowicie poglądu, że język może stanowić narzędzie poznania (w szczególności poznania matematycznego), mimo że nie pełni (a przynajmniej nie w całości) funkcji deskryptywnej. W takim ujęciu dopuszczalne jest czysto symboliczne, formalne użycie wyrażeń językowych, nie powiązane z ich własnościami semantycznymi. Rola języka jako narzędzia poznawczego wykracza więc poza reprezentację rzeczywistości pozajęzykowej, poza wyrażanie pewnych idei, pojęć; język może funkcjonować również jako narzędzie innego typu. Taki sposób myślenia jest istotny z punktu widzenia matematycznego formalizmu – i taki sposób myślenia odnajdujemy w koncepcji Berkeleya.

Koncepcja filozoficzna Berkeleya jest niebanalna i może się jawić wręcz jako dziwna: krytyka pojęcia materii, zasada *esse est percipi*, połączenie immaterialistycznej, teistycznej metafizyki z naukowym instrumentalizmem – to sprawia na niektórych wrażenie swoistej filozoficznej ekstrawagancji. Jednakże sam Berkeley utrzymywał, że jego filozofia oparta jest na pewnych czysto zdroworozsądkowych analizach, a przyświecała jej idea usunięcia pewnych nieporozumień. To, że nie jesteśmy w stanie tego faktu dostrzec, wynika stąd, że padamy ofiarą językowych złudzeń – w szczególności dok-

[8] Epistemologia matematyki jest więc ufundowana w całości na systemie Kartezjusza, w którym – w ostatecznym rozrachunku – należy oprzeć się na zaufaniu do Boga, który nie jest zwodzicielem, i wyposażył nas w zdolności poznawcze umożliwiające nam poznanie świata. „Przyrodzone światło rozumu" daje nam więc poznanie prawd matematycznych, ale zarazem daje nam wiedzę o świecie fizycznym.

tryny dotyczącej abstrakcyjnych idei ogólnych, która z kolei ma związek z naszym błędnym rozumieniem roli języka[9]. Berkeley – jako zdecydowany nominalista – odrzuca tę doktrynę. Jego analizy mają w znacznej części charakter analiz semantycznych – w szczególności jego zasadę *esse est percipi* można interpretować jako eksplikację sensu terminu „istnienie". Stanowisko Berkeleya jest podobne do neopozytywistycznego poglądu, w myśl którego znaczeniem zdania jest metoda jego weryfikacji. Berkeley pyta bowiem o to, jak rozumieć nasze tezy dotyczące istnienia przedmiotów fizycznych, i odpowiada, że można je rozumieć tylko jako tezy dotyczące struktury dostępnych nam danych zmysłowych. Sens wypowiedzi o istnieniu jest więc dany poprzez opisanie metody weryfikacji tych wypowiedzi, i nic więcej się za nimi nie kryje. W duchu (radykalnego) pozytywizmu jest też utrzymane stanowisko Berkeleya dotyczące statusu praw naukowych. Używane w fizyce terminy (takie jak np. „grawitacja") pojawiają się tam z powodu ekonomii myślenia, dla wygody: pozwalają one skutecznie klasyfikować zjawiska i formułować przewidywania dotyczące zachowania się ciał. Nie należy jednak wyciągać stąd wniosku, że dotyczą one faktycznie istniejących przedmiotów czy też realnie przysługujących tym przedmiotom cech. To, że dana teoria naukowa sprawdza się w praktyce, nie znaczy bynajmniej, że mamy tu do czynienia ze zgłębieniem natury rzeczy, że oto nasz umysł w ten sposób osiąga absolutną prawdę[10]. Prawa fizyki dotyczą jedynie struktury naszych wrażeń, które są w nas odciskane przez Boga w pewnym określonym porządku, który jednak bynajmniej nie ma koniecznego charakteru. Zdaniem Berkeleya bowiem, wiedza naukowa nie ma polegać na ukazywaniu takich ukrytych przyczyn, ale na odkryciu pewnych prawidłowości o charakterze ogólnym, które pozwolą nam na wyjaśnienie poszczególnych zdarzeń jako skutków tych ogólnych reguł (BERKELEY 2005/105, 66).

Oczywiście Berkeley nie kwestionuje roli matematyki w nauce. Twierdzi jednak, że wiedza matematyczna ma charakter czysto instrumentalny i że jej wartość polega właśnie jedynie na użyteczności w nauce. Dociekania mate-

[9] „Potrzeba nam tylko odsunąć zasłonę słów, aby posiąść najdorodniejsze drzewo poznania, którego owoc jest wyborny i znajduje się w zasięgu naszej ręki" (BERKELEY 2005/24, 21).

[10] „Mechanik posługuje się pewnymi abstrakcyjnymi i ogólnymi terminami, wyobrażając sobie w ciałach siłę, działanie, przyciąganie [...], które dla teorii, formuł, a także obliczeń dotyczących ruchu są wielce pożyteczne, chociaż na próżno by ich szukać w rzeczywistości i w faktycznie istniejących ciałach, podobnie jak na próżno by szukać tych rzeczy, które są fikcjami stworzonymi przez geometrów na drodze matematycznej abstrakcji" (*De motu*, cyt. za: COPLESTON 1997, 263).

matyczne nie dotyczą więc bynajmniej żadnych fundamentalnych prawd, mają charakter pomocniczy w stosunku do nauki. O czystej matematyce Berkeley wypowiada się w sposób radykalny, przypisując im status zwykłych łamigłówek, które nie mają żadnego znaczenia z praktycznego punktu widzenia (BERKELEY 2005/119, 73). Jako działalność oderwana od zastosowań praktycznych matematyka nie ma więc żadnej wartości[11]. Podobne stanowisko zajmuje Berkeley w odniesieniu do geometrii – jest to więc stanowisko zdecydowanie różne od stanowiska Kartezjusza, przekonanego o tym, że badania geometryczne dostarczają nam wiedzy o naturze przestrzeni. Taką tezę Berkeley odrzuca, w szczególności za absurdalne uważa twierdzenie o nieskończonej podzielności przestrzeni, uważając rzekomo poznawane przez nas rozciągłości za nasze własne idee (BERKELEY 2005/124, 76). Rozciągłość istnieje tylko w naszych wyobrażeniach. Źródłem tego (i nie tylko tego) nieporozumienia jest doktryna dotycząca istnienia abstrakcyjnych idei ogólnych[12]. Odrzucenie tezy o tym, iż geometria opisuje faktycznie naturę przestrzeni fizycznej, bynajmniej nie narusza jednak – zdaniem Berkeleya – podstaw geometrii. Berkeley jest bowiem instrumentalistą i wartość nauki upatruje wyłącznie w jej użyteczności, twierdzi więc, że to, co ma zastosowanie w praktyce, możemy uznać za obowiązujące na gruncie przyjętych przez nas zasad (BERKELEY 2005/131, 79).

W takim ujęciu matematyka nie ma oczywiście charakteru wiedzy obiektywnej, nie dotyczy żadnej obiektywnie istniejącej rzeczywistości. Twierdzenia o liczbach *de facto* nie dotyczą żadnych bytów abstrakcyjnych, lecz nazw i znaków. Badamy je ze względu na to, że reprezentują przedmioty, które liczymy (BERKELEY 2005/122, 75). Teoretyczne, oderwane od zastosowań badania matematyczne są więc zajęciem bezużytecznym, podobnym do czysto werbalnych sporów.

Instrumentalistyczne stanowisko Berkeleya ma związek z jego koncepcją języka. Zdaniem Berkeleya język matematyczny służy nam jedynie do uzyskiwania pewnych wyników, pomimo że sam jest pozbawiony interpretacji. W jednej ze swoich prac Berkeley posługuje się obrazowym porównaniem matematyki do gry w karty: terminy matematyczne pełnią funkcję żetonów

[11] „[...] nauka o liczbach powinna być całkowicie podporządkowana praktyce i [...] staje się ona jałowa i błaha, kiedy widzi się w niej jedynie przedmiot czystej spekulacji" (BERKELEY 2005/120, 74).

[12] „Tego, którego umysł opętała teoria abstrakcyjnych idei ogólnych, łatwo przekonać o tym, że ... abstrakcyjnie podzielna rozciągłość jest nieskończenie podzielna" (BERKELEY 2005/125, 76).

w tej grze. W trakcie samej gry możemy nimi manipulować, nie biorąc pod uwagę ich (ewentualnej) interpretacji, która zostanie nadana dopiero pod koniec gry.

Berkeley mówi tu więc o sytuacji, w której w rozumowaniach (w szczególności rozumowaniach matematycznych) możemy opierać się nie na semantycznych własnościach wyrażeń, ale jedynie na pewnych czysto syntaktycznych regułach (na podobieństwo owych żetonów, na których w trakcie gry w karty operujemy w sposób czysto syntaktyczny, abstrahując od ich interpretacji[13]. Wyraźnie o tym mówi następujący fragment: „[...] według rozpowszechnionego mniemania jedynym zadaniem języka jest komunikacja naszych idei i [...] każda nazwa obdarzona znaczeniem reprezentuje naszą ideę. [...] wystarczy chwila namysłu, aby zdać sobie sprawę, że nie jest rzeczą konieczną (nawet w najściślejszych rozumowaniach), aby nazwy obdarzone znaczeniem i reprezentujące idee, przy każdym użyciu wywoływały w umyśle te idee, które zastępują; bo przy czytaniu i w rozmowie używa się nazw przeważnie tak jak liter w algebrze, w której, choć każda cyfra oznacza jakąś szczegółową wielkość liczbową, nie jest koniecznym dla poprawności wyliczeń, aby na każdym kroku każda cyfra przywoływała na myśl tę szczegółową wielkość, którą reprezentuje” (BERKELEY 2005/19, 17-18).

Nie chcę tu podejmować problemu, czy znajomość reguł użycia „wyrażeń karcianych” jest *de facto* rozumieniem. Za istotne w użytym przez Berkeleya przykładzie żetonów uważam stwierdzenie, że nie jest konieczne ciągłe skupienie uwagi rozumującego podmiotu na znaczeniu symboli, którymi operujemy. To stoi zaś w wyraźnej sprzeczności z treściową (rozumiejącą) koncepcją dowodu matematycznego, w myśl której prowadzenie rozumowania matematycznego wymaga skupienia uwagi na semantycznych aspektach wyrażeń. Zdaniem Kartezjusza poszczególne kroki rozumowań dedukcyjnych są uprawomocnione przez intuicyjny wgląd i taki intuicyjny wgląd jest warunkiem koniecznym poprawności rozumowania matematycznego: dedukcja również opiera się na intuicji. Dla Berkeleya taki wgląd jest zbędny; rozumowania matematyczne mogą być prawomocne niezależnie od tego, czy poszczególnym krokom możemy przypisać intuicyjną interpretację. Pewne wyrażenia języka matematycznego mogą funkcjonować, pomimo że nie mają

[13] Tu należy dodać: na zewnętrznej interpretacji. Jeśli posługujemy się żetonami, to nie musimy wiedzieć, czy żeton z napisem np. „LXV” zostanie zamieniony na 65 euro czy 65 owiec. Konieczna jest natomiast oczywiście znajomość reguł posługiwania się żetonem w trakcie tej gry (np. żeton „LXV” jest wart więcej niż żeton „XXX”).

one odniesienia pozajęzykowego (a nawet nie towarzyszą im żadne idee)[14]. Mamy więc do czynienia z oderwaniem rozumowań matematycznych od semantycznych aspektów wyrażeń. Język matematyczny stanowi jedynie pomocniczy konstrukt (uwaga ta dotyczy zresztą nie tylko języka matematycznego, ale w ogóle języka nauki)[15].

Z punktu widzenia Berkeleya problem uzasadniania tez matematycznych stanowi wyłącznie problem praktyczny, dotyczący wyboru użytecznych narzędzi ułatwiających osiąganie naszych celów poznawczych. W przypadku Berkeleya chodzić tu będzie więc jedynie o poznanie porządku, w jakim jawić się nam będą zjawiska. Zasady matematyki pełnią funkcję pomocniczą, i to właśnie – ale tylko to! – stanowi dla nich uprawomocnienie. Podstawowe zasady matematyczne nie są uzasadniane poprzez odwoływanie się do intuicji; kryterium ich przyjęcia nie stanowi kartezjańska oczywistość, ale praktyczne znaczenie w nauce[16]. Rozumowania matematyczne przypominają posługiwanie się wspomnianymi wcześniej żetonami; twierdzeniom matematyki nie można przypisywać statusu prawd obiektywnych, dotyczących pozajęzykowej rzeczywistości, a jedynie status wygodnych konwencji. Operowanie językiem zaś nie wiąże się bynajmniej z przypisywaniem (wszystkim) wyrażeniom interpretacji ani z intuicyjnym rozumieniem tych wyrażeń. Jest to stanowisko zdecydowanie różne od poglądów Kartezjusza, dla którego rękojmię prawomocności stosowania matematyki stanowi właśnie swoista intuicja – zdolność naszego intelektu do bezpośredniego ujmowania podstawowych prawd oraz prawomocności rozumowań. Różnice między stanowiskiem Berkeleya a Kartezjusza można uznać za swoisty model różnic między dwoma różnymi paradygmatami uprawiania matematyki, które (roboczo) nazwę tu „formalistycznym" i „rozumiejącym".

---

[14] Berkeley pisze, że używamy pewnych symboli matematycznych, nawet jeśli nie jesteśmy w stanie utworzyć żadnych idei związanych z tymi symbolami – pisze tu o tym, że „znak algebraiczny, który określa pierwiastek z liczby ujemnej, jest używany w operacjach logistycznych, choć nie jest możliwe utworzenie idei takiej wielkości" (cyt. za: DETLEFSEN 2005, 267).

[15] Posługując się współczesną terminologią techniczną, można – jako ilustrację – podać tu przykład zjawiska nietwórczości (konserwatywności) teorii. Przypomnijmy, że teoria T* jest nietwórcza nad teorią T (ze względu na klasę zdań P), jeśli dowolne zdanie $\alpha \in P$, dowodliwe na gruncie teorii T*, jest też dowodliwe na gruncie teorii T. Można więc powiedzieć, że teoria T* może być używana do dowodzenia twierdzeń z klasy P, i przez to pełni pewną funkcję poznawczą, ale zarazem można ją traktować tylko jako pomocniczy, pozbawiony interpretacji instrument.

[16] Nie chcę tu twierdzić, że Berkeley negował to, że pewne fakty mogą nam się jawić jako oczywiste. Chodzi natomiast o fakt, że sama oczywistość zasad matematycznych nie stanowi bynajmniej gwarancji ich prawomocności. Teorie matematyczne zyskują bowiem swoje uprawomocnienie jedynie przez zastosowania w nauce.

Stanowisko Berkeleya stanowi niewątpliwie inspirację dla formalistycznego sposobu patrzenia na matematykę. Język matematyczny – w tym ujęciu – nie opisuje „wiecznych i niezmiennych prawd matematycznych", ale stanowi pewnego rodzaju praktyczne narzędzie, służące do ekonomicznego i sprawnego zapisywania rozumowań naukowych.

5. PEACOCKE I PASCH – ALGEBRA I GEOMETRIA Z PUNKTU WIDZENIA FORMALIZMU

Kartezjusz źródło wiedzy upatrywał w intuicji matematycznej. W takim ujęciu każdy krok rozumowania matematycznego musiał być uprawomocniony przez intuicyjny ogląd – czy mówiąc inaczej: musimy mieć stały ogląd intelektualny przedmiotu naszego badania. O prawomocności dowodu i danej argumentacji świadczyć muszą analizy o charakterze treściowym, a nie formalnym. Pogląd „treściowy" był obecny w matematyce przez bardzo długi czas, można powiedzieć, że – z historycznego punktu widzenia – jest to pogląd naturalny. Wyrazem (a mówiąc złośliwie: reliktem) takiego „wyobrażeniowego" myślenia jest stwierdzenie Ponceleta: „W zwykłej geometrii [...] opisywana jest figura, nigdy nie tracimy jej z oczu, zawsze rozumujemy z użyciem wielkości i form które są rzeczywiste, i nigdy nie dochodzimy do wniosków, które nie mogą być odzwierciedlone w wyobraźni lub przed naszymi oczyma za pomocą obiektów zmysłowych" (cyt. za: DETLEFSEN 2005, 265)[17]. Stopniowo jednak coraz większe znaczenie zyskuje inny sposób myślenia o procesie wnioskowania w matematyce. W tym nowym ujęciu odchodzi się od wizji dowodu matematycznego jako procesu opierającego się na niezawodnych i jasnych intuicjach, które prowadzą nas przez wszystkie stadia dowodu. Na dowód zaczynamy patrzeć jako na – mówiąc dzisiejszym językiem – czysto syntaktyczny konstrukt. Mówiąc nieco górnolotnie, kontemplacja wiecznych prawd matematycznych zostaje zastąpiona przez mechanicznie, nieodwołujące się do intuicji działania na symbolach. Taka zmiana nie nastąpiła oczywiście w sposób nagły, raczej była wynikiem pewnej ewolucji, w której stopniowo odchodzono od postulatu „treściowej kontroli" nad przedmiotem rozumowania na rzecz postulatu postępowania zgod-

[17] Można powiedzieć, że tutaj mamy wręcz „wizualizacyjne" rozumienie dowodu: chodzi o ogląd w najprostszym sensie tego słowa. Kiedy mówimy o intuicyjnej koncepcji dowodu nie mamy na myśli tylko wizualizacji, ale intuicyjny ogląd pewnych prawd.

nie z pewnymi regułami, które nie są treściowo powiązane z przedmiotem analizy i mają charakter niejako zewnętrzny (i najczęściej – bardziej ogólny).

W procesie „algebraizacji dowodów matematycznych”, czyli odchodzenia od poglądu treściowego na rzecz poglądu formalistycznego istotną rolę odegrał oczywiście rozwój samej algebry. W tym kontekście trzeba wspomnieć o pracach George’a Peacocka. Jego główne dzieło, *Treatise on Algebra* (1830), miało ugruntować algebrę jako dyscyplinę naukową. W jego ujęciu, algebra jest nauką dotyczącą kombinacji dowolnych znaków i symboli, zdefiniowanych za pomocą dowolnych praw (PEACOCK 1830, 78). Można powiedzieć, że punktem wyjścia jest arytmetyka, jednak wyrażenia arytmetyczne zaczynają być badane same w sobie, w oderwaniu od ich pierwotnej interpretacji. Badanie formalnych własności wyrażeń stanowi punkt wyjścia algebraicznego uogólnienia arytmetyki. To uogólnienie jednak podlega pewnym ograniczeniom – prawdy arytmetyczne muszą bowiem zostać zachowane i – mówiąc obrazowo – to one stanowią kamień probierczy tego, czy dana konstrukcja algebraiczna jest dopuszczalna. Arytmetyka ma charakter dyscypliny „sugerującej” prawa algebry (*suggesting science*) – można powiedzieć, że arytmetyka składa się z oczywistych prawd, algebra zaś składa się z użytecznych poznawczo założeń. Peacock odróżniał tu algebrę arytmetyczną od algebry symbolicznej. Wybór praw dla algebry symbolicznej motywowany jest ich przydatnością do rozwiązywania problemów (a warunkiem tej przydatności jest w szczególności to, że zachowują prawdy arytmetyki)[18]. Reguły algebry mają charakter arbitralny, nie wynikają z zasad arytmetyki, nie są wybierane z myślą o tym, aby opisać pewien dany uprzednio przedmiot[19]. Zdaniem Peacocka ustalenie interpretacji jest konieczne w końcowym stadium rozumowania, aby można było podać jego wynik. Etapy pośrednie mogą być jednak takiej interpretacji pozbawione, czyli mogą pełnić funkcję pomocniczych zdań pozbawionych interpretacji – podobnie jak w ujęciu Berkeleya. Rozumowanie matematyczne może więc zawierać elementy manipulacji symbolami niezależnie od tego, czy te symbole są zinter-

[18] Peacock mówił o *Principle of Permanence of Equivalent Forms*. Dziś mówilibyśmy raczej o nietwórczości algebry względem arytmetyki, choć oczywiście nie należy Peacockowi przypisywać współczesnego, technicznego rozumienia tego terminu.

[19] Warto tu przypomnieć wskazywaną przez Detlefsena (2005) składową „kreatywistyczną” stanowiska formalistycznego. Prawa algebry są w dużym stopniu dowolne (są jedynie sugerowane przez prawa arytmetyki), motywowane chęcią rozwiązywania istniejących problemów matematycznych. Matematyk ma więc swobodę w tworzeniu narzędzi, ograniczany jest tu tylko wymogami o charakterze metodologicznym.

pretowane. Ma więc charakter czysto symboliczny, a nie treściowy, i nie musimy być zdolni do rozumowego, intuicyjnego ujęcia tych kroków (jak to w swoich *Prawidłach kierowania umysłem* postulował Kartezjusz)[20]. Należy jednak podkreślić, że Peacock nie twierdził, że matematyka to czysto formalna gra symboli. W rozumowaniach matematycznych wprowadzone zostają elementy czysto formalne, ale zasadniczym celem poznawczym nadal pozostaje dochodzenie do p r a w d matematycznych. Formalizm Peacocka nie jest więc formalizmem skrajnym.[21]

Badania Peacocka dotyczące m.in. algebraizacji arytmetyki stanowiły ważny impuls dla kształtowania się nowego poglądu na naturę rozumowań matematycznych. W odniesieniu do geometrii ważny etap stanowią zaś niewątpliwie prace Pascha[22]. Mówiąc w uproszczeniu, prace Peacocka dotyczą statusu „intuicji arytmetycznej", natomiast prace Pascha dotyczą statusu (i *de facto* eliminacji) „intuicji geometrycznej" w dowodach matematycznych. Zdaniem Pascha warunkiem pełnej ścisłości dowodu jest abstrahowanie od sensu pojęć geometrycznych (w szczególności też od diagramów, tj. ilustracji – i wszelkich elementów poglądowych). Jest wprawdzie rzeczą użyteczną i dopuszczalną myślenie w trakcie dowodu o tym, do czego te pojęcia się odnoszą – jednak nie jest to bynajmniej konieczne, a co więcej, stanowić może źródło błędów i nieścisłości w dowodach. Pasch podkreśla, że – aby możliwe było traktowanie geometrii jak nauki dedukcyjnej – sam proces wnioskowania musi być niezależny od znaczenia pojęć geometrycznych. Można w nim uwzględniać jedynie te fakty i zależności, które są wyrażane w twierdzeniach i definicjach (w szczególności też nie można odwo-

---

[20] Ściśle rzecz biorąc – do nadania tym krokom interpretacji. Trudno bowiem zaprzeczyć, że także w skrajnie formalistycznym ujęciu musimy zgodzić się na to, że pewna operacja dokonana na symbolach jest zgodna z przyjętymi przez nas regułami. W tym przypadku jednak nie odwołujemy się do intuicji w takim sensie, jak rozumiał ją np. Kartezjusz.

[21] Można tu się posłużyć współczesną analogią: matematyk-realista jest przekonany o obiektywnym istnieniu rzeczywistości matematycznej, której dotyczą twierdzenia. Może jednak zgodzić się na użycie komputera w dowodzie, który dokonuje pewnych czysto symbolicznych operacji. Zarazem jednak nasz matematyk-realista może w spójny sposób twierdzić, że wynik tych czysto symbolicznych operacji ma pewną obiektywną treść.

[22] M. Pasch (1843-1930) zajmował się geometrią. W pracy *Vorlesungen über neuere Geometrie* (1882) podał aksjomatyczne sformułowanie geometrii (które stało się inspiracją dla późniejszej aksjomatyzacji Hilberta). Odkrył tam m.in., iż geometria Euklidesa opierała się – jako na nieuświadomionym założeniu, przyjmowanym za oczywiste – na tzw. aksjomacie Pascha (w uproszczeniu: prosta nie przechodząca przez żaden z wierzchołków trójkąta, ale przecinająca jeden bok trójkąta musi przeciąć jeszcze przynajmniej jeden bok).

ływać się do diagramów geometrycznych), samo zaś myślenie o znaczeniach terminów w czasie prowadzenia dowodu może być użyteczne, ale nie jest konieczne. Gdyby zaś w dowodzie odwołania do znaczeń okazały się konieczne, świadczyłoby to o niepoprawności dowodu (PASCH 1882, 98). W takim ujęciu w samym procesie dowodzenia nie musimy (a nawet nie powinniśmy) opierać się na intuicyjnym oglądzie przedmiotu badań, ale traktować dowód czysto formalnie, jak czysto symboliczne rozwiązywanie równania czy dokonywanie pewnych formalnych operacji na wyrażenia algebraicznych.

Niewątpliwie znaczącym impulsem dla zmiany sposobu myślenia o geometrii (w szczególności o standardach dowodowych w geometrii) było pojawienie się geometrii nieeuklidesowych. W tej nowej sytuacji teza głosząca, że geometria jest po prostu nauką o przestrzeni (fizycznej), opartą na naszych intuicjach, przestała mieć rację bytu[23]. Geometria stawała się bowiem nauką o pewnych strukturach, oderwanych od poglądowych interpretacji, a stanowiących modele dla tych systemów geometrycznych. Można więc powiedzieć, że odchodzi się od idei, iż teoria matematyczna opisuje pewien model zamierzony, na rzecz myślenia w kategoriach możliwych interpretacji dla teorii[24]. W sytuacji, gdy intuicja geometryczna przestała stanowić rękojmię (i warunek) poprawności dowodu, coraz bardziej wyraźna stawała się potrzeba usunięcia niejasności dotyczących metod dowodowych oraz ustalenia obowiązujących standardów uprawiania matematyki. Formułowane przez Pascha zasady mają właśnie charakter takich standardów metodologicznych[25].

Ta potrzeba ustalenia standardów (i ten proces faktycznego tworzenia tych standardów) dotyczyła oczywiście nie tylko geometrii czy algebry – podobny proces miał miejsce w przypadku analizy. Pierwotnie operowano w niej intuicyjnie rozumianym pojęciem wielkości nieskończenie małych, ale podejście to ustąpiło miejsca podejściu opartemu na definicji epsilonowo-

[23] Przypomnijmy tu cytowanego Ponceleta, który twierdził, iż w czasie dowodu mamy cały czas „przed oczyma wyobraźni” badany przedmiot. Ujęcie Pascha jest diametralnie różne.

[24] Gray twierdzi, że geometria sferyczna początkowo w ogóle nie była postrzegana jako model dla geometrii: geometria bowiem dotyczy prostych na płaszczyźnie (lub w przestrzeni), a nie krzywych na kuli (GRAY 1989, 171).

[25] Coffa w odniesieniu do problemu geometrii nieeuklidesowych zauważa, że po raz pierwszy w historii społeczność naukowców musiała zaakceptować (i to nie jedynie w prowizoryczny, roboczy sposób) istnienie całego zestawu wzajemnie sprzecznych teorii dotyczących jednego zagadnienia. Wyjaśnienie tej nowej sytuacji stanowiło niewątpliwie wyzwanie dla filozofii matematyki (COFFA 1986, 8).

-deltowej. To umożliwiło uwolnienie się od argumentacji opartej na intuicjach wielkości nieskończenie małych (albo na intuicjach geometrycznych, dotyczących krzywych, zachowania się tych krzywych, styczności etc.) na rzecz argumentacji opartej na obliczeniach i formalnych przekształceniach wyrażeń.

Nowy sposób myślenia widoczny jest już np. u Peacocka czy – sformułowany w deklaratywny sposób – u Pascha. Dojrzałą postać (w formie już nie tylko deklaracji, ale pewnego programu) poglądy tego typu uzyskują u Hilberta. Temu zagadnieniu poświęcona jest druga część artykułu.

BIBLIOGRAFIA

BASSLER O. B. (2006): *The surveyability of mathematical proof: a historical perspective*, „Synthese" 148, 99-133.

BERKELEY G. (2005): *Traktat o zasadach ludzkiego poznania*, Kraków: Zielona Sowa.

COFFA A. (1986): *From Geometry to tolerance: sources of conventionalism in nineteenth-century geometry*, [w:] R. COLODNY (ed.), *From quarks to quasars: Philosophical problems of modern physics*, University of Pittsburgh Series, Vol. 7, Pittsburgh: Pittsburgh University Press, 3-70.

COPLESTON F. (1997): *Historia filozofii, tom V. Od Hobbesa do Hume'a*, Warszawa: PAX.

DESCARTES R. (1958): *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy przez światło przyrodzone rozumu*, Warszawa: PWN.

DESCARTES R. (2002): *Rozprawa o metodzie właściwego kierowania rozumem i poszukiwania prawdy w naukach*, Kraków: Zielona Sowa.

DETLEFSEN M. (2005): *Formalism*, [w:] S. SHAPIRO (red.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, 236-317.

FALLIS D. (2003): *Intentional gaps in mathematical proofs*, „Synthese", 134, 45-69.

GRAY J. (1989): *Ideas of Space, Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*, wyd. 2, Oxford: Oxford University Press.

PASCH M. (1882): *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig: Teubner.

PEACOCK G. (1830): *Treatise on Algebra*, Cambridge: Deighton; London: Rivington, and Whittaker, Treacher&Arnot.

MATHEMATICAL PROOF FROM THE FORMALISTIC VIEWPOINT

PART I

Summary

This article is the first one to examine the evolution of the notion of mathematical proof in a historical perspective. First I present the intuitive, approach of Descartes, according to which mathematical proof is based on self-evident principles. I follow with an analysis of Berkeley's mathematical instrumentalism and argue that he can be considered a predecessor of modern formalism. The article also deals with the ideas of Peacock and Pasch, and their role in the development of the modern formalistic viewpoint.

Summarised by Krzysztof Wójtowicz

Słowa kluczowe: Descartes, Berkeley, Peacock, Pasch, formalism.
Key words: Descartes, Berkeley, Peacock, Pasch, formalizm.

Information about Author: Prof. Dr. KRZYSZTOF WÓJTOWICZ – Institute of Philosophy, Warsaw School of Social Psychology; address for correspondence: ul. Chodakowska 19/31, PL 03-815 Warszawa; e-mail: kwojtowicz@swps.edu.pl