ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LV, numer 1 – 2007

KRZYSZTOF WÓJTOWICZ

O FILOZOFII MATEMATYKI IMRE LAKATOSA

Prace Imre Lakatosa są znane każdemu, kto zajmuje się filozofią nauki, a zwroty takie jak „metodologia programów badawczych" są w powszechnym użyciu. Mniej jednak znane są prace Lakatosa dotyczące filozofii matematyki[1]. Celem niniejszego artykułu jest prezentacja poglądów Lakatosa dotyczących tej właśnie kwestii oraz analiza krytyczna – z konieczności ograniczona do minimum. Artykuł należy więc traktować raczej jako zachętę do podjęcia własnych badań w tej dziedzinie niż jako wyczerpujące studium. Zachęcam do nich, gdyż uważam, że – niezależnie od oceny poglądów Lakatosa – jego głos w dyskusji dotyczącej filozofii matematyki zasługuje na uwagę.

1. WSTĘP: FUNDACJONIZM I ANTYFUNDACJONIZM W FILOZOFII MATEMATYKI

Podstawowe linie podziału wśród stanowisk w filozofii matematyki są w znacznej mierze odzwierciedleniem linii podziału, z jakimi mamy do czynienia w filozofii (choć oczywiście filozofia matematyki – tak jak każda dyscyplina filozoficzna – ma swoje własne problemy, które prowadzą do dalszego zróżnicowania stanowisk). Mamy więc np. podział na stanowiska rea-

---

Dr hab. KRZYSZTOF WÓJTOWICZ, prof. SWPS – Instytut Filozofii Szkoły Wyższej Psychologii Społecznej (SWPS); adres do korespondencji: ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa; e-mail: kwojtowicz@swps.edu.pl

[1] W języku polskim dostępna była (zresztą od niezbyt dawna) tylko praca LAKATOS 1978; teraz dostępna jest w polskim tłumaczeniu również podstawowa praca Lakatosa dotycząca tej problematyki, a mianowicie LAKATOS 1976.

listyczne i nominalistyczne (różnice poglądów dotyczą problemu istnienia obiektów matematycznych), racjonalistyczne i empirystyczne (gdzie różnice poglądów dotyczą problemu wiedzy matematycznej) – i tych linii podziału można nakreślić znacznie więcej. Tutaj interesować nas będzie kryterium podziału o charakterze metafilozoficznym, wyznaczone przez zadania stawiane filozofii matematyki (a nie przez szczegółowe rozstrzygnięcia o charakterze przedmiotowym). Mam tu na myśli podział na stanowiska określane jako fundacjonistyczne i antyfundacjonistyczne.

W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że w myśl stanowiska fundacjonistycznego na teorie matematyczne patrzy się jak na teorie sformalizowane w precyzyjnie określonym języku, z wyraźnie zdefiniowanymi regułami wnioskowania. Dowód matematyczny utożsamiany jest z formalnie zdefiniowanym i badanym w ramach teorii dowodu ciągiem formuł. Zadaniem filozofii matematyki miałoby zaś być poszukiwanie i analizowanie podstawowych zasad, nadających wiedzy matematycznej charakter wiedzy pewnej i usuwających wątpliwości. Filozofia matematyki miała więc być dyscypliną o charakterze normatywnym, metodologia matematyki zaś sprowadzać się *de facto* do metamatematyki[2].

Pomimo że tradycja ta zdominowała filozofię matematyki XX wieku (a przynajmniej pierwszej jego połowy), można wskazać także inny, coraz bardziej widoczny nurt o wyraźnie antyfundacjonistycznej orientacji. Podstawową regułą jest uznanie deskryptywnego, a nie normatywnego charakteru filozofii matematyki. Celem analiz filozoficznych nie będzie więc konstruowanie „systemów zabezpieczeń” dla matematyki, jej rekonstrukcja w ramach dobranego uprzednio (odpowiednio zabezpieczonego) systemu pojęć, ale refleksja nad praktyką matematyczną, nad taką matematyką, jaka faktycznie jest uprawiana w salach wykładowych i w gabinetach matematyków. W tym ujęciu na dowód nie patrzy się jak na konstrukt czysto formalny, ale przede wszystkim jak na pewnego typu argumentację, dzięki której autor przekonuje innych członków matematycznej społeczności (i samego siebie) do pewnych tez. Pojęcia matematyczne mają charakter zmienny, argumenty nigdy nie są konkluzywne. W takim ujęciu badania filozoficzne powinny uwzględniać również sam proces tworzenia matematyki, w którym jest miejsce na zma-

[2] Do tego nurtu można zaliczyć np. logicyzm (w ramach którego próbowano ugruntować prawdy matematyczne jako prawdy logiczne) czy program Hilberta – którego celem było ugruntowanie matematyki klasycznej poprzez odwołanie do finitystycznej („bezpiecznej”) metateorii.

gania z oporną materią, walkę z niejasnościami, wprowadzanie nowych pomysłów i koncepcji. Właśnie do tego nurtu w filozofii matematyki można zaliczyć koncepcję quasi-empiryzmu Lakatosa.

2. KONCEPCJA LAKATOSA

2.1. UWAGI WSTĘPNE

W poglądach filozoficznych Lakatosa na matematykę widać silny wpływ fallibilizmu Poppera, w myśl którego rozwój teorii naukowych nie ma charakteru kumulatywnego, lecz jest procesem, w którym mamy do czynienia z obalaniem obowiązujących teorii i tworzeniem nowych – mających charakter hipotez wyjaśniających. Teorie naukowe mają charakter niepewny, naszym zaś zadaniem jest poddawanie ich ciągłym testom, a nie poszukiwanie dla nich ostatecznych uzasadnień. W podobny sposób Lakatos postrzega teorie matematyczne: zawsze występuje w nich element niepewności, zawsze mamy do czynienia jedynie ze (słabiej lub gorzej uzasadnionymi) hipotezami, a nie ostatecznymi prawdami. Teorie matematyczne mogą być falsyfikowane, i pod tym względem są podobne do teorii empirycznych.

Zarazem jednak rozwój matematyki ma charakter racjonalny; w szczególności odrzucenie danej hipotezy (czy nawet teorii) matematycznej wynika z wewnętrznej logiki rozwoju matematyki. W tym sensie Lakatos pozostaje w tradycji „internalistycznej”, nie odwołuje się w swej koncepcji do kategorii społecznych czy kulturowych (nie przypomina więc np. mocnego programu socjologii wiedzy)[3].

2.2. NURT FORMALISTYCZNY A ŻYWA MATEMATYKA

Lakatos wyraźnie deklaruje się jako przeciwnik szkoły, którą nazywa „formalistyczną”. Tym mianem określa szkołę, w myśl której matematyka jest utożsamiana jej formalną idealizacją, filozofia matematyki zaś sprowadzana jest do metamatematyki (LAKATOS 1976, 17). Odrzuca w szczególności reprezentowaną np. przez Carnapa koncepcję matematyki jako składni

[3] Podkreśla to P. Ernest w pracy ERNEST 1997, w której sam próbuje sformułować koncepcję inspirowaną pracami Lakatosa, ale utrzymaną w duchu społecznego konstruktywizmu *à la* Bloor. Przyznaje jednak, że sam Lakatos bynajmniej nie skłaniał się w stronę takiej koncepcji.

języka nauki (któremu towarzyszy program eliminacji rozważań filozoficznych na rzecz badań metanaukowych). Formalizm matematyczny, zdaniem Lakatosa, opiera się na podstawowych dogmatach pozytywizmu logicznego, zgodnie z którymi tylko tautologie logiczne lub zdania weryfikowalne empirycznie mają sens. Lakatos twierdzi jednak, że matematyka nieformalna nie spełnia żadnego z tych dwóch warunków – tym samym zwolennik tego stanowiska powinien uznać, że jest ona po prostu pozbawiona sensu (LAKATOS 1976, 19). Warto tu zwrócić uwagę na to, że Lakatos – określany jako przedstawiciel quasi-empiryzmu matematycznego – nie deklaruje się bynajmniej jako empirysta w kwestii natury wiedzy matematycznej. Należy też podkreślić, że według Lakatosa zdania matematyczne nie są zwykłymi tautologiami, ale mają pewną treść. Możemy więc mówić o wiedzy matematycznej, a nie tylko znajomości reguł manipulowania symbolami (wbrew opinii logicznych pozytywistów)[4].

Lakatos formalizm matematyczny określa jako ostatnie ogniwo w łańcuchu „dogmatystycznych filozofii matematyki” (LAKATOS 1976, 22). Mianem „dogmatyzmu” zaś określa przeświadczenie, że możemy osiągnąć prawdziwą i pewną wiedzę matematyczną. Dogmatyzmowi przeciwstawia sceptycyzm, w myśl którego takiej pewnej wiedzy nie możemy osiągnąć (lub nie możemy wiedzieć, że taką wiedzę osiągnęliśmy). Dotychczas matematyka była swoistym bastionem dogmatyzmu, kryzysy zaś w podstawach matematyki prowadziły do przeformułowań obowiązujących teorii, ale nie do zmiany samego sposobu uprawiania matematyki. Prowadzi to do ugruntowania obrazu matematyki jako wiedzy autorytatywnej, niezawodnej i niepodważalnej i do epistemologicznego dogmatyzmu. Zdaniem Lakatosa należy wreszcie podjąć próbę zdobycia tej „twierdzy epistmologii dogmatystycznej” (LAKATOS 1976, 22).

Przedmiotem zainteresowania Lakatosa są bowiem teorie matematyczne w wersji, w jakiej zostały stworzone przez samych matematyków, a nie zrekonstruowane w systemach formalistów[5]. Z tego też powodu rzetelnie

[4] O koncepcji matematyki w wydaniu pozytywizmu logicznego Lakatos wypowiada się krytycznie, twierdząc, że była wręcz szkodliwa dla historii i filozofii matematyki (LAKATOS 1976, 19).

[5] Lakatos z dezaprobatą cytuje następujący fragment pism Tarskiego: „Rzecz jasna, nie wszystkie nauki dedukcyjne przybierają postać nadającą się na przedmiot badań naukowych. Nie mają takiej postaci [...] te nauki, które nie są oparte na dokładnie określonych podstawach logicznych, nie mają sprecyzowanych reguł inferencji i których twierdzenia są zazwyczaj wysłowione w dwuznacznych i nieścisłych terminach języka potocznego – słowem: nauki, które nie

uprawiana filozofia matematyki musi uwzględniać historię rozwoju matematyki. Lakatos parafrazuje znane powiedzenie Kanta, twierdząc, że historia matematyki bez filozofii staje się ślepa, a filozofia matematyki ignorująca rzeczywiste zjawiska historyczne staje się pusta (LAKATOS 1976, 19)[6].

2.3. NAUKI EUKLIDESOWE I QUASI-EMPIRYCZNE

Podstawową rolę w koncepcji Lakatosa odgrywa rozróżnienie nauk na euklidesowe (w polskim tłumaczeniu *Dowodów i refutacji* używany jest termin „euklidejskie") i quasi-empiryczne. Podział ten dokonany jest ze względu na mechanizmy uzasadniania tez danej nauki. To, czy dany system ma charakter euklidesowy, czy też quasi-empiryczny, uzależnione jest od tego, w jaki sposób weryfikowane są tezy tego systemu (Lakatos mówi tu o „przepływie wartości prawdziwości"). W systemie euklidesowym punktem wyjścia są aksjomaty, logika zaś jest narzędziem dowodu. W systemie quasi-empirycznym logika jest narzędziem krytyki: tutaj fałszywość stwierdzeń bazowych prowadzi do wykazania fałszywości przyjętych założeń (LAKATOS 1978, 224). Jest to więc kryterium o charakterze metodologicznym, a nie treściowym: ważny jest sposób uzasadniania twierdzeń danej nauki, mechanizmy jej rozwoju, a nie przedmiot badań. Na przykład logicyzm i formalizm zaliczyć można (mimo głębokich różnic) do nurtu euklidesowego. Zdaniem logicystów (np. Fregego i Russella) twierdzenia matematyczne dają się wyprowadzić z aksjomatów o charakterze czysto logicznym. W myśl stanowiska Hilberta te niepodważalne prawdy to pewne podstawowe prawdy dotyczące stosunkowo słabych systemów formalnych, relatywnie do których miałby zostać skonstruowany dowód niesprzeczności całej matematyki. Jednak w przypadku obu tych stanowisk, wspólny pozostaje sposób myślenia[7].

Lakatos w żywy (wręcz emocjonalny) sposób krytykuje ujęcie euklidesowe. Pozwolę sobie przytoczyć dłuższy fragment:

są sformalizowane" (TARSKI 2001, 31-32). Takie ujęcie jest – zdaniem Lakatosa – całkowicie błędne; także w wypadku matematyki należy uwzględnić fakt, że nie jest tworzona jako sformalizowany system.

[6] Nie znaczy to jednak, że filozofia matematyki redukuje się do studium historycznego. Rekonstrukcja Lakatosa nie ma charakteru li tylko historycznej prezentacji.

[7] Decydujące stają się więc nie kryteria o charakterze ontologicznym (dotyczące domniemanego przedmiotu badań matematyki) czy epistemologicznym (dotyczące źródeł wiedzy matematycznej), ale metodologicznym, dotyczące rozwoju matematyki.

> Metodologia euklidejska wypracowała pewien obowiązujący styl wykładu. [...] Wykład [...] rozpoczyna się od podania ustalonej z drobiazgową starannością listy aksjomatów, lematów, i/lub definicji. Te aksjomaty i definicje sprawiają często wrażenie sztucznych i zagadkowo zawiłych. Nie dowiadujemy się nigdy, jak te zawiłości powstały. Po wyliczeniu aksjomatów i definicji następują starannie zredagowane twierdzenia. Są one obciążone wymyślnymi warunkami; wydaje się wprost niemożliwe, aby ktokolwiek je odgadł. Po twierdzeniu następuje dowód.
>
> Zgodnie z euklidejskim rytuałem, student matematyki zobowiązany jest do uczestniczenia w tych magicznych sztuczkach, bez zadawania pytań ani na temat tego, skąd się one wzięły, ani tego, jak się takie hokus-pokus robi. [...] W stylu deduktywistycznym wszystkie twierdzenia są prawdziwe i wszystkie wnioskowania prawomocne. Matematykę prezentuje się jako stale powiększający się zbiór wiecznych, niezmiennych prawd. Kontrprzykłady, refutacje, krytyka nie mają absolutnie prawa wstępu. (LAKATOS 1976, 216).

Zdaniem Lakatosa jest to ujęcie całkowicie błędne i wpycha matematykę w ślepy zaułek. Taki styl uprawiania (i wykładania) matematyki odcina bowiem matematykę od motywacji, które prowadzą do tworzenia określonych pojęć matematycznych i kształtowania się metod matematycznej argumentacji. Deduktywistyczny styl uprawiania matematyki ukrywa te mechanizmy, rezultat końcowy zaś zostaje uznany za niezawodny (LAKATOS 1976, 217). Takie widzenie matematyki opiera się na błędnym przekonaniu, że podstawowym mechanizmem matematycznego rozwoju jest dedukcja, że to logika dedukcyjna stanowi adekwatny opis tworzenia wiedzy matematycznej[8]. Tak jednak nie jest, gdyż właściwy opis tych mechanizmów daje nam tzw. styl heurystyczny. Styl ten eksponuje sytuację problemową, w której doszło do sformułowania hipotez, definicji i dowodów, w przeciwieństwie do stylu deduktywistycznego, który całkowicie odrywa definicje i dowody od ich „dowodów-przodków", przestawiając je w sztuczny i arbitralny sposób „jakby się wzięły z sufitu" (LAKATOS 1976, 219). Dominacja takiego poglądu jest dla matematyki wręcz szkodliwa. Zdaniem Lakatosa ukazanie heurystycznych mechanizmów rozwoju (od pierwotnej hipotezy, poprzez dowód,

[8] O zwolennikach takiej wizji matematyki Lakatos pisze, iż wyobrażają sobie oni, że matematyk rozpoczyna pracę, ustalając definicje i aksjomaty w sposób arbitralny, a następnie z tych definicji i aksjomatów wyprowadza twierdzenia. Jest to ujęcie błędne – i Lakatos stawia sobie za cel wykazanie, że podobnie jak logika odkrycia naukowego nie jest logiką indukcyjną (co wykazał Popper), to również logika odkrycia matematycznego nie jest logiką dedukcyjną. LAKATOS 1976, 217-218.

kontrprzykłady aż do definicji i twierdzeń) pozwoliłoby na odejście od obowiązującej wizji uprawiania matematyki i zarazem przeciwdziałałoby jej degeneracji. To jednak jest trudne ze względu na dominację stylu deduktywistycznego i atomizację wiedzy matematycznej (LAKATOS 1976, 232-233).

2.4. ZDANIA BAZOWE

Punktem wyjścia w badaniach matematycznych są tzw. zdania bazowe. W ujęciu euklidesowym za takie bazowe zdania należałoby uznać aksjomaty, jako pierwotne w porządku logicznym. Lakatos natomiast za zdania bazowe uznaje te zdania matematyczne, które najwcześniej (w porządku genetycznym, a nie logicznym) uznajemy za prawdziwe. Nie są to aksjomaty teorii formalnej, ale stwierdzenia, które przyjmujemy w matematyce nieformalnej, które mają swoje źródło w praktyce matematycznej. One dopiero mogą stanowić punkt wyjścia dla etapu aksjomatyzacji teorii (który jest znacznie późniejszy i – swobodnie mówiąc – następuje dopiero wtedy, gdy już dość dobrze rozumiemy sieć zależności pojęciowych w naszej nieformalnej matematyce). W procesie tworzenia teorii matematycznej mamy do czynienia z podobnymi mechanizmami, jak w procesie tworzenia teorii empirycznej (Lakatos ma tu na myśli opis w duchu Poppera). Punktem wyjścia są bowiem swoiste *explananda*, którymi są tezy matematyki niesformalizowanej. Ewentualne aksjomaty teorii sformalizowanej stanowić mogą zaś hipotezy wyjaśniające – i taki jest *de facto* ich status. W matematyce mamy więc do czynienia z testowaniem tych aksjomatów, a nie (tylko) z dedukowaniem twierdzeń (Lakatos mówi tutaj o „retransmisji fałszu"). W ten proces testowania hipotez wyjaśniających nieuchronnie wpisana jest możliwość obalenia (na podobieństwo popperowskiego mechanizmu falsyfikacji hipotez naukowych). Aksjomaty matematyczne nie są więc „prawdami objawionymi", nie są uzasadniane jedynie poprzez odwołanie się do ich oczywistości, ale także do faktu, czy dobrze potrafią ująć nasze przekonania matematyczne nabyte w fazie tworzenia matematyki preformalnej – i to właśnie matematyka preformalna, intuicyjna stanowi ostateczne kryterium. Uprawianie matematyki w duchu quasi-empirycznym opiera się na zasadzie poszukiwania śmiałych hipotez, które mają dużą siłę wyjaśniającą. Hipotezy poddawane są krytyce i następnie (niektóre z nich) są eliminowane. W tym sensie metodologia quasi-empiryczna ma wysoce spekulatywny charakter (LAKATOS 1978, 224-225).

W tym rozwoju, w wyniku działania mechanizmu falsyfikacji pewne hipotezy o charakterze wyjaśniającym zostają odrzucone, sfalsyfikowane przez „dane empiryczne". Jednak charakter zdań bazowych, potencjalnych falsyfikatorów jest oczywiście całkowicie odmienny od zdań bazowych (potencjalnych falsyfikatorów) w naukach empirycznych – nie są to bynajmniej stwierdzenia czasowo-przestrzenne (LAKATOS 1978, 233)[9]. Falsyfikacja teorii matematycznej odbywa się więc poprzez jej skonfrontowanie z nieformalną praktyką matematyczną[10].

Lakatos, analizując pojęcie falsyfikatora w matematyce, odnotowuje istnienie falsyfikatorów czysto logicznych – a mianowicie zdań wewnętrznie sprzecznych (o strukturze $p \wedge \neg p$). Falsyfikatory logiczne odgrywają oczywistą rolę: teoria generująca sprzeczność musi zostać odrzucona, i nie ma potrzeby tego faktu analizować. Jednak – zdaniem Lakatosa – oprócz falsyfikatorów czysto logicznych ważną rolę odgrywają w matematyce też falsyfikatory innego typu: zdania bazowe, którym w nieformalnej praktyce matematycznej przypisaliśmy wartość logiczną i które chcemy zachować w formalnej wersji tworzonej teorii. Formalizacja ma za zadanie uchwycić tę – daną już uprzednio, w ramach matematyki nieformalnej – treść teorii niesformalizowanej. Treści teorii matematycznej nie definiuje bynajmniej dopiero jej sformalizowana wersja – jest ona dana już uprzednio. Dzięki temu możemy mówić o mechanizmie falsyfikacji. Gdybyśmy uznali, że dopiero sformalizowana teoria aksjomatyczna określa przedmiot swoich badań, wówczas nie byłoby innych falsyfikatorów poza czysto logicznymi. Jednakże, jeśli uznamy, że teoria sformalizowana jest wtórna w stosunku do pewnej teorii niesformalizowanej, to można mówić o obaleniu teorii sformalizowanej poprzez obalenie jakiegoś jej twierdzenia w ramach teorii niesformalizowanej (czyli udowodnienie negacji). Takie niesformalizowane twierdzenie Lakatos nazywa „falsyfikatorem heurystycznym” (LAKATOS 1978, 233).

Lakatos problem falsyfikatorów heurystycznych dla teorii aksjomatycznej rozważa na przykładzie teorii mnogości. Taką funkcję – zdaniem Lakatosa – mogłyby spełniać pewne zdania arytmetyczne, na przykład hipoteza Goldbacha. Mechanizm falsyfikacji miałby następujący schemat: gdyby wykazano w formalnej teorii mnogości np. fałszywość tej hipotezy, a jednocześnie zwykła, nieformalna praktyka matematyczna pozwoliłaby na udo-

[9] Quasi-empiryzm Lakatosa nie jest więc empiryzmem w stylu Milla czy (współcześnie) Kitchera, którzy uważają, że matematyka jest po prostu idealizacją danych empirycznych.

[10] Ujęcie Lakatosa różni się więc od ujęcia Quine'a, który podkreślał znaczenie związków matematyki z naukami empirycznymi w analizie filozoficznej (w szczególności znaczenie tych związków dla argumentacji na rzecz matematycznego realizmu). Można powiedzieć, że koncepcja Lakatosa jest bardziej skupiona na samej matematyce jako takiej, na jej wewnętrznych mechanizmach rozwoju.

wodnienie prawdziwości tej hipotezy, to stanowiłaby ona falsyfikator arytmetyczny dla teorii mnogości. Lakatos wskazuje zresztą inne zdania arytmetyczne, które mogą pełnić funkcję takich potencjalnych falsyfikatorów. Mówi w tym kontekście o – niezależnych od ZFC – aksjomatach istnienia dużych liczb kardynalnych (nazywanych często „silnymi aksjomatami nieskończoności”). Lakatos zauważa, że zdaniami testowymi, potencjalnymi falsyfikatorami dla tych aksjomatów mogą być pewne równania diofantyczne (mające finitystyczny charakter) (LAKATOS 1978, 235)[11].

W przypadku zdań teorii mnogości możemy myśleć nie tylko o falsyfikatorach arytmetycznych. Lakatos rozważa przykład hipotezy kontinuum i zauważa, że także dla niej można znaleźć pewnego typu stwierdzenia testujące. Oczywiście należy pamiętać o tym, że ta falsyfikacja nie miałaby charakteru formalnego: chodzi tutaj o mechanizm, zgodnie z którym zdanie posiadające niewiarygodne (dziwne, nieintuicyjne, niepożądane etc.) konsekwencje, powinno samo zostać uznane za niewiarygodne i tym samym zostać odrzucone jako aksjomat[12]. Zdaniem Lakatosa metodą quasi-empiryczną przy wykazywaniu fałszywości hipotezy kontinuum posługiwał się Gödel, wskazując na niewiarygodne konsekwencje tej hipotezy (por. GÖDEL 1947/64, do której to pracy odwołuje się Lakatos). Lakatos twierdzi wręcz, że zbudowanie teorii mnogości, w której można udowodnić negację hipotezy kontinuum, było kluczowe dla „nowego programu euklidesowego” Gödla (LAKATOS 1978, 237)[13].

---

[11] Równania diofantyczne to wielomiany, w których współczynnikami są liczby całkowite i dla których poszukujemy tylko rozwiązań w liczbach całkowitych. Za pomocą arytmetyzacji składni („gödelizacji”) możemy sformułować zdania arytmetyczne wyrażające niesprzeczność teorii sformalizowanych, takich jak np. ZFC + MC (aksjomat istnienia liczby mierzalnej). Zdania takie (standardowo oznaczane przez Con_T, gdzie T jest interesującą nas teorią) są zdaniami mówiącymi coś o równaniach diofantycznych, a jednocześnie wyrażającymi pewne metamatematyczne treści. Lakatos, mówiąc o falsyfikatorach arytmetycznych dla teorii mnogości ma na myśli także takie zdania.

[12] Schemat (w uproszczeniu) byłby taki: (1) β jest zdaniem niewiarygodnym; (2) β logicznie wynika ze zdania α. WNIOSEK: α jest zdaniem mało wiarygodnym. Te falsyfikatory dla teorii mnogości nie muszą być tylko zdaniami arytmetycznymi. Omawiając *New Foundations* Quine’a, zauważa, że funkcję falsyfikatorów mogą pełnić także stwierdzenia naiwnej teorii mnogości: fakt, że w *New Foundations* daje się udowodnić twierdzenie, iż liczby porządkowe nie są dobrze uporządkowane przez relację $\leq$, stanowi falsyfikację tej teorii (gdyż jest to wniosek bardzo nieintuicyjny). LAKATOS 1978, 235.

[13] Lakatos zwraca też uwagę na fragment pracy GÖDEL 1944, gdzie Gödel wskazuje odwołanie się do wiarygodności wniosków jako metodę uzasadniania hipotez. Rzeczywiście, obok intuicji matematycznej Gödel wyraźnie mówił o „drugim filarze” uzasadniania aksjomatów mate-

2.5. METODOLOGIA DOWODÓW I OBALEŃ

Lakatos odrzuca metodologię euklidesową, proponując własne ujęcie. W myśl stanowiska Lakatosa, rozwój matematyki quasi-empirycznej nie ma charakteru monotonicznego, nie polega na ciągłym dowodzeniu nowych twierdzeń i wzbogacaniu korpusu wiedzy matematycznej w ten sposób, ale na krytyce i spekulacji, na ulepszaniu domysłów za pomocą poszukiwania nowych dowodów i prób obalenia (LAKATOS 1976, 22). Ogólną charakterystykę tej metody podaje w postaci kilku reguł heurystycznych:

> Reguła 1. Jeśli masz jakąś hipotezę, spróbuj udowodnić ją i obalić ją. [...] przygotuj listę nieoczywistych lematów [...]; znajdź kontrprzykłady [...]
>
> Reguła 2. Jeśli masz kontrprzykład globalny, to odrzuć hipotezę [...] i zastąp hipotezę hipotezą ulepszoną. [...] Spróbuj uzyskać to, żeby wszystkie „ukryte lematy" stały się jawne.
>
> Reguła 3. Jeśli masz kontrprzykład lokalny; sprawdź, czy nie jest on także kontrprzykładem globalnym. (LAKATOS 1976, 87-88)[14]

---

matycznych, a mianowicie poprzez odwołanie się do ich owocności w rozwiązywaniu problemów: "[D]ecyzja dotycząca ich [nowych aksjomatów – K.W.] prawdziwości jest możliwa także w inny sposób, a mianowicie poprzez indukcyjną analizę ich «sukcesu». Sukces oznacza tutaj owocność w konsekwencje, w szczególności w konsekwencje «weryfikowalne», tj. konsekwencje dowodliwe bez nowych aksjomatów, których dowody z pomocą nowych aksjomatów są jednakże zdecydowanie prostsze i łatwiejsze do odkrycia i umożliwiają zawarcie w jednym dowodzie wielu różnych dowodów. [...] Można jednak wyobrazić sobie o wiele wyższy poziom weryfikowania. Mogą istnieć aksjomaty tak owocne w sprawdzalne konsekwencje, rzucające tak dużo światła na całą dyscyplinę i dostarczające tak silnych metod rozwiązywania problemów (i to rozwiązywania konstruktywnego, tak dalece, jak jest to możliwe), że niezależnie od zagadnienia, czy są one wewnętrznie konieczne, powinny zostać zaakceptowane przynajmniej w takim stopniu, jak dowolna dobrze ugruntowana teoria fizyczna" (GÖDEL 1947/64, 265).

[14] W bardziej rozbudowanej formie Lakatos przedstawia ten schemat następująco: „Jest pewien prosty wzorzec odkrycia matematycznego czy rozwoju nieformalnych teorii matematycznych. Składa się on z następujących etapów:

(1) Pierwotna hipoteza.

(2) Dowód (surowy eksperyment myślowy lub argument polegający na rozkładzie pierwotnej hipotezy na podhipotezy czy lematy).

(3) Wyłaniają się kontrprzykłady «globalne» (kontrprzykłady wobec pierwotnej hipotezy).

(4) Dowód zostaje ponownie przeanalizowany – wychwycony zostaje «lemat-winowajca», wobec którego kontrprzykład globalny jest kontrprzykładem «lokalnym». Ten winny lemat mógł pozostawać uprzednio «w ukryciu» lub być błędnie rozpoznany. Teraz przedstawia się go w jawnej postaci i wbudowuje w pierwotną hipotezę jako warunek. Pierwotną hipotezę zastępuje twierdzenie – ulepszona hipoteza – której najdonioślejszą cechą jest nowe, wygenerowane przez dowód pojęcie" (LAKATOS 1976, 195-196).

Zdaniem Lakatosa rozwój matematyki odbywa się właśnie w drodze formułowania dowodów lematów, dla których następnie znajdujemy kontrprzykłady („lokalne” bądź „globalne”), co pozwala na udoskonalenie dowodu, uświadomienie sobie ukrytych założeń i korygowanie tychże. To powoduje, że heurystyka matematyczna jest podobna do heurystyki nauk przyrodniczych, gdyż stawianie hipotez, próby dowodzenia i obalenia, odgrywają istotną rolę w obu tych dyscyplinach (LAKATOS 1976, 120).

Przykład analizowany przez Lakatosa w jego podstawowej pracy to hipoteza Eulera dotycząca wielościanów. Praca ta ma formę dialogu – można wyobrażać sobie, że to adepci matematyki starają się wspólnymi siłami dojść do konstruktywnych wniosków, napotykając po drodze na liczne przeszkody: kontrprzykłady, luki w rozumowaniach, niejasność pozornie dobrze określonych pojęć etc. Należy tutaj zauważyć, że nie jest to rekonstrukcja historyczna – Lakatos *explicite* pisze o tym, że prawdziwa historia przedstawiona jest w przypisach. Rekonstrukcja Lakatosa nie dotyczy więc faktycznego przebiegu zdarzeń historycznych, ale raczej swoistej „logiki rozwoju” matematyki, która ujawnia się w pewien sposób w faktycznym rozwoju historycznym. Skonstruowany przez Lakatosa dialog ma ujawniać tę „logikę rozwoju”[15].

To są podstawowe etapy – ale można wyróżnić też niekiedy dalsze:

„(5) Bada się dowody innych twierdzeń, aby sprawdzić, czy pojawiają się w nich nowo odkryte lematy lub wygenerowane przez dowód pojęcie [...]

(6) Sprawdza się uznawane dotychczas konsekwencje pierwotnej, obecnie obalonej hipotezy.

(7) Kontrprzykłady stają się nowymi przykładami – otwierają nowe pola badań” (LAKATOS 1976, 196)

[15] Różnice między konstrukcją dialogu Lakatosa a faktycznymi zdarzeniami historycznymi podkreśla Koetsier (KOETSIER 1991, 42). Koetsier wprowadza pojęcie mikro- i makropoziomu: poziom „mikro” dotyczy poszczególnych problemów, twierdzeń (często więc dotyczyć będzie poszczególnych matematyków i sposobu ich myślenia). Poziom „makro” dotyczy całych dziedzin matematycznych, a nawet całej matematyki (a więc zazwyczaj całej społeczności matematyków) (KOETSIER 1991, 14). Koetsier twierdzi, że ujęcie w duchu dowodów i obaleń można traktować jako swoistą racjonalną (nie historyczną!) rekonstrukcję procesu tworzenia matematyki na mikropoziomie (KOETSIER 1991, 43). Nie stanowi ona natomiast dobrego opisu rozwoju całych dziedzin matematycznych (czy całej matematyki) – tutaj właściwa jest metodologia programów badawczych, będąca przedmiotem zainteresowania Lakatosa w późniejszej fazie jego filozoficznego rozwoju.

3. UWAGI KRYTYCZNE

3.1. FALSYFIKATORY ARYTMETYCZNE DLA TEORII MNOGOŚCI?

Lakatos pisze o falsyfikatorach arytmetycznych dla teorii mnogości – czyli równaniach diofantycznych, których prawdziwość (ewentualnie fałszywość) miałaby znaczenie nawet dla tez teoriomnogościowych dotyczących dużych liczb kardynalnych. Rzeczywiście, zdanie Con_{ZFC}, wyrażające niesprzeczność ZFC, jest zdaniem arytmetycznym (podobnie jak np. zdania Con_{ZFC+MC}, $Con_{ZFC+V=L}$, Con_{ZF+AD}, etc.), dotyczącym wielomianów. Można więc powiedzieć, że nasza wiara w niesprzeczność tych teorii (a także wielu innych) może być testowana poprzez zdania arytmetyczne (po prostu pewne równania diofantyczne). Hipotetyczny scenariusz falsyfikacji, jaki zapewne mógł mieć na myśli Lakatos, wygląda następująco:

1. Rozważamy dodanie do ZFC dodatkowych aksjomatów, np. aksjomatu istnienia liczby mierzalnej (MC).
2. Rozważamy zdanie Con_{ZFC+MC} – jest to zdanie arytmetyczne, wyrażające (dzięki odpowiedniemu kodowaniu) niesprzeczność teorii ZFC+MC
3. To zdanie jest falsyfikatorem arytmetycznym dla teorii ZFC+MC: jeśli w nieformalnej matematyce potrafilibyśmy podać argumenty świadczące o fałszywości zdania Con_{ZFC+MC}, byłby to ważny argument na rzecz odrzucenia teorii ZFC+MC. Uznamy wówczas, że została ona sfalsyfikowana poprzez zdanie arytmetyczne.

Problem polega jednak na tym, że zdanie typu Con_{ZFC+MC} nie ma w zasadzie żadnej treści czysto teorioliczbowej. Zostało ono skonstruowane właśnie jako zdanie o charakterze metateoretycznym, a nie jako zdanie, którym skądinąd zainteresowaliby się specjaliści od teorii liczb. Nie przypomina ono bynajmniej hipotezy Fermata czy Goldbacha ani innych zwykłych zdań arytmetycznych. Z punktu widzenia teorii liczb zdanie Con_{ZFC+MC} nie jest bardziej (ani mniej) interesujące niż zdanie Con_{ZFC} czy zdanie $Con_{ZFC+V=L}$ albo zdanie Con_{ZFC+CH} czy $Con_{ZFC+\neg CH}$. Zdania te nie wyrastają przecież z naturalnej, „codziennej” praktyki teorii liczb, ale z rozważań metateoretycznych. Trudno sobie wyobrazić zwykły argument matematyczny, który miałby wykazać fałszywość zdania Con_{ZFC+MC} w inny sposób, niż odwołując się do wyrafinowanych rozważań teoriomnogościowych[16]. Można więc w zdecy-

[16] Nie twierdzę tu bynajmniej, że takie argumenty można sformułować – a gdyby nawet, to oczywiście nie byłyby to argumenty o charakterze formalnym, bo teoria ZFC+MC jest niesprzeczna relatywnie do teorii ZFC.

dowany sposób stwierdzić, że gdy Lakatos mówi o takich arytmetycznych falsyfikatorach wzmocnień teorii mnogości, to popełnia nadużycie[17].

Lakatos jako przykład potencjalnego falsyfikatora podaje też hipotezę Goldbacha[18]. Faktycznie, jest to zdanie o klarownej treści teorioliczbowej, i mamy pewne bezpośrednie intuicje dotyczące rozumienia tego zdania (w przeciwieństwie do zdań typu Con_{ZFC+MC}, które mówią coś o wielomianach bardzo wielu zmiennych i są – z punktu widzenia zwykłej matematyki – sztuczne). Można więc sobie wyobrazić rozstrzygnięcie hipotezy Goldbacha w zwykłej matematyce. Jest jednak mało prawdopodobne, aby techniki np. geometrii algebraicznej czy analizy rzeczywistej i zespolonej, wykorzystywane w teorii liczb (mam tu na myśli oczywiście nie arytmetykę Peano, ale teorię liczb w takiej wersji, w jakiej faktycznie jest uprawiana), okazały się niezgodne z aksjomatami teorii mnogości ZFC – *de facto* znaczyłoby to bowiem, że „zwykła matematyka" jest po prostu sprzeczna z teorią mnogości, w co raczej trudno uwierzyć[19]. Jednak sama idea Lakatosa jest dość klarowna: chodzi o zilustrowanie faktu, że teoria mnogości mogłaby prowadzić do wniosków sprzecznych z codzienną praktyką, i tym samym byłaby przez tę praktykę sfalsyfikowana.

Bardzo wątpię jednak w to, czy można podać przekonujący przykład zdania ilustrującego mechanizm falsyfikacji, o którym mówi Lakatos. Jest wysoce nieprawdopodobne, aby istniało zdanie będące twierdzeniem matematyki nieformalnej, którego negacja byłaby twierdzeniem ZFC. Ewentualny przykład mógłby co najwyżej odwoływać się do zdania, które np. zostaje

[17] Warto wspomnieć o jeszcze jednej trudności. Otóż zdanie Con_{PA} wyraża niesprzeczność teorii PA. Jest ono (na mocy II twierdzenia Gödla) zdaniem niezależnym od PA, więc teoria $PA + \neg Con_{PA}$ jest teorią niesprzeczną. Wydaje się to nieco zaskakujące, ale tak właśnie jest. Czy należy stwierdzić (w duchu Lakatosa), że jest to przykład teorii niesprzecznej, która sama siebie falsyfikuje? Trudność pojawia się tutaj w momencie, kiedy dokonujemy kodowań i utożsamiamy zdanie arytmetyczne Con_{PA} z intuicyjnym zdaniem wyrażającym niesprzeczność teorii PA (czy innej, interesującej nas teorii – również teoria $ZFC + \neg Con_{ZFC}$ jest teorią niesprzeczną). Lakatos w ogóle nie bierze tego faktu pod uwagę.

[18] Zauważmy, że hipoteza Fermata też dotyczy pewnego równania diofantycznego. Jednak, w przeciwieństwie do zdań wyrażających niesprzeczność pewnych teorii, to zdanie ma bezpośrednie (a nie *via* skomplikowane kodowania!), naturalne i głębokie odniesienia do „zwykłej matematyki" – a jego prawdziwość została wykazana przez odwołania do technik geometrii algebraicznej.

[19] Choć oczywiście można zauważyć, że abstrakcyjne techniki teorii mnogości wykraczają zdecydowanie poza „codzienne" potrzeby matematyki. To jednak nie prowadzi do żadnej sprzeczności.

rozstrzygnięte w pewien sposób w ZFC, ale nieformalna matematyka sugeruje inne rozwiązanie. Gdyby więc okazało się, że np. ZFC dowodzi zdania $P = NP$, to fakt ten stanowiłby poważny argument przeciwko ZFC (większość specjalistów uważa, że $P \neq NP$)[20]. Uważam jednak, że taka sytuacja jest bardzo mało prawdopodobna i poszukiwanie tego typu falsyfikatorów jest zajęciem skazanym na niepowodzenie.

Zgadzam się natomiast z Lakatosem, że można poszukiwać uzasadnień dla aksjomatów teoriomnogościowych w słabszym sensie – nie poprzez falsyfikację w silny sposób, ale poprzez analizę konsekwencji. Nie jest to jednak oryginalny pomysł Lakatosa – o tego typu mechanizmach pisano już znacznie wcześniej (np. Gödel)[21].

3.2. Przykłady Lakatosa a współczesna matematyka

Lakatos w swoich przykładach odwołuje się do matematyki XVIII- i XIX-wiecznej. Podając przykład hipotezy Eulera czy problemu ciągłości funkcji granicznej[22], ukazuje sytuacje, w których pewne pojęcia rozumiane były jedynie intuicyjnie, argumentacja matematyczna zaś miała charakter nie do końca sprecyzowany. Lakatos swoje studium przypadku traktuje jako reprezentatywne dla całej matematyki. I tu popełnia – moim zdaniem – dość poważne nadużycie, nie stawia bowiem tezy czysto historycznej, ale filozoficzną tezę dotyczącą natury matematyki (także współczesnej). Dezawuując nurt formalistyczny, jako nieodpowiadający „żywej" matematyce, zapomina jednocześnie o tym, że jednym z wielkich osiągnięć logiki współczesnej (Fregego, Russella, Hilberta, Gödla etc.) było uświadomienie sobie, że pojęciu matematycznego dowodu należy (i można) nadać precyzyjną postać. I choć znane

[20] Nie wnikając w szczegóły, hipoteza $P = NP$ stwierdza, że problemy, jakie dają się rozwiązać za pomocą algorytmu niedeterministycznego w czasie wielomianowym, dają się też rozwiązać za pomocą algorytmu deterministycznego w tym samym czasie. Gdyby hipoteza ta była prawdziwa, to w szczególności istniałby szybki algorytm sprawdzający, czy dana formuła rachunku zdań jest tautologią.

[21] W filozofii matematyki żywy jest nurt rozważań, w ramach którego analizowane są argumenty (pozaformalne) dotyczące wiarygodności aksjomatów dla teorii mnogości. Prace, w których poruszana jest ta problematyka, to np. Maddy 1988, 1988a, 1997, jak i „kwartet": Feferman 2000, Friedman 2000, Maddy 2000, Steel 2000, w którym autorzy dyskutują problem, czy w teorii mnogości oraz w „zwykłej" matematyce mogą być potrzebne nowe aksjomaty (por. też np. Wójtowicz 2001, 2002, 2006).

[22] Lakatos analizuje również pojęcia wahania ograniczonego funkcji, omawia też przykład definicji mierzalności podanej przez Caratheodory'ego.

z praktyki matematycznej dowody nie są ciągami formuł w rozumieniu teorii dowodu, to jednak wierzymy w to, że dowody te są rekonstruowalne w „logicznie czystej" postaci. Matematycy nie mają problemów o charakterze metodologicznym (czy coś jest, czy nie jest dowodem?) – gdyby pewna argumentacja wyglądała „podejrzanie", to można byłoby ją zrekonstruować w postaci formalnie poprawnej i ustalić w ten sposób jej status. Oczywiście, przykłady Lakatosa jako przykłady historyczne są interesujące – pokazują bowiem mechanizm rodzenia się pojęć i rozumowań matematycznych. Dotyczą jednak matematyki z okresu, gdy nie uświadomiano sobie jeszcze w pełni wagi precyzacji i logicznej formalizacji. Nie sądzę, aby można było w zasadny sposób twierdzić, że w matematyce współczesnej są obecne takie wymykające się formalizacji intuicje i że są pewne pojęcia matematyczne niedefiniowalne w języku formalnym (choć oczywiście nie są formalizowalne pojęcia „okołomatematyczne", jak np. pojęcie elegancji dowodu czy rangi twierdzenia). Lakatos odwołuje się do przykładu teorii mnogości, która rodziła się jako teoria dość abstrakcyjna (ale nie należy zapominać o konkretnych matematycznych motywacjach, które doprowadziły Cantora do stworzenia pojęcia liczby porządkowej). Jednak w ramach teorii mnogości można zrekonstruować zwykłe pojęcia matematyczne i nie można tutaj mówić o rozbieżności między pojęciami matematycznymi a teoriomnogościowymi[23]. Jest więc bardzo mało prawdopodobne, aby mogły istnieć zdania teoriomnogościowe, dowiedzione w teorii mnogości, a obalone w teorii nieformalnej. Obecnie teorie nieformalne są „tak naprawdę" formalne, a metodologiczna samoświadomość matematyków zdecydowanie wyższa niż w wieku XVIII czy XIX.

3.3. *DOWODY I REFUTACJE* – DOBRY PODRĘCZNIK MATEMATYKI?

Lakatos, krytykując matematykę euklidesową, zdaje się twierdzić, że prowadzi ona do błędnego ujęcia nauczania matematyki i że dobry podręcznik matematyki powinien być napisany w stylu heurystycznym. Zamiast gotowych definicji, które wyskakują niczym królik z kapelusza już na pierwszej stronie, zamiast gotowych dowodów, przedstawiających końcowy efekt pracy (który nie pozwala nam ujrzeć zmagań matematyka z oporną materią),

[23] Choć należy przyznać, że teoria mnogości ma do pewnego stopnia „introwertyczny charakter" – w znacznej części dotyczy problemów wewnętrznych, niemających w zasadzie odniesienia do reszty matematyki.

adept matematyki powinien uczyć się matematyki poprzez „rozpoznanie walką", zgodnie z metodologią dowodów i obaleń.

Pytanie o to, jak skutecznie nauczać matematyki, jest pytaniem empirycznym i nie podejmuję się tu go rozstrzygać[24]. Przypuszczam jednak, że podręczniki pisane w duchu *Dowodów i refutacji* byłyby zmorą studentów i w znacznie większym stopniu niż obowiązujące „euklidejskie" podręczniki prowadziłyby do zniechęcenia słuchaczy, samą zaś matematykę wpędziłaby w ślepy zaułek. Pozwolę sobie tu przytoczyć opinię Fefermana, którego zdaniem forma wywodów Lakatosa (najeżonych szczegółami historycznymi, pozornymi wynikami, krytykami, kontrprzykładami) jest męcząca i śledzenie wszystkich szczegółów nie dostarcza lepszego zrozumienia, choć wymaga dużej determinacji (FEFERMAN 1978, 311). Zgadzam się z tym w pełni – choć oczywiście student matematyki mógłby (już po zapoznaniu się z tematyką) taki podręcznik przejrzeć w charakterze ciekawego uzupełnienia i dodatkowego wyjaśnienia. Lakatos akcentuje sam proces tworzenia się wiedzy matematycznej, zarazem zdaje się ignorować fakt, że dowód w ostatecznej wersji ukazuje strukturę logiczną, której zidentyfikowanie było celem matematyka[25].

4. UWAGI KOŃCOWE

Niezależnie od tego, że tezy Lakatosa można uznać za zbyt radykalne, jego argumentację zaś w wielu miejscach za niewiarygodną, to należy przyznać, że zasługą Lakatosa jest dowartościowanie pewnego sposobu uprawiania filozofii matematyki. Klasyczne stanowiska w filozofii matematyki uprawiane były w duchu fundacjonistycznym, interesowały się przede wszystkim matematyką w wersji sformalizowanej, poddanej stosownej rekonstrukcji. Koncentrowały się – w pewnym sensie – już na gotowym pro-

---

[24] Należy tu podkreślić, że praca Lakatosa nie dotyczy dydaktyki matematyki wczesnoszkolnej, ale matematyki takiej, jaka jest uprawiana przez matematyków.

[25] Gdyby te pomysły dydaktyczne Lakatosa przenieść na inne dziedziny (i pozwolić sobie na pewną złośliwość), to należałoby twierdzić, że informatyk, zamiast uczyć się języków programowania, powinien najpierw takie języki wymyślać (a jeszcze wcześniej powinien wymyślić maszynę Turinga); fizyk – zamiast uczyć się równań różniczkowych, powinien „wczuć" się w rolę Galileusza czy Newtona, chemik – zamiast uczyć się np. chemii kwantowej, powinien sam usiłować ją wymyślić etc. Byłoby to z pewnością pouczające, jednak edukacja trwałaby wtedy nie np. 5, ale 500 lat.

dukcie, na matematyce jako na swoistym idealnym konstrukcie. Przedmiotem ich badań była przede wszystkim struktura logiczna teorii, a nie historia i okoliczności ich powstawania. Lakatos zwrócił natomiast uwagę na fakt, że także w odniesieniu do matematyki można stosować język i pojęcia wykraczające poza pojęcia logiczne, akceptując zarazem przekonanie o racjonalności rozwoju matematyki.

Dziś tezy Lakatosa nie brzmią już tak bardzo radykalnie, jak kiedyś. Pojawia się coraz więcej prac, w których autorzy zwracają uwagę na swoiste napięcie pomiędzy pojęciem dowodu formalnego a pojęciem dowodu z praktyki matematycznej (por. np. prace BASSLER 2006, FALLIS 2003, PANZA 2003). Toczone są dyskusje dotyczące wiarygodności ewentualnych nowych aksjomatów (por. np. prace wymienione w przypisie 21). Warto wspomnieć antologię TYMOCZKO 1986, która zawiera szereg tekstów z nurtu antyfundacjonistycznego (nowsza taka antologia to HERSH 2005). Prace HALLETT 1979 dotyczą prób zastosowania koncepcji programów badawczych Lakatosa do opisu rozwoju matematyki. Artykuł OLIVERI 2006 zawiera szczegółową próbę opisu rozwoju teorii mnogości w języku tej koncepcji. Praca ERNEST 1997 to próba wykorzystania koncepcji Lakatosa do ujęcia w duchu społecznego konstruktywizmu. Dobrą prezentację i ważne uwagi krytyczne zawiera praca FEFERMAN 1978. Van Bendegem (np. w pracy VAN BENDEGEM 1988) zwraca uwagę na aspekty dowodów matematycznych, które wymykają się opisowi technicznemu. Najbardziej szczegółowa zaś (wedle mojej wiedzy) monografia poświęcona filozofii matematyki Lakatosa to KOETSIER 1991.

Filozofia matematyki nie jest już dzisiaj tak „euklidesowa” jak 40 czy 50 lat temu – i jest to po części zasługa Lakatosa. Choć więc z wieloma tezami szczegółowymi nie mogę się zgodzić, to jego prace uważam za ważne dla rozwoju tej dyscypliny i warte lektury.

REFERENCJE

BASSLER O. B. 2006: *The surveyability of mathematical proof: a historical perspective*, „Synthese” 148, 99-133.

BENACERRAF P., PUTNAM H. (edd.) 1964: *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

ERNEST P. 1997: *The legacy of Lakatos: reconceptualising the philosophy of mathematics*, „Philosophia Mathematica” (3), 5, 116-134.

FALLIS D. 2003: *Intentional gaps in mathematical proofs*, „Synthese” 134, 45-69.

FEFERMAN S. 1978: *The logic of mathematical discovery vs. the logical structure of mathematics*, „Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association", Vol. Two: Symposia and Invited Papers, 309-327

FEFERMAN S. 2000: *Why the programs for new axioms need to be questioned*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6, 401-413.

FRIEDMAN H. 2000: *Normal mathematics will need new axioms*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6, 434-446.

GÖDEL K. 1944: *Russell's Mathematical Logic*, [w:] *The philosophy of Bertrand Russell*, (Library of Living philosophers, vol. 5), ed. P. A. Schlipp, La Salle, Ill.: Open Court Publishing Company, 123-153. Przedrukowane w: BENACERRAF, PUTNAM 1964, 211-232

GÖDEL K. 1947/64: *What is Cantor's Continuum Problem?*, „American Mathematical Monthly" 54, 515-525. W rozszerzonej wersji przedrukowane w: BENACERRAF, PUTNAM 1964, 258-273.

HALLETT M. 1979: *Towards a theory of mathematical research programmes I & II*, „British Journal for the Philosophy of Science" 30, 1-25, 135-159.

HERSH R. (ed.) 2005: *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, New York: Springer.

KOETSIER T. 1991: *Lakatos' philosophy of mathematics. A historical approach*, Amsterdam–London–New York–Tokyo: North Holland.

LAKATOS I. 1976: *Proofs and refutations. The Logic of mathematical discovery*, Cambridge: Cambridge University Press. Przekład polski (na podstawie wydania z 1999, ed. J. Worral, E. Zahar): *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, przeł. M. Kozłowski, K. Lipszyc, Warszawa: Tikkun 2005.

LAKATOS I. 1978: *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?*, [w:] I. LAKATOS, *Philosophical Papers*, t. 2: *Mathematics, Science and Epistemology*, ed. J. Worall, G. Currie, Cambridge: Cambridge University Press, 24-42. Przekład polski: *Renesans empiryzmu we współczesnej filozofii matematyki?*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, red. R. Murawski, Warszawa: PWN 2002, 215-243.

MADDY P. 1988: *Believing the axioms. I*, „Journal of Symbolic Logic" 53, 481-511.

MADDY P. 1988a: *Believing the axioms. II*, „Journal of Symbolic Logic" 53, 736-764.

MADDY P. 1997: *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

MADDY P. 2000: *Does mathematics need new axioms?*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6, 413-422.

OLIVERI G. 2006: *Mathematics as a quasi-empirical science*, „Foundations of Science" 11, 41-79.

PANZA M. 2003: *Mathematical proofs*, „Synthese" 134, 119-158.

STEEL J. R. 2000: *Mathematics needs new axioms*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 6, 422-433.

TARSKI A. 2001: *Podstawowe pojęcia metodologii nauk dedukcyjnych*, [w:] *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 2, przeł. J. Zygmunt, Warszawa: PWN, 31-92.

TYMOCZKO T. 1986: *New Directions in the philosophy of mathematics. An anthology*, Boston–Basel–Stuttgart: Birkhauser.

VAN BENDEGEM J. P. 1988: *Non-Formal properties of real mathematical proofs*, „Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association", Vol. One: Contributed Papers, 249-254

WÓJTOWICZ K. 2001: *O tzw. programie Gödla*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 28-29, 100-117.

WÓJTOWICZ K. 2002: *O uzasadnianiu w matematyce*, „Roczniki Filozoficzne” 50, z. 1, 527-551.
WÓJTOWICZ K. 2006: *Independence and justification in mathematics*, [w:] *Essays in Logic and Ontology: Dedicated to Jerzy Perzanowski*, ed. J. Malinowski, A. Pietruszczak, (Poznań Studies in the Philosophy of Science and the Humanities, vol. 92), Amsterdam–Atlanta, GA: Rodopi, 349-373.

ON IMRE LAKATOS’ PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

Summary

The paper is concerned with Imre Lakatos’ philosophy of mathematics; it contains a presentation of Lakatos’ views and a critical analysis.

Lakatos formulates his conception on the basis of a case study – namely, the history of Euler’s hypothesis concerning polyhedrons. Differentiation of Euclidean and quasi-empirical theories depending on mechanisms of justification of the theses of a given science is crucial to Lakatos’ conception. Lakatos opposes the view according to which mathematics has a Euclidean character, i.e. it is created by deducing theorems from axioms. In mathematics we deal with the mechanism of formation of explaining hypotheses for basic propositions (which are propositions accepted in informal mathematics) and in this respect it reminds of empirical sciences.

The paper — apart from presenting Lakatos’ conception — also contains several critical remarks. I assert that the concept of arithmetic falsifier for multiplicity theory he introduced is not well justified. I prove the thesis that although examples on which Lakatos’ conception is based do have a historical value, they do not have any reference to contemporary mathematics. And finally I assert that it is doubtful if the way of presenting mathematical problems that Lakatos used can have a didactic value.

Translated by Tadeusz Karłowicz

Słowa kluczowe: quasi-empiryzm matematyczny, falsyfikator arytmetyczny, hipoteza Eulera, styl heurystyczny, antyfundacjonizm.

Key words: mathematical quasi-empiricism, arithmetic falsifier, Euler’s hypothesis, heuristic style, anti-fundationism

Information about Author: Prof. Dr. KRZYSZTOF WÓJTOWICZ – Institute of Philosophy, Warsaw School of Social Psychology; address for correspondence: ul. Chodakowska 19/31, PL 03-815 Warszawa; e-mail: kwojtowicz@swps.edu.pl