

HENRYK PIERSA

## ANALOGIA W FIZYCE

### WSTĘP

Termin „analogia” (gr. ἀναλογία) jest rozumiany jako „odpowiedni stosunek” czy „podobieństwo między tym, co zasadniczo różne”<sup>1</sup>. W fizyce, z pewnymi zastrzeżeniami, najbliższe jest rozumienie ostatnie. Odnosiłoby się ono do praw, a także do opisywanych przez te prawa zjawisk. Będziemy zajmowali się „analogią praw”.

Bliższe określenie „podobieństwa” poprzedzamy kilku przykładami.

Swobodne drgania wahadła matematycznego (układ mechaniczny) i oscylatora elektrycznego opisują równania:

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) + \omega^2\alpha(t) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2}{dt^2}I(t) + \omega^2I(t) = 0, \quad (1)$$

gdzie  $\alpha(t)$  i  $I(t)$  oznaczają odpowiednio: zależną od czasu  $t$  funkcję kątową oraz natężenie prądu, stała częstość kołowa  $\omega$  równa jest ilorazowi długości l wahadła i przyspieszenia ziemskiego  $g$  w potęgę  $\frac{1}{2}$  oraz iloczynowi współczynnika indukcji  $L$  i pojemności  $C$  w potęgę  $-\frac{1}{2}$ .

Rozwiązaniami tych równań są funkcje:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t, \quad I(t) = I_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Stałe  $\alpha_0$  i  $I_0$ , zwane amplitudami, wyznaczają maksymalne wartości funkcji  $\alpha$  oraz  $I$ .

---

Dr hab. HENRYK PIERSA – emerytowany prof. KUL; adres do korespondencji – e-mail: piersa@interia.pl

<sup>1</sup>M.A. Krąpiec, *Analogia*, [w:] *Powszechna Encyklopedia Filozofii*, t. 1, Lublin: PTTA 2000, s.210 n.

Przytoczmy jeszcze jeden przykład analogicznych równań różniczkowych cząstkowych – równania przewodnictwa cieplnego i równania dyfuzji:

$$D\Delta c(x, y, z, t) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \chi\Delta T(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

W powyższych równaniach  $\chi$  oznacza współczynnik przewodnictwa cieplnego,  $D$  – współczynnik dyfuzji,  $T(x, y, z, t)$  i  $c(x, y, z, t)$  – odpowiednio: temperaturę na skali bezwzględnej i stężenie molekularne roztworu.

W obydwu równaniach (1) występuje operator różniczkowy drugiej pochodnej po czasie „ $\frac{d^2}{dt^2}$ ”, operator dodawania „+”, znak równości „=”, stała „ $\omega$ ” i funkcja zerowa „0”. Za wyjątkiem ostatniego symbolu pozostałe są stałymi. W równaniach (3) jako stałe występują: operator Laplace’a „ $\Delta$ ”, operator różniczkowania po czasie „ $\frac{\partial}{\partial t}$ ”, znak równości oraz współczynniki  $\chi$  i  $D$ .

W równaniach (1) zmiennymi są funkcje  $\alpha(t)$  i  $I(t)$ , zaś w równaniach (3) – zależne od współrzędnych przestrzennych i czasu funkcje  $T$  oraz  $c$ . Zarówno para równań. (1) jak i (3) posiadają taką samą strukturę syntaktyczną. Taką samą własność posiadają funkcje (2). Wobec tego zamiast mówić o analogicznych równaniach (1) i (3) lub funkcjach (2), należy powiedzieć, że te (i wiele innych formuł) posiadają taką samą strukturę syntaktyczną<sup>2</sup>. Z jednego równania lub jednej funkcji można otrzymać drugą, dokonując tylko zmiany symboli zmiennych. Albo: dwie analogiczne struktury fizyczne można otrzymać z jednej struktury matematycznej dokonując dwu różnych interpretacji fizycznych, występujących w nich symboli zmiennych. Można powiedzieć, że omawiane struktury są syntaktycznie takie same lub identyczne. Dzięki tej własności równań, funkcji, funkcjonałów, na podstawie znajomości praw jednej teorii, można napisać ich odpowiedniki w drugiej teorii.

Nie chcąc zmieniać wprowadzonej i od dawna stosowanej przez fizyków terminologii, w dalszych rozważaniach będziemy używać nazwy „analogia”, pamiętając o tym, że jest to więcej niż zwykłe podobieństwo.

<sup>2</sup> W przeciwieństwie do struktur syntaktycznych w logice formalnej, w fizyce niektóre symbole posiadają określone odniesienie przedmiotowe. Na przykład  $x, y, z, t$  lub  $r, \alpha, t$ , oznaczają współrzędne przestrzenne i czas, wielkości obdarzone wymiarem.

Analogiczne formuły matematyczne występują w wielu teoriach fizycznych. Ich omówieniu należałoby poświęcić pokaźnej objętości pozycję książkową. Zamiast tego w artykule ograniczymy się do prezentacji dwu par teorii: optyki geometrycznej i geometrycznej optyki elektronowej oraz elektrostatyki i dynamiki płynów idealnych w dwu wymiarach. Analogię pierwszej pary sugeruje już sama nazwa, analogia drugiej pary jest oczywista tylko dla fizyka.

O wyborze tych par teorii zdecydował także inny, nie mniej ważny wzgląd: są one sformułowane z wykorzystaniem różnego aparatu matematycznego.

Na koniec rozważań wstępnych podajemy uwagę terminologiczną. Autor zdaje sobie sprawę z różnicy między opisem a procedurą wyjaśniającą lub prognostyczną. Mimo to za fizykami będzie często używał wyrażen „równanie opisuje”, „funkcja opisuje”. Usprawiedliwieniem dla używania tych skrótowych wyrażen jest fakt, że w równaniach skrycie, a w rozwiązaniach w sposób wyraźny występują istotne cechy stanu lub zjawiska układu, których znajomość jest już wyjaśnieniem lub predykcją.

## 1. OPTYKA GEOMETRYCZNA I GEOMETRYCZNA OPTYKA ELEKTRONOWA

W pierwszych dziesięcioleciach XX wieku, po kilku stuleciach badań, optyka geometryczna była już matematycznie teorią dojrzałą, klasyczną. Gdy w latach dwudziestych i trzydziestych tego stulecia zaczęto prace nad odwzorowaniem przedmiotów za pomocą wiązek elektronów, optyka geometryczna stanowiła wzorzec dla powstającej nowej teorii.

Przeniesiono z optyki geometrycznej całą terminologię, z pojęciem osi optycznej, płaszczyzny przedmiotu i obrazu, z płaszczyznami i punktami głównymi, z ogniskami i odległościami ogniskowymi, powiększeniem poprzecznym i kątowym, a przede wszystkim ze współczynnikiem załamania oraz wiązką elektronów jako analogonem promienia świetlnego. Analogonem pola współczynnika załamania  $n(x, y, z)$ , z dokładnością do czynnika  $D$ , jest pole potencjału  $U(x, y, z)$  w potędze jedna druga<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> W. G l a s e r, *Grundlagen der Elektronenoptik*, Wien 1952. W rozdziale II, § 9 autor zakłada:  $n = Cp$  ( $C$ -stała). Z zasady zachowania energii na pęd elektronu otrzymuje się wzór  $p = \sqrt{2meU}$ , zaś współczynnik załamania  $n = Cp = C \sqrt{2meU} = D\sqrt{U}$ , gdzie  $D = C\sqrt{2me}$ ,  $m$  i  $e$  oznaczają masę i ładunek elektronu.

Podstawę analogii między optyką geometryczną i geometryczną optyką elektronową stanowi, więc odpowiedniość: pole współczynnika załamania  $n(x,y,z)$  i pole potencjału  $U(x,y,z)$  w potędze jedna druga.

Wykorzystując tę odpowiedniość, otrzymuje się odpowiedniość między prawem Snelliusa w obydwu teoriach:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_2}}, \quad (4)$$

gdzie wskaźniki 1, 2 przy  $\alpha, n$  i  $U$  oznaczają wartości tych wielkości w ośrodku 1 i 2.

Dodajmy, że prawo Snelliusa (4) w optyce po raz pierwszy wyprowadził I. Newton, traktując promienie światła jako zbiory korpuskuł.

Jakkolwiek pole elektrostatyczne  $U$  i pole współczynnika załamania  $n$  są fizycznie różnymi polami, posiadają cechy wspólne: są polami potencjalnymi, a więc niewirowymi, na ogół niejednorodnymi, ale izotropowymi.

W związku z tym w tych polach o symetrii sferycznej [ $n(r), U(r)$ ] tory wszystkich promieni i wiązek elektronów są krzywymi płaskimi. Dla promieni świetlnych dowód tego twierdzenia podają M. Born i E. Wolf<sup>4</sup>. Dla wiązek elektronów autor tego artykułu dowodu nie przeprowadził. Na podstawie omawianej analogii jest przekonany, że jest ono także prawdziwe.

Pomimo wymienionych cech wspólnych omawianych pól występują i różnice. W układach optycznych współczynnik załamania doznaje skokowych zmian na granicy szkło-powietrze, natomiast potencjał elektrostatyczny i elektrostatyczny współczynnik załamania zmieniają się w sposób ciągły. W odpowiednio ukształtowanym polu elektrostatycznym możliwe jest odwzorowanie danego przedmiotu. W układach optycznych do tego celu niezbędna jest soczewka, częściej układy soczewek. Dodajmy, że tory wiązek elektronów również zmieniają się w sposób ciągły, podczas gdy tory promieni stanowią zbiory prostoliniowych odcinków.

W naszych rozważaniach uwzględniane jest tylko pole elektrostatyczne. Pominięte jest, często stosowane, pole magnetyczne (np. w mikroskopie), które jako wirowe czyni pole magnetycznego współczynnika załamania wielkością anizotropową<sup>5</sup>, niszczącą dyskutowaną przez nas analogię.

<sup>4</sup> M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, 4 ed., Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt 1968, rozdz. 3 § 3.2.1.

<sup>5</sup> W stacjonarnym polu magnetycznym o potencjale wektorowym  $\vec{A}$  magnetyczny współczynnik załamania wyraża się wzorem  $\mu = \frac{-e}{P_a} (\vec{A} \cdot \vec{s})$ , gdzie  $\vec{s}$  jest wersorem stycznym do toru

Optyka geometryczna i geometryczna optyka elektronowa opierają się na dwu zasadach wariacyjnych: zasadzie Fermata

$$\delta W = \delta \int_{P_0}^{P_1} n \, dS = 0 \quad (5)$$

i zasadzie Hamiltona

$$\delta S = \delta \int_{P_0}^{P_1} L \, dt = 0. \quad (6)$$

Matematycznie wysławia się je następująco: wariacja drogi optycznej<sup>6</sup> między dwoma punktami  $P_0$  i  $P_1$  jest równa zero i wariacja działania Hamiltona pomiędzy dwoma punktami  $P_0$  i  $P_1$  jest równa zero.

Natomiast sens fizyczny tych zasad jest następujący: spośród różnych torów wirtualnych, łączących punkty  $P_0$  i  $P_1$ , promień świetlny porusza się po takim, dla którego droga optyczna przyjmuje wartość minimalną (dokładniej stacjonarną). W wysłowieniu zasady Hamiltona wyrażenie „droga optyczna” należy zastąpić terminem „działanie” (mierzone funkcją Lagrange’a  $L$  pomnożoną przez czas  $t$ )<sup>7</sup>.

Gdy funkcja Lagrange’a i Hamiltona wyraźnie nie zależy od czasu, w uszczegółowionej postaci, zasada (6) przyjmuje postać:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} \vec{p} \cdot d\vec{r} = \delta \int_{P_0}^{P_1} (\vec{p} \cdot \vec{s}) dS = \delta \int_{P_0}^{P_1} \mu dS = 0, \quad (7)$$

gdzie  $\vec{p}$  oznacza pęd cząstki,  $\vec{s}$  – wektor styczny do toru cząstki, elektryczny współczynnik załamania

$$\mu(x, y, z) = \frac{1}{p_a} \left( \vec{p} \cdot \vec{s} \right). \quad (8)$$

Zasada Hamiltona (7) jest równoważna z zasadą Fermata.

Głównym zadaniem optyki geometrycznej i geometrycznej optyki elektronowej jest wyprowadzenie z zasad (5) i (7) takich formuł, które zapew-

elektronu,  $p_a$  – pędem cząstki. Por. G l a s e r, *Grundlagen der Elektronenoptik*, rozdz. XVI, § 98, wzór 98,4.

<sup>6</sup> Droga optyczną nazywamy iloczyn współczynnika załamania  $n$  i drogi geometrycznej  $S$ .

<sup>7</sup> Obydwie zasady obowiązują w warunkach, gdy torzy wirtualne należą do otoczenia toru rzeczywistego. Ponadto przez każdy punkt otoczenia przechodzi tylko jeden promień lub jedna wiązka elektronów.

<sup>8</sup> Symbol  $p_a$  oznacza początkowy pęd elektronu. Zamiast  $p$  można podstawić potencjał elektryczny (por. odnośnik 3).

niłyby w miarę wierne odwzorowanie przez układ optyczny i elektronowy każdego przedmiotu.

Idealem byłoby odwzorowanie wierne, w którym każdy punkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  płaszczyzny przedmiotu uległby wzajemnie jednoznaczному przekształceniu w jeden punkt  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  obrazu. W optyce geometrycznej tylko zwierciadło płaskie i ogniska elipsoidy odwzorowują wierne punkt w punkt; powierzchnia elipsoidy odwzorowuje jedno ognisko w drugie.

Są to jednak układy, których w przyrządach optycznych nie wykorzystuje się.

Układy stosowane w mikroskopach, lunetach i innych przyrządach pozwalają realizować odwzorowania, co najwyżej w przybliżeniu wierne. Odznaczają się one symetrią osiową z osią optyczną jako osią symetrii. Takimi układami będziemy się w dalszych rozważaniach zajmować.

Odwzorowania uzyskiwane w układach optycznych i elektronicznych matematycznie są opisywane przez kolejne składniki rozwinięcia w szereg Taylora tzw. eikonału kąтового  $W$  dla układów optycznych i działania  $S$  w układach elektronicznych. Rozkład eikonału  $W$  ma postać:

$$W = W_0 + W_2 + W_4 + \dots \quad (9)$$

Zamieniając  $W$  na  $S$  otrzymujemy rozkład działania Hamiltona.

Odwzorowania dokonywane przy pomocy przyosiowych promieni świetlnych lub wiązki elektronów, tworzących małe kąty z osią optyczną (praktycznie do osi równoległych) dobrze opisuje drugi składnik szeregu (9). Dla układu optycznego ma on postać:

$$W_2 = A\rho + A'R + A'x,^9 \quad (10)$$

gdzie:

$$\rho = \alpha^2 + \beta^2, \quad R = \alpha'^2 + \beta'^2, \quad x = \alpha\alpha' + \beta\beta', \quad A = \frac{n}{2}(a + f), \quad A' = \frac{n'}{2}(f' - a'), \quad A'' = -nf',$$

$$f = \frac{nr_k}{n' - n}, \quad f' = \frac{n'r_k}{n' - n}.^{10} \quad (11)$$

<sup>9</sup> W. Weizel, *Fizyka teoretyczna, Fizyka zjawisk, Ruch, Elektryczności, Światło, Ciepło*, t. I, cz.2, Warszawa 1960, cz. D, §4. Wzór (10) jest przekształceniem wzoru (38a) w podręczniku.

<sup>10</sup> We wzorze (11)  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  oznaczają kosinusy kierunkowe wektorów  $\vec{s}_o$  i  $\vec{s}_b$  z osiami  $X, Y$  i  $X', Y'$ ,  $n, n'$  oznaczają współczynniki załamania w przestrzeni przedmiotu i obrazu,  $r_k$  – promień krzywizny powierzchni załamującej,

Z wzoru (10) otrzymuje się związki między współrzędnymi punktu  $P(X,Y,Z)$  w płaszczyźnie przedmiotu i punktu  $P'(X',Y',Z')$  w płaszczyźnie obrazu:

$$X' = X \frac{f}{Z+f}, \quad Y' = Y \frac{f}{Z+f}, \quad Z' = Z \frac{f}{Z+f}, \quad (12)$$

gdzie  $f$  jest ogniskową cienkiej soczewki

Analogon wzoru (10) dla układu elektronooptycznego ma postać

$$\frac{S}{p_1} = \frac{1}{2} a_1 \rho + a_2 \kappa + \frac{1}{2} a_3 R, \quad (13)$$

gdzie  $a_1, a_2, a_3$  są stałymi,  $\rho = x_b^2 + y_b^2$ ,  $R = x_o^2 + y_o^2$ ,  $\kappa = x_o x_b + y_o y_b$ ,  $p_1$  jest pędem elektronu w płaszczyźnie obrazu. Wskaźniki  $o$  i  $b$  przy współrzędnych oznaczają ich wartości w płaszczyźnie przedmiotu i przesłony. W obszarze przesłona-płaszczyzna obrazu autor zakłada prostoliniowe torony (np. w mikroskopie).

We wzorze (13) zmiennymi są współrzędne punktów, podczas, gdy we wzorze (10) są one kosinusami kierunkowymi wektorów  $\vec{s}_o$  i  $\vec{s}_b$ . Zmienne „kątowe”  $\alpha, \beta, \dots$  i „punktowe”  $x_o, y_o, \dots$  występują w takich samych kombinacjach algebraicznych. Jednakże zbiory, do których one należą, są różne. Dla (odcinków prostych), torów promieni świetlnych i wiązek elektronów między przesłoną a ekranem sytuacja w obydwu układach jest taka sama. Różnica ma miejsce dla krzywoliniowej części torów elektronów.

Mimo to że wzoru (13) wyprowadził Glaser związki między współrzędnymi  $x_o, y_o$  oraz  $x_1, y_1$  (także liniowe):

$$x_1 = Vx_o, \quad y_1 = Vy_o, \quad (14)$$

gdzie  $V$  jest powiększeniem poprzecznym, zaś  $x_1, y_1$  są współrzędnymi obrazu!

W pierwszym przybliżeniu, zwanym przybliżeniem Gaussa, zarówno w układach optycznych, jak i elektronooptycznych otrzymuje się w miarę wierne odwzorowanie przedmiotów.

Jeżeli jednak w układach odwzorowujących czynne są duże powierzchnie „łamiące”, a promienie i wiązki elektronów tworzą z osią optyczną duże kąty – uzyskane obrazy obarczone są błędami, zwanymi aberracjami geometrycznymi.

Odwzorowania z aberracjami opisuje następny składnik szeregu (9)

<sup>11</sup> Weizel, *Fizyka teoretyczna*, § 5, wzór (52a).

<sup>12</sup> Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik*, rozdz. XXII, § 103. Są to składniki liniowe szeregu (103,32).

<sup>13</sup> Tamże, rozdz. XXII, § 104, wzór (104,7).

$$W_4 = \frac{1}{4}AR^2 + \frac{1}{4}B\rho^2 + C\kappa^2 + \frac{1}{2}DR\rho + ER\kappa + F\rho\kappa \quad (15)$$

dla układu optycznego. Analogon optycznoelektronowy jest, z dokładnością do czynnika  $(-1)$ , tego samego kształtu.<sup>14</sup>

Zamiast współrzędnych  $x_1, y_1$  otrzymanych dla wiązki elektronów i promieni przyosiowych, w drugim przybliżeniu należy brać wielkości  $\Delta x = x_1 - x_0$  i  $\Delta y = y_1 - y_0$ . Wyrażenia na  $\Delta x$  i  $\Delta y$  dla odwzorowania optycznego podaje Weizel [§9, wz. (75a)], a dla odwzorowania elektronooptycznego – Glaser [§ 105, wz. (105,2)]. Otrzymane ze wzoru (15) i jego odpowiednika dla pola elektrostatycznego wyrażenia na  $\Delta x$  i  $\Delta y$  pozwalają opisać aberracje geometryczne w obydwu rodzajach układów. Aberrację sferyczną przedstawia składnik z  $B \neq 0$ , astygmatyzm i wygięcie płaszczyzny – składniki z  $C \neq 0$  i  $D \neq 0$ , dystorsję – składnik z  $E \neq 0$  oraz komę – składnik z  $F \neq 0$ .

Pomijamy charakterystykę poszczególnych błędów odwzorowań. Zainteresowanemu czytelnikowi polecamy lektury cytowanych autorów: W. Weizla i W. Glasera albo monografię M. Borna i E. Wolfa.

Wyprowadzone z zasady Fermata i Hamiltona równokształtne konsekwencje pozwalają opisać i wyjaśnić w pierwszym przybliżeniu odwzorowanie stygmatyczne punktów, w drugim przybliżeniu – podstawowe błędy odwzorowań w obydwu dyskutowanych układach.

Omawiana analogia i matematycznie „dojrzała” optyka geometryczna wyznaczyły optykom elektronowym zarówno wykaz zagadnień, jak i sposoby ich matematycznego rozwiązania. W stosunku do optyki elektronowej spełniły one rolę heurystyczną. Dzięki temu na opracowanie tej ostatniej, zamiast stuleci, wystarczyło lat kilkadziesiąt. Pierwszy mikroskop elektronowy M. Knoll i E. Brucke skonstruowali bowiem już w 1931 r., a od 1938 r. firma Siemens produkowała je seryjnie.

Uwzględnienie w przyrządach elektronooptycznych także stacjonarnego pola magnetycznego powoduje naruszenie dyskutowanej analogii. Poza wspomnianą anizotropią współczynnika załamania, obecność stacjonarnego pola magnetycznego powoduje wystąpienie w drugim przybliżeniu trzech dodatkowych błędów odwzorowań: anizotropowej komy i dystorsji oraz anizotropowego astygmatyzmu<sup>15</sup>. Geometryczna optyka z wykorzystaniem obydwu rodzajów pól jest zakresowo szersza od porównywanych teorii.

<sup>14</sup> Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik*, rozdz. XVII, § 103, składniki 5-10 we wzorze (103,32).

<sup>15</sup> Tamże, rozdz. XVII, § 106 n.



Zarówno optyka elektronowa sformułowana dla pola elektrostatycznego jak i pola elektrostatycznego połączonego ze stacjonarnym polem magnetycznym, opiera się na zasadzie wariacyjnej Hamiltona, odkrytej przez angielskiego uczonego w klasycznej mechanice punktów materialnych. Dlatego dopuszczalne jest w niej posługiwanie się terminami: „tor” lub „trajektoria” elektronu lub wiązki tych cząstek. Z tego powodu Glaser proponuje nazwę „geometryczna optyka elektronowa”. Teorię tę wiedeński fizyk przeciwstawia optyce falowo-mechanicznej, bazującej na równaniu Schrödingera. Analogonem tej ostatniej jest optyka falowa. Dodajmy, że całka tego równania (dla układu o symetrii osiowej) jest, pomijaną w geometrycznej optyce elektronowej, formułą opisującą dyfrakcję Fresnela<sup>16</sup>.

## 2. POLE ELEKTROSTATYCZNE – POLE PRĘDKOŚCI PŁYNÓW DOSKONAŁYCH

Zakładamy, że czytelnikowi znane są własności pola elektrostatycznego z natężeniem  $\vec{E}$ , liniami sił, potencjałem  $U$ , pojęciem powierzchni stałego potencjału (ekwipotencjalnych) i twierdzeniem, według którego wektor  $\vec{E}$  jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej, matematycznie:  $\vec{E} = -\text{grad}U$ .

Przytaczamy natomiast najważniejsze informacje z dynamiki płynów doskonałych. Jednym z ważnych pojęć jest „cząstka płynu”. W mechanice klasycznej płynów, także doskonałych, cząstka stanowi na tyle małą objętość płynu, aby dwu-, trzykrotne powiększenie albo zmniejszenie tej objętości nie zmieniło własności fizycznych cząstki. Z drugiej strony ten element płynu winien zawierać na tyle dużo molekuł, aby było można sensownie mówić o gęstości, czy temperaturze tego elementu. Poruszającej się cząstce płynu przyporządkowany jest wektor prędkości  $\vec{v}$ . Tor, do którego w każdym punkcie jest styczny wektor  $\vec{v}$  nazywany jest linią prądu. Zbiór linii prądu w pewnym obszarze płynu wyznacza wektorowe pole prędkości.

Wszystkie, występujące w przyrodzie płyny rzeczywiste posiadają lepkość, makroskopowo określoną współczynnikiem lepkości  $\eta$ . W przypadkach, gdy jest ona na tyle mała, że można ją zaniedbać, mówi się o płynie doskonałym. Okazuje się, że w wielu przypadkach za pomocą tego modelowego pojęcia można wyjaśnić wiele zjawisk towarzyszących także ruchom płynów rzeczywistych.

<sup>16</sup> Tamże, rozdz. XXVIII, § 160.

W dalszych rozważaniach interesować się będziemy dwuwymiarowymi, stacjonarnymi ruchami nieściśliwego płynu doskonałego. Przez ruch dwuwymiarowy rozumie się taki ruch, w którym wektory prędkości cząstek są równoległe do pewnej płaszczyzny, np. płaszczyzny  $x$ - $y$ . Podobnie mają być zorientowane prędkości w innych, równoległych do  $x$ - $y$ , płaszczyznach.

Płyn nieściśliwy odznacza się tym, że jego gęstość nie zależy od ciśnienia. Matematycznie taki płyn opisuje równość  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .

Wreszcie ruchem stacjonarnym nazywany jest ruch, w którym wektor prędkości cząstek nie zmienia się w czasie. Okazuje się, że dla takiego rodzaju ruchu można wprowadzić funkcję  $\phi(x,y)$  nazywaną potencjałem prędkości, spełniającą równość  $\operatorname{grad} \phi(x,y) = \vec{v}(x,y)$ .

Tak scharakteryzowane pole prędkości jest analogonem pola elektrostatycznego  $U(x,y)$ :

$$\vec{v}(x,y) = \operatorname{grad} \phi(x,y) \quad \vec{E}(x,y) = -\operatorname{grad} U(x,y). \quad (16)$$

Z dokładnością do czynnika  $(-1)$  obydwie równości są równokształtne. Zbiory funkcji

$$\phi(x,y) = c_1 \quad \text{i} \quad U(x,y) = c_2 \quad (17)$$

dla różnych wartości  $c_1$  i  $c_2$  wyznaczają odpowiednie rodziny krzywych: stałego potencjału prędkości i stałego potencjału elektrostatycznego.

Oprócz potencjału prędkości w mechanice płynów wprowadza się tzw. funkcję prądu (lub linię prądu)  $\psi(x,y)$  zdefiniowaną równaniem:

$$v_x dy - v_y dx = 0. \quad (18)$$

Oznaczając  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  i  $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , równaniu (18) nadaje się postać:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0. \quad (19)$$

Zastępując w równaniu (18)  $v_x$  i  $v_y$  przez  $-E_x$  i  $E_y$  otrzymuje się równanie różniczkowe dla linii sił pola elektrostatycznego. Z ostatniego równania widać, że wzdłuż linii prądu lub linii sił funkcja psi posiada stałą wartość. W teorii funkcji analitycznych dowodzi się twierdzenia, według którego rodzina funkcji  $\phi$  lub  $U$  jest ortogonalna do rodziny funkcji  $\psi$ :

$$\operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi = 0. \quad (20)$$

Jest to ważne twierdzenie dla matematycznej analizy dyskutowanych pól.

W dalszych rozważaniach zastosujemy teorię funkcji analitycznych do badania wybranych rodzajów pól. W zastosowaniach do tych pól część rzeczywistą  $\text{Re } Z(z)$  i urojoną  $\text{Im } Z(z)$  funkcji zmiennej zespolonej  $Z(z)$  interpretuje się odpowiednio: jako funkcję  $\phi$  (lub  $U$ ) i jako funkcję  $\psi$ , albo nierz odwrotnie.

Gdy dla danego rodzaju pól hydrodynamiki lub elektrostatyki funkcja  $Z(z)$  zostanie odgadnięta, dalszy ich matematyczny opis jest stosunkowo prosty.

Powyższe rozważania zilustrujemy kilkoma przykładami.

a. Niech będzie dana funkcja

$$Z(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i 2xy, \quad (21)$$

wtedy:

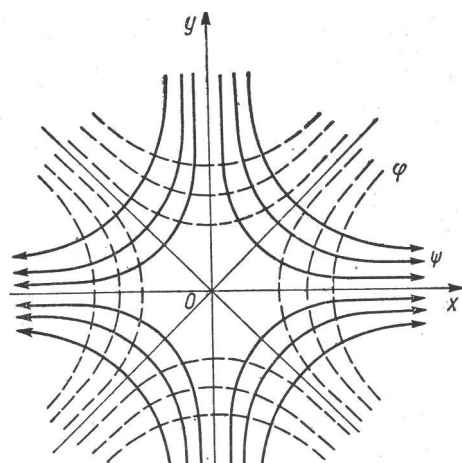
$$\text{Re } Z(z) \equiv \phi(x, y) = x^2 - y^2, \text{Im } Z(z) \equiv \psi(x, y) = 2xy. \quad (22)$$

Rodzinę linii  $\phi(x, y) = c_1$ , zaznaczoną na Rys. 1 liniami przerywanymi, w hydrodynamice interpretuje się jako linie stałego potencjału prędkości, natomiast rodzinę  $\psi(x, y) = c_2$  - jako linie prądu.

Wzdłuż tych linii odbywałby się przepływ płynu wokół, ustawionych na osiach  $x$  i  $y$ , sztywnych płaszczyzn. Kierunek przepływu wskazują, umieszczone na końcach linii, strzałki. Przy interpretacji elektrostatycznej, linie przerywane wyznaczyłyby linie sił, a ciągłe - linie ekwipotencjalne w polu wytworzonym przez odizolowane, przewodzące płaszczyzny z umieszczonymi na nich przeciwnego znaku ładunkami elektrycznymi.

Według B. Średniawy w tym przykładzie „...zasadniczo nic nie zmieniłoby się przy zamianie  $\phi$  na  $\psi$ .”<sup>17</sup>

Fizycznie nic by się nie zmieniło pod warunkiem, że związane z układem współrzędnych  $x$ - $y$  sztywne płaszczyzny obrócono by o kąt  $45^\circ$ . Jednakże w nowym układzie współrzędnych  $x'$ - $y'$  równania rodzin hiperbol miałyby postać:



Rys. 1

<sup>17</sup> B. Średniawa, *Hydrodynamika i teoria sprężystości*, Warszawa 1977, s.276.

$$\psi(x', y') = x'^2 - y'^2 \text{ i } \phi(x', y') = -2x'y'. \quad (23)$$

A więc w tym przypadku także rodzina hiperbol stałego potencjału prędkości i linii sił pola elektrostatycznego jest opisywana równością  $x^2 - y^2 = \text{const.}$ , natomiast rodzina funkcji prądu i linii ekwipotencjalnych – równością  $|2xy| = \text{const.}$

## b. Funkcja

$$Z(z) = A \ln z = A \ln r + iA\vartheta, \quad (24)$$

gdzie  $A \in R^+$ ,  $\vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ , zaś  $\vartheta = \text{arctg} \frac{y}{x}$ .

Funkcje  $\text{Re } Z(z)$  i  $\text{Im } Z(z)$  mają postać:

$$\phi(r) = A \ln r \text{ i } \psi(\vartheta) = A\vartheta. \quad (25)$$

W tym przykładzie linie stałego potencjału prędkości  $\phi$  i „ekwipotencjału” kulombowskiego  $U$  stanowi rodzina współśrodkowych okręgów ze środkiem w punkcie osobliwym  $r = 0$ . Natomiast linie prądu i linie sił  $\psi$  stanowią, wychodzące z punktu  $r = 0$ , linie proste. W elektrostatyce takie pole wytwarza umieszczony w punkcie  $r = 0$  dodatni ładunek punktowy, zaś w hydrodynamice - umieszczona w tymże punkcie wążiutka rurka, z której wypływa płyn. Dodajmy, że w tym polu prędkość płynu wynosi  $v = v_r = Ar^{-1}$ .

Próba zamiany funkcji  $\phi$  i  $\psi$  w (25) na

$$\phi'(\vartheta) = A\vartheta \text{ i } \psi'(r) = A \ln r, \quad (26)$$

w hydrodynamice opisuje zupełnie inne pole. Linie prądu  $\ln r = \text{const.}$ , stanowiłyby współśrodkowe okręgi ze środkiem w punkcie osobliwym, linie zaś stałego potencjału prędkości byłyby wychodzącymi z punktu  $r = 0$  prostymi  $\vartheta = \text{const.}$  Ruch taki nazywany jest ruchem wirowym<sup>18</sup>. W elektrostatyce dla  $\vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle$  funkcje (26) nie przedstawiają żadnego pola fizycznego<sup>19</sup>.

Za pomocą funkcji analitycznych można opisać pola bardziej złożone.

<sup>18</sup> Por. np. N.S. A r z a n i k o w, W.N. M a l c e w, *Aerodynamika*, Warszawa 1959, rozdz. III, § 18, s. 80.

<sup>19</sup> Por. jednak poniższą uwagę. Jeżeli argument główny dyskutowanej funkcji jest zawarty w przedziale  $\langle 0, 2\pi - \alpha \rangle$ , to funkcje  $\phi'(\vartheta) = A\vartheta$  i  $\psi'(r) = A \ln r$  będą opisywały linie ekwipotencjalne (promienie  $r$ ) i linie sił (fragmenty współśrodkowych okręgów) w podanej dziedzinie. Pole takie wytworzyłoby dwuwymiarowe ostrze przewodzące, którego jedno ramie posiadałoby ładunek dodatni, zaś odizolowane od niego drugie ramie – ładunek ujemny. Kąt ostry  $\alpha$  między ramionami wynosiłby  $\alpha$ . J. W e y s e n h o f f, *Zasady elektrodynamiki optyki klasycznej*, Warszawa 1957, s. 251

Tworzy się je przez sumowanie funkcji syntaktycznie prostszych. Dodajmy, że czynność ta jest dozwolona dzięki liniowości równania Laplace'a, które spełnia zarówno rzeczywista jak i urojona część funkcji analitycznej.

c. Dodając do funkcji  $Z(z) = Az$  charakteryzującej pole jednorodne, funkcję  $Z(z) = A\frac{R^2}{z}$  (pole dipola) otrzymujemy funkcję

$$Z(z) = A\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \quad (27)$$

Interpretacja stałej  $A$  jako (ze znakiem minus) prędkości w polu jednorodnym  $v_0$ ,  $R$  jako promienia nieskończenie długiego walca, pozwala interpretować funkcję (27) jako opisującą opływ walca o przekroju kołowym:

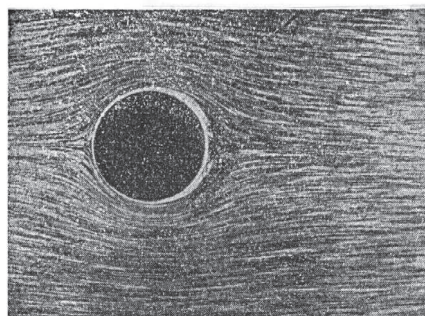
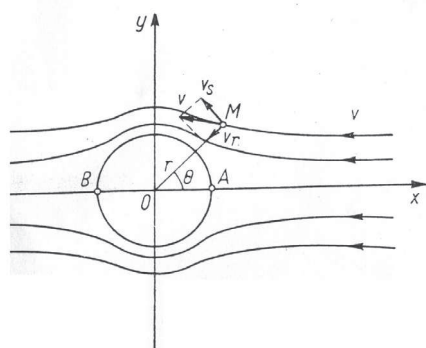
$$Z(z) = -v_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \quad (28)$$

Funkcje

$$\phi(r, \vartheta) = -v_0\left(1 + \frac{R^2}{r}\right)r \cos \vartheta \quad \text{i} \quad \psi(r, \vartheta) = -v_0\left(1 - \frac{R^2}{r}\right)r \sin \vartheta \quad (29)$$

przedstawiają rodzinę linii ekwipotencjalnych  $\phi$  i linii prądu  $\psi$  przy niewirowym opływaniu, ustawionego prostopadle do płaszczyzny  $x$ - $y$ , walca. W górnej części Rys. 2 zaznaczonych jest kilka linii prądu. W punkcie  $M$  zaznaczone są składowe  $v_s$  i  $v_r$  oraz ich suma wektorowa prędkości  $\vec{v}$ . W dolnej części omawianego rysunku zamieszczona jest fotografia przedstawiająca opływ walca przez wodę.

Przyrównując do zera funkcję  $\psi$  na powierzchni walca  $r = R$ , przekonujemy się, że dla  $\vartheta = 0^\circ$  (punkt  $A$ ) i  $\vartheta = 180^\circ$  (punkt  $B$ ) linia prądu się urywa. Efekty te dostrzec można na zamieszczonej fotografii. Podobieństwo pola przewidzianego na podstawie funkcji  $\psi$  i pola z fotografii jest zadziwiająco duże.



Rys. 2

Zastępując w (28) i (29)  $-v_0$  przez natężenie  $-E_0$  jednorodnego pola elektrostatycznego, funkcję  $\phi(r, \vartheta)$  – przez potencjał  $U(r, \vartheta)$  oraz interpretując funkcje  $\psi(r, \vartheta)$  jako linie sił, otrzymujemy funkcje opisujące pole elektrostatyczne, powstałe wokół nieskończenie długiego, posiadającego ładunek elektryczny, walca.

Funkcje  $\phi(r, \vartheta)$  [lub  $U(r, \vartheta)$ ] i  $\psi(r, \vartheta)$  określone są dla dowolnego przekroju walca płaszczyzną  $x$ - $y$ . Zakładając, że omawiane pola są takie same dla innych, ale równoległych do  $x$ - $y$ , płaszczyzn, otrzymujemy opis opływu walca i pola sił przewodzącego walca dla różnych wartości na osi  $z$ .

Dodajmy, że rozumowanie o charakterze pola w trzech wymiarach na podstawie ustalonej „geometrii” tego pola w dwu wymiarach jest dozwolone tylko dla pól odznaczających się symetrią osiową.

d. Listę przykładów kończymy funkcją, tym razem odwrotną

$$z(Z) = Z + e^Z, \quad (30)$$

podaną w roku 1868 r. przez H. Helmholtza<sup>20</sup> do opisu pola wypływu płynu pomiędzy dwu równoległych płyt.

Części rzeczywista i urojona funkcji  $z(Z)$  mają postać:

$$x(X, Y) = X + e^X \cos Y, \quad y(X, Y) = Y + e^Y \sin Y. \quad (31)$$

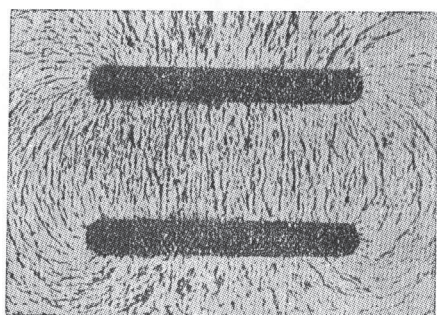
Rodzina linii  $y(X, Y) = \text{const.}$  przedstawia linie prądu wypływającego płynu w interpretacji hydrodynamicznej i linie ekwipotencjalne pola elektrostatycznego kondensatora płaskiego. Rodzina linii  $x(X, Y) = \text{const.}$  opisuje linie stałego potencjału prędkości i linie sił pola elektrostatycznego.

Na Rys. 3b<sup>21</sup> pokazano, obliczoną na podstawie funkcji (31) geometrię pól  $y = \text{const.}$  i  $x = \text{const.}$  Fotografia 3a przedstawia rozkład linii sił pola elektrostatycznego wytworzonego przez dwie równoległe płytki (model kondensatora płaskiego) z ładunkiem elektrycznym przeciwnego znaku.

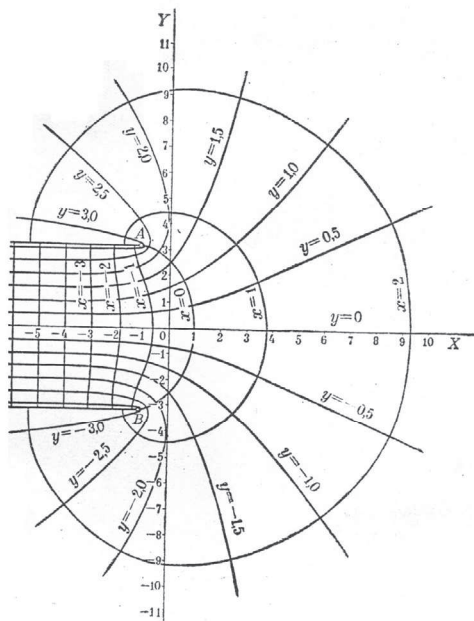
Po krótkiej i z konieczności wybiórczej prezentacji kilku przykładów zastosowania funkcji analitycznych do opisu własności porównywanych pól, wypada zastanowić się nad zasadnością stosowania tej procedury poznawczej, a także nad zakresem obowiązywania interesującej nas analogii.

<sup>20</sup> H. Lamb, *Hydrodynamics*, 5<sup>th</sup> ed., Cambridge 1924, s. 71, odnośnik \*.

<sup>21</sup> Rysunek 3b pochodzi z: W. Pogorzelski, *Analiza Matematyczna*, t. IV, Warszawa 1956, s. 35.



a



b

Rys. 3

Przede wszystkim chodzi o odpowiedź na pytanie, czy obydwa rodzaje pól spełniają warunki do stosowania teorii funkcji analitycznych. Pytanie to dotyczy przede wszystkim mechaniki płynów. Wielkości elektryczne: potencjał, czy wektor natężenia są funkcjami ciągłymi i dwukrotnie różniczkowalnymi po współrzędnych przestrzennych.

U krytycznie oceniającego wszelkie czynności poznawcze filozofa mogą pojawić się wątpliwości, czy warunki te spełnia płyn o zaniedbanej strukturze ziarnistej. Ponadto pojęcie płynu doskonałego, przy tym nieściśliwego, może wzbudzać nie mniejsze zastrzeżenia. Wreszcie wybór wyidealizowanego, dwuwymiarowego ruchu zmusza do zastanowienia. Przecież w praktyce badawczej mamy zawsze do czynienia z płynami rzeczywistymi, uczestniczącymi w ruchach trójwymiarowych.

W odpowiedzi na te zastrzeżenia należy zaznaczyć, że przedmiotem badań hydrodynamiki i aerodynamiki są makroskopowe ruchy płynów. Na tym poziomie badań gęstości, ciśnienia, temperatury, prędkości oraz badane potencjały  $\phi$  i  $\psi$  mogą być traktowane jako ciągłe funkcje współrzędnych, a dwie ostatnie funkcje spełniają także równanie Laplace'a. Fizyk doda argument najważniejszy: wyprowadzone z odpowiednich założeń konsekwencje są potwierdzone w doświadczeniach.

Odnosnie do sposobu testowania tych konsekwencji za pomocą fotografii należy stwierdzić, że stanowią one adekwatne do badania ruchów makroskopowych płynów procedury badawcze. Drobne ziarenka rutyłu, gipsu czy węgla drzewnego, umieszczone w oleju parafinowym uwidaczniają linie sił pola elektrostatycznego. Małe cząstki likopodium lub srebra, zawieszane w przepływającym płynie zaznaczają krótkie odcinki równoległe do linii prądu.

Jak już mówiono, dla pól o określonej geometrii odpowiednie funkcje zmiennej zespolonej fizycy odgadują. Istotną rolę odgrywa tu znajomość teorii, prawdopodobnie obserwacja wybranych pól, a także intuicja badacza.

Jeżeli się uwzględni fakt, że pierwszymi uczonymi, którzy zastosowali teorię funkcji analitycznych do opisu linii prądu, byli G.R. Kirchhoff i H. Helmholtz<sup>22</sup>, wymienione cechy uczonych były spełnione. Należy dodać, że oprócz metody stosowania funkcji analitycznych istnieje, choć bardziej uciążliwa, metoda alternatywna. Stanowi ją całkowanie równania Laplace'a.

Zagadnienie zakresu stosowalności analogii w jednym znaczeniu wiąże się z lepkością płynów rzeczywistych, a konkretnie z wartością numeryczną tzw. liczby Reynoldsa<sup>23</sup>. Gdy dla danego przepływu jej wartość liczbową jest mniejsza od wartości krytycznej  $Re_k$ , ruch płynu jest uporządkowany, warstwowy (laminarny). Pola takich przepływów mogą być analogonami odpowiednich pól elektrostatycznych. Dopiero gdy wartość omawianej liczby jest większa od  $Re_k$ , ruch płynu staje się burzliwy i omawiana analogia przestaje obowiązywać. W występowaniu ruchów laminarnych płynów rzeczywistych doszukiwać należy się przyczyny wykorzystywania ich przy testowaniu predykcji proponowanych przez teorię płynów doskonałych.

Z innego rodzaju ograniczonością stosowania analogii spotkaliśmy się przy próbie zamiany interpretacji funkcji  $U$  i  $\psi$  w przykładzie **b**.

Dla funkcji  $Z(z) = \pm iA \ln z$  o  $\vartheta \in (0, 2\pi)$ , w hydrodynamice przepływów płaskich, opisujących pole wypływu (źródło, +) i wpływania (upust, -) płynu do punktu osobliwego, przy interpretacji  $Re Z = U$ ,  $Im Z = \psi$  nie ma odpowiedników w elektrostatyce.

<sup>22</sup> H. Helmholtz był także profesorem fizjologii.

<sup>23</sup> Liczba Reynoldsa  $Re = \rho l v : \eta$ , gdzie  $\rho$  oznacza gęstość płynu,  $\eta$  – współczynnik lepkości,  $v$  – prędkość,  $l$  – długość charakterystyczna dla danego przepływu (np. średnicę rury). Wartość krytyczna liczby  $Re$  wyznaczana jest doświadczalnie dla każdego rodzaju naczynia. Dla przepływu płynu w rurze o gładkiej ścianie  $Re_k = 1160$ . Sz. S z c z e n i o w s k i, *Fizyka doświadczalna*, cz.1: *Mechanika i akustyka*, Warszawa 1972, s. 503.



Pytanie, czy analogia między omawianymi teoriami przyczyniła się do rozwoju jednej pod wpływem drugiej teorii, rozstrzygnąć może historyk fizyki. Być może niektóre prawa obydwu teorii były sformułowane jednocześnie?

\*

Rozpatrując dwie różne pary teorii pokazano szereg konsekwencji opisujących, a więc i wyjaśniających, lub prognozujących stany pól albo zachodzące w tych polach zjawiska.

Na podstawie uwag wstępnych oraz przykładów omówionych w punktach 1-2 widać, że analogia w fizyce nie ma nic wspólnego z uprawdopodobniającym rozumowaniem przez analogię, spotykanym w naukach niezmatematyzowanych, gdzie na podstawie  $n$  zdań jednostkowych, z określonym prawdopodobieństwem, wnosi się o  $(n+1)$ -ym zdaniu jednostkowym.

Z dwu ogólnych, syntaktycznie równokształtnych założeń, w niezawodnych rozumowaniach matematycznych wyprowadzane są również równokształtne, testowalne konsekwencje.

W rozważaniach wstępnych równokształtne struktury matematyczne nazywano syntaktycznie identycznymi. Rzeczywiście, relacje między nimi są symetryczne, zwrotne, a gdy się uwzględni analogię mechaniczno-elektryczno-akustyczną<sup>24</sup>, także przechodnie.

Niezależnie od wypełniania funkcji deskryptywno-eksplikacyjnych lub prognostycznych analogia pozwala na unifikację różnych teorii fizycznych. Drgania w układach mechanicznych i elektrycznych czy fale elektromagnetyczne i akustyczne są tej unifikacji przykładami. Wszelkie zaś procedury powodujące ujednoczenie wiedzy stanowią także ważne osiągnięcie poznawcze.

#### BIBLIOGRAFIA

- Arżanikow N.S., Malcew W.N.: Aerodynamika, Warszawa 1959.  
Born M., Wolf E.: Principles of Optics, 4<sup>th</sup> ed., Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt 1968.  
Glaser W.: Grundlagen der Elektronenoptik, Wien 1952.  
Krapiec M.A.: Analogia, [w:] Powszechna Encyklopedia Filozofii, t. 1, Lublin: PTTA 2000.  
Lamb H.: Hydrodynamics, 5<sup>th</sup> ed., Cambridge 1924.  
Pogorzelski W.: Analiza matematyczna, t. 4, Warszawa 1956.

<sup>24</sup> Por. np. R.W.B. Stephens, A.E. Bate, *Wave Motion and Sound*, London 1950, rozdz. 15.

- Stephens R.W.B., Bate A.E.: Wave motion and Sound, London 1950.  
Szczeniowski Sz.: Fizyka doświadczalna, cz. 1, Mechanika i akustyka, Warszawa 1972.  
Średniawa B.: Hydrodynamika i teoria sprężystości, Warszawa 1977.  
Weizel W.: Fizyka teoretyczna, Fizyka zjawisk, Ruch, Elektryczność, Światło, Ciepło, t. 1, cz. 2, Warszawa 1960.  
Weysenhoff J.: Zasady elektrodynamiki i optyki klasycznej, Warszawa 1957.

## ANALOGY IN PHYSICS

### Summary

Based upon the example of geometrical optics and geometrical optics of electrons, as well as the theory of the electric field and the theory of the flow of the perfect liquid in two dimensions, the analogy of the laws of physics have been discussed.

In the awareness of physicists, the analogy is a syntactical identity, of the physically interpreted mathematical formulas, describing the laws of physics.

In the paper, it has been presented some relevant laws of the two pairs of the theories being compared. For the three cases, it has been provided the appropriate photographs presenting the results of the empirical tests of some of the relevant laws.

*Translated by Janusz Piersa*

**Słowa kluczowe:** optyka geometryczna, promień świetlny, współczynnik załamania, geometryczna optyka elektronowa, zasada Fermata, zasada Hamiltona, pierwsze przybliżenie lub optyka Gaussa, drugie przybliżenie, aberracja, pole elektryczne, potencjał elektryczny, potencjał prędkości, elektryczna linia sił, linia prądu, płyn doskonały, ruch w dwu wymiarach, syntaktyka, prawo.

**Key words:** geometrical optics, light ray, index of refraction, geometrical optics of electrons, Fermat's principles, Hamilton's principles, first-order approximation or Gaussian optics, second-order approximation, aberration, electric field, electric potential, velocity potential, electric line of forces, stream line, perfect liquid, motion in two dimensions, syntactics, law.

**Information about Author:** HENRYK PIERSA, Ph.D. – professor emeritus of the John Paul II Catholic University of Lublin; address for correspondence – e-mail: [piersa@interia.pl](mailto:piersa@interia.pl)