ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LVIII, numer 2 – 2010

GRETA WIERZBIŃSKA

LUDWIGA WITTGENSTEINA KRYTYKA PIERWSZEGO TWIERDZENIA GÖDLA

1. NA POCZĄTKU BYŁA LOGIKA

W swoich ostatnich pracach na temat filozofii matematyki, zwłaszcza w *Uwagach o podstawach matematyki*, Ludwig Wittgenstein zajmuje się badaniem statusu matematycznych i logicznych sprzeczności. Przy tej okazji przedstawia swoje uwagi na temat Pierwszego Twierdzenia Kurta Gödla o niezupełności arytmetyki liczb naturalnych. Stanowisko Wittgensteina było szeroko krytykowane, deprecjonowane lub zupełnie pomijane. W niniejszym artykule będę argumentować na rzecz tezy, że głównym powodem negatywnej oceny Wittgensteinowskiej krytyki było nie tyle odrzucenie przez autora *Dociekań filozoficznych* standardowej interpretacji wyników Gödla, ile raczej przesadzona reakcja na domniemany „błąd”, którego, przy okazji dyskutowania Pierwszego Twierdzenia Gödla Wittgenstein miał się podobno dopuścić.

Celem artykułu, który zgodnie z zamysłem filozofii Wittgensteina ma być jedynie szkicem, zestawem „przypomnień gromadzonych dla określonego celu”, jest próba analizy znaczenia różnych odrębnych aspektów Wittgensteinowskiego stanowiska, przeprowadzona w kontekście Wittgensteinowskiej filozofii matematyki. W toku rozważań będę próbowała wykazać ścisły związek między awersją autora *Traktatu logiczno-filozoficznego* do stanowiska matematycznego platonizmu z rozważaniami na temat „kierowania się regułą”. Spróbuję, na tyle, na ile to będzie możliwe, zbadać powody zajęcia przez Wittgensteina dość łagodnego stanowiska w sprawie sprzeczności, rozważając je m.in. jako możliwą konsekwencję radykalnego konwencjona-

Dr GRETA WIERZBIŃSKA – Instytut Filozofii Uniwersytetu Jagiellońskiego; adres do korespondencji: ul. Bonerowska 5/5, 31-130 Kraków; email: siddhartabuddyn@gmail.com

lizmu w sprawie prawd logiki i matematyki, przyjmowanego przez autora *Traktatu*. Postaram się również udowodnić, że to nie tyle sam *dowód*, ile jego pewna interpretacja (*prose*) stanowiły cel Wittgensteinowskiej „krytyki”. Pokrótce omówię także Wittgensteinowskie stanowisko z pozycji paradygmatu logik parakonsystentnych oraz postaram się wykazać, że potraktowanie zdania Gödla jako typowego paradoksu (w rodzaju zdania kłamcy) stanowiło niejako naturalną konsekwencję odrzucenia przez Wittgensteina zasadności rozróżnienia między teorią a metateorią. Na koniec przedyskutuję filozoficzne i historyczne znaczenie Wittgensteinowskiego stanowiska w sprawie twierdzenia Gödla, porównując je z koncepcjami zaproponowanymi przez Alfreda Tarskiego, Jeana van Heijenoorta, Juliet Floyd czy Hilary’ego Putnama.

Są w dziejach filozofii myśli przepastne, a więc z jednej strony do dziś zadziwiające, z drugiej takie, że czuje się, że „coś w nich jest” – nawet jeśli nie potrafi się powiedzieć, co. Uznanie myśli za przepastną, nie zaś za mętną, wymaga przyjęcia przez interpretatora sformułowanej przez Kazimierza Ajdukiewicza i Donalda Davidsona dyrektywy życzliwości interpretacyjnej, w myśl której należy przyglądać się cudzym myślom w sposób możliwie wolny od stereotypów. Pojawiające się w *Uwagach o podstawach matematyki* wypowiedzi Wittgensteina, negujące znaczenie pierwszego twierdzenia Gödla (o nierozstrzygalności arytmetyki liczb naturalnych) na gruncie filozofii matematyki są przez większość podejmujących ten temat autorów[1] bagatelizowane. Georg Kreisel, Michael Dummett czy Paul Bernays traktują je jako niefortunny *epizod* w karierze wielkiego filozofa, który padł ofiarą błędnego rozumienia zasadniczej idei leżącej u podstaw Gödlowskiego programu lub – jak kto woli – fatalnego nieporozumienia. Komentatorzy ci zwracali uwagę na fakt, że Wittgenstein traktował ową należącą do systemu formalnego nierozstrzygalną Gödlowską formułę G jako zdanie antynomialne, nieróżniące się z grubsza od zdania kłamcy, przeprowadzony zaś przez Gödla dowód jako prostą dedukcję sprzeczności[2]. Wyjątkami są tu m.in.

[1] Nawet tak gorący zwolennik filozofii Wittgensteina jak M. Dummett wyraża w jednej ze swych prac opinię, że jego (Wittgensteina) uwagi na temat twierdzenia Gödla i pojęcia niesprzeczności są „kiepskiej jakości i zawierają błędy”.

[2] Kreisel np. miał podobno powiedzieć, że Wittgenstein zapoznał się najwyżej z pierwszym rozdziałem pracy Gödla z 1931 r. W odkrytej przeze mnie ostatnio książce *Wittgenstein und der Wiener Kreis* na s. 27 możemy przeczytać, że w lipcu 1935 r. Wittgenstein napisał do Schlicka zachowany przez córkę Schlicka długi list na temat pracy Gödla z 1931 r. Prawdopodobnie

(życzliwie objaśniająca stanowisko autora *Traktatu*, a zarazem jedna z najbardziej skrupulatnie napisanych prac) rozprawa Stuarta Shankera pt. *Wittgenstein remarks on Gödel's theorem*, opublikowana w *Gödel's Theorem in Focus* z 1988 r., oraz artykuł Juliet Floyd pt. *On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle*, zamieszczony w antologii *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics* z 1995 r. Reakcje samego Gödla z kolei są dość zabawne, komentarze zaś wyjątkowo zgryźliwe[3]. W tym kontekście pojawiające się w adresowanym do Alana Robinsona liście z 1973 r. uwagi Gödla, kwalifikujące opinię autora *Traktatu* jako „kompletnie trywialne i mało interesujące nieporozumienie"[4], należałoby uznać za wyjątkowo „łagodną" reakcję na Wittgensteinowskie „wybryki". W tych okolicznościach, nie powinien dziwić więc fakt, że wielokrotnie przeprowadzane przez Wittgensteina próby demitologizacji dokonań Gödla zostały niemal kompletnie zignorowane.

1. MATEMATYCZNE ZDANIA NIE WYRAŻAJĄ ŻADNEJ MYŚLI[5]

Heurystyczną bazą dla niniejszych rozważań niech będzie zdanie sprawy z faktu, że według Wittgensteina („drugiego") nie istnieją żadne obiekty, mogące stanowić przedmiot poznania matematycznego. Ponieważ – zgodnie z tymi założeniami – poznanie matematyczne nie jest poznaniem *sensu stricto*, nie można – jak sądzi Wittgenstein – traktować wiedzy matematycznej jako ‘wiedzy że'. „Znaczenie jest tym, co wyjaśnia wyjaśnienie znaczenia" – pisze Wittgenstein w paragrafie 32 *Philosophische Grammatik*. Aby zrozumieć ową zagadkową wypowiedź, należy zbadać jej związek z Wittgensteinowską koncepcją dowodu oraz ustalić, co autor *Dociekań* ma

materiały te znajdują się w elektronicznym archiwum z Bergen (por. Bergen. Electronic Edition, BEE). Nie wiadomo natomiast, skąd Wittgenstein czerpie tego rodzaju informacje. Z całą pewnością Gödel nie wspomina nic na ten temat w wykładzie, który dostarczył Kołu Wiedeńskiemu, (*1931?) i o którym prawdopodobnie Wittgenstein mógł był słyszeć.

[3] Kilka z nich można znaleźć w pracy Hao Wanga pt. *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy* (Cambridge, MA 1997).

[4] S. Shanker, *Wittgenstein Remarks on Gödel's Theorem*, [w:] *Gödel's Theorem in Focus*, London 1988, s. 89.

[5] L. Wittgenstein, *Logisch-philosophische Abhandlung*, § 6.21, Frankfurt 1963. Tłum. G.W.

na myśli, kiedy pisze, że jego badania mają charakter gramatyczny. To, co – zdaniem Wittgensteina – łączy prawa logiki i zdania matematyczne z regułami gramatyki, to fakt, że są one w gruncie rzeczy pozbawione sensu. Ponieważ zdania matematyki nie mówią nic o świecie, można powiedzieć, że ucząc się matematyki, nabywa się po prostu jedynie określonych przyzwyczajeń, opanowuje rozmaite techniki czy też uczy pewnych zachowań[6].

Ustalenia ogólne definiujące Wittgensteinowską filozofię matematyki można sprowadzić do trzech zasadniczych założeń:

(1) W pozamatematycznych twierdzeniach dotyczących liczb zdania matematyki nie funkcjonują jako wyrażenia referencyjne.

(2) Znaczenie symboli matematycznych jest wyznaczone przez ich użycie w pozamatematycznych twierdzeniach dotyczących liczb.

(3) Na gruncie matematyki prawdziwość identyfikuje się z dowodliwością, co oznacza, że wyłącznie teorie matematyczne odpowiadają za wyznaczanie sensów zdań matematycznych. Dlatego mówienie o przekładalności znaczeń między dwiema teoriami nie miałoby większego sensu.

Matematyka jest, zdaniem Wittgensteina, częścią gier językowych. Zdanie jest więc „gramatyczne" w tym sensie, że analizuje tylko grę, ta zaś wyznacza znaczenie pojawiających się w niej pojęć. Przykładów takich gier można wskazać wiele, tak wiele, jak wiele jest systemów matematycznych czy teorii, dlatego mówienie o istnieniu jakichś wspólnych znaczeń wymagałoby nałożenia obostrzenia związanego z rozważaniem znaczeń różnych teorii/systemów z pozycji jakiegoś bardziej uniwersalnego metasystemu.

Interesujące w kontekście powyższych rozważań jest to, że Wittgenstein nie podważa bynajmniej matematycznej poprawności Gödlowskich twierdzeń. „Moim celem nie jest mówić o dowodzie Gödla, lecz mówić, omijając go"[7] – pisze w *Uwagach o podstawach matematyki* po to tylko, by w innym miejscu dodać, że rozumowanie Gödla interesuje go jedynie jako narzędzie

[6] To, co łączy prawa logiki i zdania matematyczne z regułami gramatyki, to fakt, że są bezsensowne, nie mówią nic o świecie. Zdanie jest 'gramatyczne' w tym sensie, że analizuje tylko grę. Jedynym językiem, który Wittgenstein rzeczywiście badał i z którego wywiódł koncepcję gier językowych, nie był żaden język naturalny, lecz wyłącznie język matematyki w dobie sporu o jej podstawy. Wittgenstein stoi na stanowisku, że matematyka jest częścią gier językowych, które uprawiamy. Każda taka gra określa znaczenie pojęć w niej używanych. Przy tym matematyka nie jest jedna, ale ma charakter zróżnicowany: jest wiele takich gier, czyli wiele systemów, teorii matematycznych i nie ma żadnego powodu, żeby sądzić, iż uda się ustalić dla nich jakąś wspólną miarę.

[7] L. Wittgenstein, *Uwagi o podstawach matematyki*, tł. M. Poręba, Warszawa 2001, s. 317.

ułatwiające wyjaśnienie tego, „co znaczy w matematyce zdanie w rodzaju: ‘załóżmy, że można to udowodnić’ ”[8].

Jedynym językiem, który Wittgenstein badał i z którego wywiódł koncepcję gier językowych, nie był, co istotne, język naturalny, lecz właśnie język matematyki w dobie sporu o jej podstawy. W świetle powyższych ustaleń nie dziwi więc fakt, że odrzucenie przez Wittgensteina kontekstu epistemologicznego, w ramach którego funkcjonował beztroski i naiwnie przyznający teoriom matematycznym status procedur charakteryzujących się absolutną pewnością program Hilberta, a w dalszej kolejności odmówienie twierdzeniu Gödla ważności było jedynie naturalną konsekwencją obranych założeń[9].

2. UWAGI NA TEMAT NIESPRZECZNOŚCI

Zacznę od krótkiego omówienia poglądów Wittgensteina na temat sprzeczności. Uwagi te, mam nadzieję, pomogą do pewnego stopnia rozjaśnić Wittgensteinowskie stanowisko w sprawie programu Gödla. „Sprzeczność jest to coś, co jest wspólne zdaniom, co żadnemu zdaniu nie jest wspólne z innym. Tautologia jest to coś wspólnego wszystkim zdaniom, które nie mają z sobą nic wspólnego. Sprzeczność znika niejako poza obrębem wszystkich zdań, tautologia znika pośród nich. Sprzeczność jest zewnętrzną granicą zdań, tautologia ich beztreściowym środkiem”[10] – pisze Wittgenstein w *Traktacie logiczno-filozoficznym.* Jak widać, sprzeczność w rodzaju „p i nie-p” została tu potraktowana w podobny sposób, co tautologia w rodzaju „nieprawda, że «p i nie-p»”. Obie nie posiadają jakiejkolwiek treści informacyjnej, są więc nie tyle niedorzeczne, ile pozbawione sensu. A zatem prawo sprzeczności nie jest pustą koniunkcją o postaci: „nieprawda, że «p i nie-p»”, ale regułą, zakazującą wyrażeń w rodzaju „p i nieprawda, że p”.

Podążając tym tropem, można powiedzieć, że logicy obawiają się nie tyle mających pewną rolę do odegrania – szczególnie w rozumowaniach *reductio ad absurdum* – sprzeczności *per se*[11], lecz właśnie przypadków naruszenia owej specyficznej reguły, jaką jest na przykład reguła dotycząca niewyco-

[8] Tamże, 322 8 a.

[9] Tamże, 97 i 210.

[10] L. Wittgenstein, *Traktat logiczno-filozoficzny*, tł. B.Wolniewicz, Warszawa 1970, par. 5.143.

[11] W rodzaju pustego „nieprawda, że «p i nie-p»”.

fywania założeń, z których wynika sprzeczność. Jak pisze w *Słowniku Wittgensteinowskim* Hans-Johann Glock: „Nie istnieje coś takiego jak sprzeczna reguła, bo taka reguła nie mogłaby nikomu powiedzieć, co ma robić; zaś sprzeczne zdanie nie jest posunięciem w grze językowej, tak jak postawienie i wycofywanie pionka z pola szachownicy nie jest ruchem w szachach”[12].

Ten osobliwy punkt widzenia napotkał na duże niezrozumienie nie tylko ze strony matematyków, ale także filozofów matematyki. „Sprzeczność. Dlaczego akurat to jedno straszydło?”[13] – pyta autor w *Uwagach o podstawach matematyki*, diagnozując popularny wśród matematyków[14] syndrom. Zdaniem Wittgensteina nie ma powodu, dla którego mielibyśmy traktować sprzeczną[15] teorię jako zasadniczo mniej użyteczną niż teorię niesprzeczną. „Sprzeczności nie należy traktować jako katastrofy, ale traktować je jak granicę, która wskazuje nam, że nie możemy w tym miejscu posunąć się dalej”[16] – pisze Wittgenstein w *Dociekaniach*.

Kluczem do zrozumienia stanowiska Wittgensteina w kwestii niesprzeczności, a także jego późniejszej filozofii matematyki, jest przede wszystkim zdanie sobie sprawy z tego, że u jego podstaw znajduje się ogólna czy też „radykalna” teoria konieczności, nie zaś – jak się powszechnie sądzi – konstruktywizm. Atrakcyjność takiego ujęcia sprawy tkwi przede wszystkim w pozbawieniu pojęcia prawdy koniecznej jej epistemologicznej zagadkowości[17].

Niestety zasadniczą słabością tej teorii jest jej niezdolność do wyjaśnienia pojęcia konsekwencji. Fakt, że pewne podstawowe konwencje mają określone konsekwencje, jest prawdą konieczną, ale on sam nie może być

---

[12] H.J. G l o c k, *Słownik Wittgensteinowski*, Warszawa 2001, s. 330. Uwagi na ten temat zob. L. W i t t g e n s t e i n, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cambridge 1976, s. 212-214, 223; t e n ż e, *Philosophische Grammatik*, Frankfurt am Main 1984, s. 128-129 i 305.

[13] Zob. m.in. W i t t g e n s t e i n, *Uwagi o podstawach matematyki*, s. 168-181, 211-212, 305-313, 332-333. Warto odnotować, że według Wittgensteina ukryta sprzeczność nie jest tym samym, co sprzeczność niezauważona, czyli taka, która wyraźnie pojawia się w zbiorze reguł, ale po prostu zostaje przeoczona, czy też taka, którą można wygenerować, posługując się w tym celu pewną określoną metodą. Sprzeczność ukryta to sprzeczność, która została dodana do systemu wraz z wprowadzeniem nowego rodzaju konstrukcji nieprzewidzianego typu, np. konstrukcji w rodzaju „*X* jest elementem samej siebie”. Zgodnie z taką interpretacją Russell nie odkrył w rachunku Fregego już istniejącej sprzeczności, ile wymyślił sposób konstruowania sprzeczności, tym samym modyfikując ów rachunek.

[14] Określany jako „zabobonny lęk i cześć matematyków wobec sprzeczności”.

[15] W każdym razie przynajmniej do momentu, w którym na ową sprzeczność trafimy.

[16] L. W i t t g e n s t e i n, *Dociekania filozoficzne*, wyd. II, tł. B.Wolniewicz, Warszawa 1999.

[17] Rozwiązanie Kripkego m.in. polegało na odróżnieniu pojęć konieczności i aprioryczności, zakwalifikowaniu konieczności jako kategorii metafizycznej, zaś aprioryczności jako epistemologicznej.

traktowany jako podstawowa konwencja. Nie wiadomo zatem, co w takim razie miałoby stanowić źródło owej konieczności?[18] Próbując odeprzeć tego rodzaju zarzuty, Wittgenstein przyjmuje założenie, zgodnie z którym wszystkie prawdy konieczne mają charakter konwencjonalny.

Tego rodzaju stanowisko ma bezpośredni związek z podtrzymywanym przez Wittgensteina przekonaniem, zgodnie z którym nie do przyjęcia jest fakt zachodzenia na gruncie gramatyki nieuświadomionych wewnętrznych związków. „Nie możemy dokonywać odkryć na gruncie składni” – pisze Wittgenstein w *Philosophical Remarks*[19].

W świetle powyższych założeń sam dowód stanowi nie tyle potwierdzenie tego, że wynik jego zastosowania „gdzieś” istnieje, ile że wynik ten nie istnieje dopóty, dopóki dowód go nie ustali. Zdaniem Wittgensteina dowód zmienia gramatykę naszego języka, stwarza nowe związki pojęciowe. Ponieważ z punktu widzenia radykalnego konwencjonalisty wszystkie konieczne prawdy są konwencjami, które ustalamy sami, nonsensem byłoby mówić o ich odkrywaniu czy o tzw. „ukrytych” sprzecznościach. Byłoby to równoznaczne z przyjęciem założenia, że jest z góry ustalone, że dana formuła, a w tym wypadku sprzeczność, wynika z aksjomatów, zanim jeszcze zostanie przez nas ustanowiona.

Interesującą krytykę stanowiska Wittgensteina w sprawie niesprzeczności możemy znaleźć m.in. w pracach Charlesa Chihary[20]. Zdaniem Chihary istotnym mankamentem sprzecznego systemu jest fakt, że „niesprzeczny system prowadzi nas od prawd do prawd, sprzeczny zaś nie”[21]. Załóżmy, że zaprojektowany przez inżynierów most rozpada się. Możemy podać co najmniej trzy różne możliwe warianty wyjaśnienia sytuacji:

(1) Teorie empiryczne i dane, na których opierał się projekt inżynierów były niestaranne lub niepoprawne;
(2) Popełnili błąd w obliczeniach/nie posługiwali się regułami dedukcyjnymi w sposób poprawny;

[18] Por. M. D u m m e t t, *Truth and other enigmas*, Cambridge, Mass. 1978.
[19] Oxford 1975, s. 182.
[20] Obok m.in. G. Priesta, M. Steinera czy G. Kreislera. Ch. Chihara zwraca uwagę na rzekomą słabość argumentacji autora *Dociekań*, która sprowadza się, jak zauważa Chihara, do podania serii nieprzekonujących przykładów. Chihara odrzuca możliwość obrony stanowiska Wittgensteina z uwagi na przyjmowany przez niego mocny konstruktywizm w sprawie podstaw matematyki.
[21] Ch. C h i h a r a, *Wittgenstein's Analysis of the Paradoxes in his 1939 "Lectures on the Foundations of Mathematics"*, „Philosophical Review” 86 (1977), July, s. 377-378.

(3) System logiczny, którego używali był sprzeczny i dlatego przeprowadzone przez nich wnioskowania były niekonkluzywne (tj. reguły wynikania stosowane były poprawnie ale rachunek był niedobry)[22].

Wittgenstein[23] nie przyjąłby zapewne proponowanego przez Chiharę rozwiązania, zgodnie z którym z powodu ukrytych w matematyce sprzeczności mogłyby runąć mosty[24]. Abstrahując od problemu „ukrytych sprzeczności”, warto odnotować, że tym, co Wittgenstein ma tutaj na myśli, jest rodzaj niezdrowej zapobiegliwości czy – chciałoby się powiedzieć – swego rodzaju obsesja towarzysząca problemowi niesprzeczności. „Dlaczego powinniśmy zamartwiać się z powodu sprzecznego systemu?” – pyta Wittgenstein. „Ponieważ zastosowanie sprzecznego systemu mogłoby spowodować, że runąłby most” – ripostuje Alan Turing. Chodzi prawdopodobnie o to, że w ramach sprzecznego systemu tego rodzaju katastrofy zdarzają się znacznie częściej niż w przypadku systemu niesprzecznego. Rzecz jasna bowiem, mimo że nasza matematyka *explicite* nie zawiera sprzeczności, mosty raz na jakiś czas zrywają się. Nie jest zatem oczywiste, w jaki sposób stanowisko Turinga mogłoby pomóc ujawnić wewnętrzny defekt w sprzecznym systemie matematycznym. Różnica między stosowaną przez nas arytmetyką a arytmetyką sprzeczną ze względu na częstotliwość konstrukcyjnych niepowodzeń wynikającą z ich zastosowania, jest – jak się zdaje – jedynie różnicą stopnia.

Można więc zapytać o to, w jaki sposób może ona wykazać, że w odróżnieniu od naszego systemu sprzeczny system jest systemem „wadliwym”? Zaufanie do naszej własnej arytmetyki pod tym względem ma więc, jak widać, w gruncie rzeczy charakter indukcyjny. Jak zauważa Charles Chihara, „dobry system prowadzi nas od prawd do prawd; system sprzeczny zaś nie”, w innym miejscu dodając, że „ponieważ jeśli potraktujemy zdania systemu jako zbiór instrukcji, to jeśli otrzymamy instrukcję w rodzaju «p i nieprawda, że p», nie będziemy wiedzieli jak powinniśmy postąpić”. Wittgenstein zapewne odparłby na to, że nie powinniśmy pozwolić, aby drugorzędne problemy stanowiące przedmiot badań fizyki (w pierwszym wypadku) czy psychologii (w ostatnim przypadku) determinowały właściwy przedmiot badań filozofii matematyki. Odpowiedź Turinga mogłaby mieć sens wówczas, gdybyśmy w niedalekiej przyszłości wszyscy stali się nieśmiertelni, w związku z czym nie miałoby dla nas znaczenia to, czy nasze mosty runą. W takiej

[22] Tamże, s. 378-379.
[23] Przyjętą również m.in przez Turinga.
[24] W i t t g e n s t e i n, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, s. 210-221.

sytuacji sprzeczny system nie stanowiłby dla nas powodu do zmartwień. Tym podobne problemy nie mają, jak się wydaje, w kontekście przedmiotu badań Wittgensteina większego znaczenia, a zatem wyjaśnienie nr 3 po prostu nie wchodzi w rachubę.

3. TRZECIA DROGA

W negatywnym Wittgensteinowskim projekcie zalecającym zwolennikom podstaw matematyki „zrzucenie krępujących im ruchy łańcuchów" zbiegają się interesy austriackiego filozofa i entuzjastów logik parakonsystentnych. „[…] Nawet na tym etapie przewiduję, że kiedyś pojawią się badania matematyczne rachunku zawierającego sprzeczności, a ludzie będą naprawdę dumni z powodu wyzwolenia się od niesprzeczności" – pisze Wittgenstein w *Philosophical Remarks.* Krytycy, którzy zarzucali Wittgensteinowi, że potraktował on nierozstrzygalną Gödlowską formułę formalnego systemu (formułę G) jak, nieróżniące się z grubsza od zdania kłamcy, zdanie antynomialne, przeprowadzony zaś przez Gödla dowód jako derywację sprzeczności, nie wzięli pod uwagę, że z punktu widzenia arytmetyk parakonsystentnych możemy potraktować dowód Gödla jako przykład paradoksogennej derywacji.

Wittgenstein miał powody, by zachowywać ostrożność co do standardowego rozróżnienia na teorię i metateorię. Rozumowanie znajdujące się u podstaw dowodu prawdziwości zdania Gödla jest bowiem przeprowadzane na gruncie samego systemu formalnego, który okazuje się być sprzeczny. Francesco Berto zauważył, że koncepcje modeli arytmetyk parakonsystentnych mają wiele wspólnego z intuicjami leżącymi u podstaw Wittgensteinowskiej filozofii matematyki (m.in. ścisły finityzm czy rozstrzygalność każdego sensownego problemu matematycznego). Berto sugeruje, że Ernst Zermelo, Chaïm Perelman oraz prawdopodobnie Russell popełniają podobne błędy interpretacyjne. Utrzymuje się zwykle, że błędy te wynikają z pomieszania teorii i jej metateorii, syntaksy i semantyki, uniemożliwiającego odróżnienie niewyrażalnego w ramach teorii, do której stosuje się G, predykatu prawdy od skądinąd słabo wyrażalnego predykatu dowodliwości[25].

[25] O takie pomieszanie *explicite* obwinia Wittgensteina na przykład Alan Ross Anderson. Por. A.R. Anderson, *Mathematics and the „Language Game*", [w:] P. Benacerraf, H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge 1964, s. 481-490.

Należy zauważyć, że przyjmując pogląd, zgodnie z którym dowód Gödla jest po prostu wynikiem paradoksogennej derywacji, Wittgenstein podkreślał jedynie od dawna utrzymywane przekonanie odmawiające ważności standardowej procedurze rozróżnienia na teorię i metateorię (między sformalizowaną arytmetyką a metamatematyką, rozróżnienie między teorią i metateorią, syntaksą i składnią, które nabrało znaczenia zwłaszcza w kontekście wyników Gödla i Tarskiego). W przeciwieństwie do Zermelo i Perelmana jednak Wittgenstein ś w i a d o m i e zanegował kilka aspektów takich rozróżnień. Tłumaczy to stanowisko Wittgensteina w sprawie Hilbertowskiego projektu metamatematyki, której – zdaniem Wittgensteina – nie można traktować jako metarachunku, ponieważ metarachunków po prostu nie ma[26].

Tego rodzaju stanowisko ma, jak się wydaje, związek z niechęcią Wittgensteina do matematycznego platonizmu (zakwalifikowanie dowodu Gödla jako paradoksogennego wydaje się być wynikiem tej awersji). Powodem odrzucenia platonistycznej „prozy” dowodu jest identyfikacja prawdziwości z dowodliwością[27]. Zgodnie z zaatakowaną przez Wittgensteina „semantyczną prozą” G prawdziwość zdania Gödla jest ustanawiana w metateorii, formalizacja jednak naszego naiwnego pojęcia dowodu T w ramach teorii powinna asymilować metateorię. Poza tym, jak mógłby dodać Wittgenstein, matematyka posługuje się językiem potocznym, a ten może być (i według niektórych filozofów faktycznie jest) semantycznie zamknięty[28]. Jak podkreśla Richard Routley[29], „codzienna arytmetyka jako prezentowana w ramach języka naturalnego, jakim jest język angielski, wydaje się, w przeciwieństwie np. do powiedzmy arytmetyki Peano 1-rzędu, odpowiednio zamknięta”. Poza tym wyrażenia „jest dowodliwe w arytmetyce” i „jest arytmetycznie prawdziwe” są „angielskimi i w mocnym sensie arytmetycznymi predykatami”.

Należy pamiętać, że kluczowym dla właściwego zrozumienia stanowiska Wittgensteina jest przyjęte przez niego założenie o konwencjonalistycznym charakterze konieczności, zgodnie z którym odmawia się przyznania tzw.

---

[26] Jest to po prostu k o l e j n y rachunek.

[27] Problem szczegółowo dyskutowany w rozmaitych artykułach przez Victora Rodycha i S.G. Shakera.

[28] Języki można podzielić na zamknięte semantycznie (jeśli zawierają terminy semantyczne, takie jak prawda czy znaczenie) i niezamknięte semantycznie (jeśli nie zawierają terminów semantycznych). Język potoczny jest językiem semantycznie zamkniętym, ponieważ zawiera terminy semantyczne odnoszące się do zdań tego języka.

[29] R. R o u t l e y, *Dialectical Logic, Semantics and Metamathematics*, „Erkenntnis” 14 (1979), s. 301-331.

„prawdom” koniecznym statusu prawd *tout court*. Można by jednak wyobrazić sobie sytuację, w której na gruncie sprzecznego systemu ktoś przeprowadza następujące rozumowanie: „p i nieprawda, że p, więc 2 × 2 = 397”, aby następnie wykorzystać ten wynik przy budowie mostu. Wittgenstein odpowiedziałby na to, że nie nazwalibyśmy jednak tego rodzaju procedury liczeniem. „Możesz wyprowadzić p oraz nie-p na gruncie systemu Fregego. Jeśli wyprowadzisz dowolny wniosek (ze sprzeczności), to znajdziesz się w kłopocie, odpowiem na to: «Cóż, nie wyciągaj w takim razie żadnych wniosków ze sprzeczności»”[30] – konkluduje Wittgenstein. Faktyczny problem jest więc całkiem innego rodzaju. Kłopotliwa jest tu nie tyle sprzeczność, ile wyciąganie z niej osobliwych wniosków.

4.CHOROBA GÖDLOWSKA JEST ROZPOWSZECHNIONĄ PRZYPADŁOŚCIĄ. KAŻDY CIĄGNIE GÖDLA W SWOJĄ STRONĘ[31]

Rozważania dotyczące ukrytych sprzeczności kierują uwagę Wittgensteina na pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki. Uwagi Wittgensteina na ten temat pojawiają się w „Apendyksie III” do części I wydanych pośmiertnie *Uwag o podstawach matematyki*, najmniej znanej i jednej z najbardziej niedocenionych części spuścizny, zwłaszcza zaś w paragrafie 8, gdzie Wittgenstein pisze:

> Wyobrażam sobie, że ktoś kto prosi mnie o radę, mówi: „Skonstruowałem zdanie w symbolice Russella (oznaczmy je jako ‘p’), które za pomocą pewnych definicji i przekształceń można zinterpretować tak, by głosiło: ‘p nie jest dowodliwe w systemie Russella’. Czy o zdaniu tym nie muszę powiedzieć: z jednej strony jest ono prawdziwe, z drugiej zaś niedowodliwe? Gdyby bowiem przyjąć, że jest fałszywe, prawdą byłoby, że jest dowodliwe! A przecież nie może tak być. Gdyby je zaś udowodniono, dowiedziono by tym samym, że nie jest ono dowodliwe. Tak więc może być ono jedynie prawdziwe, ale niedowodliwe”[32].

[30] W i t t g e n s t e i n, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, s. 220.

[31] Sformułowanie Regisa Debraya: „Gödelite est une maladie qui est devenue répandue”. Cyt. za: S. K r a j e w s k i, *Twierdzenie Gödla i jego filozoficzne interpretacje*, Warszawa 2003.

[32] Putnam przypisuje paragrafowi nr 8 kluczowe znaczenie filozoficzne. Mianowicie, jeśli założy się, że p jest dowodliwe w systemie Russella, to należy zrezygnować z przekładu p na polskie zdanie „p nie jest dowodliwe”, ponieważ jeśli p jest dowodliwe w PM, to PM nie jest ω-niesprzeczny, nie jest możliwy zatem przekład zdania „p” na zdanie „p nie jest dowodliwe

Podobnie jak wtedy gdy pytamy o to, „w jakim systemie ‘dowodliwe’?”, powinniśmy też pytać o to: „ w jakim systemie ‘prawdziwe’?”. ‘Prawdziwe w systemie Russella’ znaczy, jak wiadomo, tyle co ‘udowodnione w systemie Russella’. ‘Fałszywe w systemie Russella’ oznaczałoby zaś tyle co ‘coś przeciwnego zostało dowiedzione w systemie Russella’. Co znaczy zatem twoje: „gdyby przyjąć, że zdanie to jest fałszywe”? W systemie Russella znaczy to ‘gdyby przyjąć, że coś przeciwnego zostało w systemie Russella udowodnione’; jeżeli takie jest twoje założenie, to chyba porzucisz teraz interpretację, w myśl której zdanie to jest niedowodliwe. A przez rzeczoną interpretację rozumiem jego przekład na owo zdanie zwykłego języka (tzn. na zdanie „p nie jest dowodliwe w systemie Russella”). Jeżeli przyjmujesz, że zdanie to jest dowodliwe w systemie Russella, to tym samym jest ono prawdziwe w sensie Russella, a przeto znów trzeba porzucić interpretację „p nie jest dowodliwe”. Jeżeli przyjmujesz, że zdanie to jest prawdziwe w sensie Russella, to wynika stąd to samo. Dalej: jeżeli zdanie to ma być fałszywe w jakimś sensie innym niż Russella, to nie stoi to w sprzeczności z tym, że zostało ono dowiedzione w systemie Russella. (To, co w szachach nazywa się „przegraną”, może wszak w innej grze stanowić wygraną.)[33]

Pierwszą część paragrafu można by z powodzeniem uznać za pewną *wersję*, drugą zaś za *negację* twierdzenia Gödla. *Wersja* twierdzenia Gödla (a także jego dowodu), na którą powołuje się Wittgenstein, przyjęłaby w tym wypadku następującą postać: Mamy zdanie matematyki p, które można zinterpretować jako „p jest niedowodliwe”. Jeśli p jest fałszywe, to otrzymujemy dowodliwe, ale fałszywe zdanie, co nie jest możliwe; a zatem musi ono być prawdziwe, ale niedowodliwe. Natomiast *refutacja* twierdzenia Gödla – w dużym skrócie – wyglądałaby następująco: Nie ma sprzeczności w fałszywym, ale dowodliwym zdaniu – fałszywość jest zależna od kontekstu (albo od „gry”). Te same słowa mogą czasami wyrażać prawdę, a czasem fałsz. Czy mamy przez to rozumieć, że u podstaw dowodu Gödla leży elementarny błąd?

Gödel miał okazję zapoznać się z uwagami Wittgensteina, na które zareagował podobno zgryźliwym komentarzem: „Jeśli chodzi o moje twierdzenie dotyczące nierozstrzygalnych zdań, to nie ma najmniejszych wątpliwości

w PM”. Jest tak ponieważ predykat „liczba naturalna Ln.(x)” w ‘P’ nie może być zinterpretowany tak jakby *x* było liczbą naturalną.

[33] W i t t g e n s t e i n, *Uwagi o podstawach matematyki*, dod. III, cz.1, par. 8.

co do tego, że Wittgenstein go nie zrozumiał (czy też udawał, że go nie zrozumiał). Wittgenstein interpretuje je jako przypadek paradoksu logicznego, podczas gdy jest to wprost przeciwnie, twierdzenie matematyczne należące do absolutnie bezspornej części matematyki”[34]. W świetle powyższej wypowiedzi mogłoby się wydawać, że Wittgenstein pakuje się w kłopoty na własne życzenie. Jakąkolwiek próbę argumentacji na rzecz jego stanowiska należałoby zatem zastąpić, być może, obroną Wittgensteina przed nim samym?

Po pierwsze, należy pamiętać, że Wittgenstein był zdecydowanym przeciwnikiem wyprowadzania filozoficznych konsekwencji z twierdzeń matematyki. „Filozofia […] zostawia matematykę taką, jaka jest”[35] – pisze w *Dociekaniach filozoficznych*, żeby następnie dodać, że „przebrana w fałszywe interpretacje” (teoria mnogości) nie jest otwarta na filozoficzną krytykę. Wydaje się, że zarówno Floyd, jak i Shanker zgodziliby się z tym, że każda filozoficzna interpretacja twierdzenia matematycznego uchodziłaby w oczach Wittgensteina za przeinaczenie. „Dowód formalny dowodzi tylko tego, czego dowodzi” oraz „problemów, które nas niepokoją, nie jest w stanie rozwiązać coś, co jest częścią matematyki” – pisze Wittgenstein w *Uwagach o podstawach matematyki*. Co ciekawe, Wittgenstein nie wydaje się mieć jednak żadnych zastrzeżeń po adresem wartości samego dowodu.

Stwierdzenie, że „p jest prawdą niedowodliwą”, jest nie tyle twierdzeniem czy fragmentem wspomnianego dowodu, ile jego interpretacją. I to interpretacji właśnie – czego być może nie zrozumiał zarzucający mu opaczne zinterpretowanie samego twierdzenia Gödel – dotyczą obiekcje Wittgensteina. Za zasadnością tej hipotezy przemawia kilka faktów. Juliet Floyd argumentuje, że Wittgenstein nie zamierzał bynajmniej przedstawiać w pierwszej części swojego paragrafu dowodu twierdzenia Gödla, podobnie jak nie zamierzał obalać go w jego części drugiej. Wygląda na to, że Gödel nie do końca zrozumiał intencje Wittgensteina, który za cel krytyki obrał nie tyle samo twierdzenie „proof”, ale jego pewną filozoficzną interpretację „proof”.

Wittgenstein nie miał zamiaru obalać jakiegokolwiek fragmentu matematyki. Powiedziałabym raczej, że próbował „zmienić nastawienie” swoich oponentów wobec problemu niesprzeczności, a zatem, że był zaangażowany w rodzaj „ideologicznej” krytyki. W tym kontekście, konkluzja: „Istnieje

[34] Przytaczam za: J. F l o y d, *Wittgenstein on 2, 2, 2...: The Opening of Remarks on the Foundations of Mathematics*, „Synthese” 87 (1991).

[35] W i t t g e n s t e i n, *Dociekania filozoficzne*, § 124.

w systemie Russella zdanie prawdziwe, ale niedowodliwe", gdzie „prawdziwe" ma wykraczające poza pojęcie „dowodliwości wewnątrz systemu" znaczenie filozoficzne, byłaby nie tyle twierdzeniem Gödla, ile wnioskiem z tego twierdzenia.

Na poparcie swej tezy Floyd przytacza uwagę Wittgensteina z paragrafu 14:

> Dowód niedowodliwości jest niejako dowodem geometrycznym, dowodem dotyczącym geometrii dowodów. Jest on np. zupełnie analogiczny do dowodu wykazującego, że danej konstrukcji nie da się przeprowadzić za pomocą cyrkla i linijki. Otóż tego rodzaju dowód zawiera element prognozy, element fizykalny. Albowiem w wyniku tego dowodu mówimy przecież komuś: „Nie trudź się szukaniem tej konstrukcji (np. trysekcji trójkąta) – można dowieść, że jest ona niemożliwa". Znaczy to: jest czymś istotnym, że dowód niedowodliwości powinno dać się zastosować w ten sposób. Musi on – można by rzec – stanowić dla nas wystarczający powód do tego, by zaniechać poszukiwania dowodu (a więc określonego rodzaju konstrukcji). Sprzeczność jest bezużyteczna w roli takiej prognozy[36].

Paradoksalnie, wbrew sugestii Floyd, słowa te można wykorzystać na poparcie tezy przeciwnej.

5. DLACZEGO SPRZECZNOŚĆ JEST BEZUŻYTECZNA? CZY NIE SPRAWDZA SIĘ ONA NA PRZYKŁAD W PRZYPADKU DOWODÓW NIEDOWODLIWOŚCI?

Wyraźnie widać, że to, co Wittgenstein zdaje się mieć tu na myśli, sprowadza się do odnotowania, że w przypadku dowodu Gödla nie wyprowadza się sprzeczności z założenia, że dane zdanie p jest dowodliwe, ale interpretuje się po prostu samo p jako sprzeczne wewnętrznie (przypominające zdanie kłamcy – o czym Wittgenstein pisze w *Uwagach o podstawach matematyki* – zdanie paradoksalne). Gdyby faktycznie tak było, zaproponowana przez Floyd interpretacja nie miałaby sensu. Zdaniem Wittgensteina właściwe podejście do problemu miałoby polegać na wstrzymywaniu się od interpretowania zdania Gödla w duchu antynomialnym. Sama interpretacja zdania nie może – jak słusznie zauważa Wittgenstein – uczynić tego zdania niedowodliwym w systemie Russella. A zatem fragment, który Floyd przytacza na poparcie tezy, że Wittgenstein zrozumiał i porównywał dowód Gödla do dowodów niemożliwości w algebrze, wydaje się dowodzić tezy przeciwnej.

[36] Tamże, § 14.

Hipotetyczny wynik dowodu niedowodliwości, który Wittgenstein porównuje do wyniku dowodu niemożliwości algebry, nie jest wynikiem Gödla. Wittgenstein odróżnia poprawnie sformułowaną matematyczną strategię dowodzenia wyników niedowodliwości od tzw. fałszywego wyniku Gödla, czyli wyniku konstruowania zdania paradoksogennego. Czy Gödel miał zatem rację, przypuszczając atak na Wittgensteina z powodu potraktowania jego twierdzenia jako paradoksu? Wydaje się, że sam Gödel jest odpowiedzialny za reinterpretację swojego twierdzenia w takim samym stopniu jak ktokolwiek inny. Istotnie, Wittgensteinowska uwaga, jakoby interpretacja zdania p nie dała się utrzymać, ponieważ w tym sensie ją również można by potraktować jako paradoks samoodniesienia, sprowadzając ją do antynomii kłamcy, ma uzasadnienie.

Co ciekawe, na początku swojej słynnej pracy dotyczącej nierozstrzygalności *Principia Mathematica* i systemów pokrewnych sam Gödel *explicite* porównał swoje twierdzenie do paradoksu kłamcy.

6. CO TO WŁAŚCIWIE ZNACZY, ŻE DWA ZDANIA SĄ *TYM SAMYM* ZDANIEM?

Pojawienie się antynomii osłabiło wyróżniony niegdyś status matematyki, osłabiając przekonanie wielu matematyków o absolutnym charakterze prawdy matematycznej, którą miał ratować program Davida Hilberta. Sam Hilbert nie miał wątpliwości co do stabilności „normalnej” matematyki. Inaczej rzecz miała się w przypadku Wittgensteina, który od zawsze był nastawiony sceptycznie wobec ambitnych projektów uzyskiwania na gruncie matematyki pewności absolutnej. Wittgenstein wielokrotnie kwestionował rzekomą filozoficzną doniosłość matematyki, sceptycznie odnosząc się do propozycji traktowania poznania matematycznego jako wyróżniającego się niepodważalną pewnością. Wittgenstein gotów był wykazać nie tyle bezużyteczność metamatematyki Hilberta, ile bezużyteczność jej filozoficznego uzasadnienia, które traktował jako niezdrowy przejaw matematycznego platonizmu[37]. Teorie matematyczne interpretował on jako gry językowe, których zadaniem

[37] To jest poglądu, który w dużym uproszeniu można określić jako stanowisko dopuszczające istnienie zdań prawdziwych, choć niedowodliwych, a którego implikacjami są tezy o poza empirycznym dostępie do idei matematycznych czy apriorycznym (w sensie Kanta) statusie wiedzy matematycznej.

jest wdrażanie określonych procedur[38]. Ponieważ to teoria, wraz z całym kontekstem, ze swoimi metodami dowodzenia, aksjomatami, regułami itp. generuje sens pojedynczego zdania, dlatego każde z nich należy badać wyłącznie na gruncie systemu, któremu zostało przypisane.

Często pojawiający się w pismach Wittgensteina zwrot „die Sätze der Mathematik” należy tłumaczyć jako „zdania matematyki”, a nie „twierdzenia matematyki” (bo np. zdanie „$2+2=4$” trudno nazwać twierdzeniem). Zdania matematyczne byłyby więc, w świetle tych założeń, pozbawionymi statusu opisowego regułami gramatyki, apriorycznymi „wzorcami” przekształcania zdań empirycznych[39]. W świetle powyższych rozstrzygnięć zdanie Gödla rozpatrywane w kontekście arytmetyki Peano byłoby zupełnie innym zdaniem niż to zinterpretowane w języku arytmetyki drugiego rzędu A2.

7. MIT AUTOODNIESIENIA *DE RE*

Często przyjmuje się, że pewne zdania mogą odnosić się do samych siebie, tzn. że istnieje tzw. odniesienie *de re*. W paragrafie 86 *Dociekań filozoficznych* mówi się o różnych sposobach odczytywania tabeli, ale pojawia się tam także argument przeciwko możliwości języka prywatnego. Rozważania dotyczące „kierowania się regułą” kończą się konkluzją, że nie może istnieć samointerpretujący się fragment języka oraz że ten rzekomy metafizyczny związek między obiektami i desygnującymi je nazwami jest jedynie iluzją wywoływaną przez naszą gramatykę. Koncepcje samoodniesienia, samozwrotności, uważa Wittgenstein za niespójne. Rozkład jazdy pociągów, który sobie wyobrażam nie daje mi wskazówek co do tego, jak z niego korzystać. Podobnie zdanie, które uważa się za samoodnośne, nie odnosi się do samego siebie *simpliciter*, dopóki w grę nie wchodzi podmiot.

Guido Kung wskazuje na ogromny wpływ stanowiska Wittgensteina w sprawie antynomii logicznych na Wittgensteinowską epistemologię. Zdaniem Wittgensteina sprzeczności powstają na skutek niezrozumienia funda-

---

[38] A zatem według S. Shankera (*Wittgenstein Remarks on Gödel's Theorem*, s.182) z punktu widzenia Wittgensteina program Hilberta nie ma sensu, „wszelkie znaczenie, jakie twierdzenie Gödla ma dla filozofii matematyki, leży w jego roli, jaką jest nie obalenie, ale raczej *reductio ad absurdum* programu Hilberta”.

[39] Więcej na ten temat można znaleźć w rozdziale jedenastym *Philosophische Grammatik* (Frankfurt am Main 1984). Moje tłumaczenie tego tekstu, pt. *Matematyka porównana z grą*, ukazało się w „Mêlée. Kwartalniku Filozoficzno-Kulturalnym” 2010, nr 3.

mentalnej zasady, zgodnie z którą żadne zdanie nie może orzekać o sobie samym, natomiast na temat wspólnej wszystkim zdaniom formy logicznej, pod groźbą samozwrotności, nie powinno się w ogóle wypowiadać. Wittgenstein przyznaje jednak, że owa niewyrażalna forma może zostać jakoś w zdaniu dostrzeżona. Kluczowe są tu paragrafy 492-509 *Dociekań*, zwłaszcza paragraf 502: „Pytanie o sens. Porównaj: „To zdanie ma sens". – „Jaki?" – „Ten ciąg słów jest zdaniem". – „Jakim?". Oba wyprowadzone z błędnego koła stwierdzenia (podobnie jak, być może, zdanie Gödla...) są – jak twierdzi Wittgenstein – przez fakt ich izolacji, bezsensowne. „Gdy mówimy, że zdanie jest bezsensowne, to bezsensowny nie jest tu niejako jego sens. Wykluczamy wtedy z języka pewne zestawienie słów: wycofujemy je z obiegu"[40]. „Zdanie nie może orzekać niczego o sobie samym, gdyż znak zdaniowy nie może zawierać sam siebie. (Oto cała 'theory of types')"[41]. Zdania te nie wyrażają więc faktycznie niczego, przytacza się je jako przykład niedwuznacznego „czystego" autoodniesienia.

Wittgenstein sądził, że charakterystyka ta równie skutecznie da się zastosować w przypadku klasycznych logicznych paradoksów. Mianowicie, jak proponuje, ze zdaniem kłamcy czy ze zdaniami typu „To zdanie nie jest prawdziwe" można poradzić sobie dwojako: albo wykluczyć je z naszej gry językowej jako niepoprawnie zbudowane, albo zaakceptować ich obecność w mowie potocznej.

8. GRY W MATEMATYKĘ

> Cóż szkodzi sprzeczność powstająca wtedy, gdy ktoś mówi: „Kłamię.—A więc nie kłamię. – A więc kłamię. – Itd."? Chodzi mi o to: czy nasz język staje się mniej użyteczny przez to, że można w tym wypadku z pewnego zdania wywnioskować wedle zwykłych reguł jego przeciwieństwo, a z tego znów tamto pierwsze zdanie? – Bezużyteczne jest samo to zdanie, podobnie jak samo wnioskowanie, dlaczego jednak nie mielibyśmy go przeprowadzać? – Jest to jałowa sztuka! – Jest to gra językowa, podobna do gry w łapki[42].

Można oczywiście powiedzieć na przykład: „Kłamię. Tak naprawdę nie wyskoczyłem z pociągu...", kończąc opowiadaną właśnie historię. W tym

[40] W i t t g e n s t e i n, *Dociekania filozoficzne*, § 500.
[41] T e n ż e, *Traktat logiczno-filozoficzny*, § 3, s. 332.
[42] T e n ż e, *Uwagi o podstawach matematyki*, cz. I, dod. III.

jednak przypadku „kłamię" nie odnosiłoby się do samego siebie, ale do poprzedzających go uwag. Nam jednak chodzi o przykład zdania, które odnosi się samo do siebie, nie zaś do innego zdania.

Mamy przed sobą zdanie, które mówi samo o sobie, że nie jest ono dowodliwe (w metamatematycznym systemie *Principia*). Jeśli więc zdaniem, które rozważamy, jest to, które mamy przed sobą, to Gödel nie jest w stanie uniknąć potencjalnej Wittgensteinowskiej krytyki platonizmu w sprawie zdań[43]. Zdanie, które mamy przed sobą (w dowodzie Gödla), po pierwsze „stwierdza", że pewna formuła jest niedowodliwa, po drugie zaś okazuje się, że jest to ta sama formuła, która służy nam do wyrażenia owego problematycznego zdania (w tym sensie, w jakim okazuje się, że Gwiazda Poranna jest Gwiazdą Wieczorną). Wbrew pozorom tego typu zdanie nie pociąga za sobą jakiejkolwiek kolistości, ponieważ stwierdza tyle tylko, że pewna dobrze zdefiniowana formuła (mianowicie formuła otrzymana przez podstawienie jej za *n*-tą formułę w leksykograficznym porządku) jest niedowodliwa. Dopiero wtórnie przypadkiem okazuje się, że jest to ta sama formuła, która posłużyła nam do wyrażenia naszego zdania[44].

Wypowiedzi Wittgensteina zakładają zatem jedynie utrzymywany przez niego pogląd, że zdanie jest sensowną prawdą matematyczną tylko wówczas, jeżeli zostało wyprowadzone w obrębie określonego systemu matematycznego. Można zatem postawić pytanie o to, w jaki sposób zdanie może mówić coś o sobie, odnosić się do samego siebie, poza zewnętrznym *factum* naszej decyzji w sprawie tego, że dane zdanie mówi to a to? Jest to możliwe dzięki właściwości wskazywania na siebie w ramach pewnego języka logicznego. Kiedy już tego rodzaju język zostanie ustalony, przestaje on być podatny na nasze decyzje w kwestii znaczenia i interpretacji. Nadal jednak kwestią tajemniczą pozostaje wyjaśnienie tego, w jakim sensie zdanie może wskazy-

[43] „Pojęcia i klasy mogą być potraktowane jako obiekty rzeczywiste […] Wydaje się, że założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych. Filozofia matematyki powinna i musi być metafizyczna. Każda próba eliminacji filozofii prowadzi do zastoju, pesymizmu poznawczego i spowalnia jej postęp". Por. K. G ö d e l, *Russell's mathematical logic*, [w:] *Collected Works*, vol. II., Oxford 1990, s. 119-153.

[44] Jak trafnie zauważa Andrzej Mostowski, „dla dowolnego zdania P teorii S istnieje arytmetyczne zdanie S' […], które mówi, że S jest niedowodliwe. Nie ma nic paradoksalnego w tym, że dla odpowiednio dobranego S zdanie S' – by tak rzec – przypadkowo okazuje się identyczne z S" (*Sentences Undecidable in Formalized Arithmetics*, Amsterdam 1952). Termin „przypadkowo" jest użyty nieprzypadkowo, ponieważ występuje w tym kontekście już w oryginalnej pracy Gödla z 1931 r. *Über formal unentscheidbare Sätzeder Principia Mathematica und verwandter Systeme I* ('gewissermassen zufaallig').

wać „samo na siebie". „Co znaczy, że: p i «p jest niedowodliwe» są tym samym zdaniem? Znaczy to, że te dwa zdania można w pewnej określonej notacji wyrazić tak samo"[45] – pisze Wittgenstein *w Uwagach o podstawach matematyki* i dalej:

> Ale przecież p nie może być dowodliwe, gdyby bowiem przyjąć, że zostało udowodnione, dowiedzione byłoby zdanie głoszące, że ono samo nie jest dowodliwe[46]. Gdyby jednak p zostało udowodnione albo gdybym sądził, być może wskutek błędu, że je udowodniłem, dlaczego nie miałbym uznać tego dowodu i powiedzieć, że muszę porzucić moją interpretację słowa „niedowodliwe"?[47]

Wittgensteinowskie wnioski dotyczące znaczenia procedury rozróżniania poziomów, która dla Wittgensteina jest jedynie przykładem ogólniejszego zjawiska, wydają się jak najbardziej zasadne. *Tak samo* zapisana formuła, ujmowana w ramach różnych teorii, nie jest *tą samą* formułą. Problem samozwrotności formuły G można rozpatrywać, rozróżniając poziomy, na których posługujemy się formułami, zdaniami, twierdzeniami. Jest niewątpliwe, że przy rozważaniu formuły Gödla operujemy na różnych poziomach. Jest to, po pierwsze, poziom F, poziom systemu formalnego T, w którym występują niezinterpretowane formuły. Następnie jest poziom M, poziom metamatematyczny, z którego pozycji mówimy o formułach, dowodach formalnych, niesprzeczności i innych własnościach systemu T. Wreszcie na poziomie A (poziomie zwykłej matematyki, w szczególności arytmetyki) mówimy o liczbach, podzielności, ciągach liczb itp.

Można by więc znów znaleźć racje wskazujące na trafność podejścia Wittgensteina. Przy założeniu istnienia różnych poziomów jednak nie ma sensu mówienie o samozwrotności formuły G. Problem sprowadza się bowiem do tego, czy jako zamierzoną interpretację formalnej arytmetyki (w której konstruujemy G) przyjmiemy zwykłe liczby i różne możliwe ich użycia (również w postaci kodów pojęć z poziomu metateorii), czy też nie. Jeśli nie, to faktycznie G nie będzie mówiło o sobie (ponieważ nie mówi o żadnych formułach, a co najwyżej o liczbach; fakt, że – jak się okazuje - odpowiadają one pewnym obiektom metamatematycznym, jest dodatkowym sensem, przypisanym arytmetyce niejako z zewnątrz).

---

[45] W i t t g e n s t e i n, *Uwagi o podstawach matematyki*, cz. 1, dod III, par. 9, s. 94.

[46] Wittgenstein słusznie zauważa, że samo pojęcie „zdanie Gödla" nie jest stabilne. Pojawia się niebezpieczeństwo *regressus ad infinitum.*

[47] W i t t g e n s t e i n, *Uwagi o podstawach matematyki*, cz. 1, dod. III, par.10, s. 94.

9. CO PRZYPISUJE SIĘ MATEMATYCE, KIEDY MÓWI SIĘ, ŻE NIE JEST GRĄ, ŻE JEJ ZDANIA MAJĄ SENS? SENS NIEZALEŻNY OD ZDANIA[48]

Samo zdanie (np. zdanie „to jest napisane kredą") nie odnosi się do swojego sensu; żeby właściwie pojąć znaczenie twierdzenia Gödla, należy przyjąć, że mogą istnieć zdania, które odnoszą się do siebie i tylko do samych siebie. Właściwie postawione pytanie brzmi zatem nie tyle, czy możemy traktować zdanie Gödla jako samoodnośne, ile czy jesteśmy do tego zobowiązani. „Czyste autoodniesienie" (odniesienie *de re*), o którym mówi zdanie Gödla[49], nie jest możliwe. Jest ono konsekwencją decyzji, którą podejmujemy w celu uporania się z nieuniknioną wieloznacznością interpretacji. A zatem nie jest to już „czyste" autoodniesienie, ponieważ dotyczy nas (naszej decyzji)[50].

10. PARADOKS KRIPKEGO A METAMATEMATYKA

W swojej książce *Wittgenstein on Rules and Private Language* Saul Kripke przeprowadza dotkliwą krytykę Wittgensteinowskiego pojęcia znaczenia. Formę filozoficznego sceptycyzmu, jaką prezentuje Kripke (jako wynikającą z treści *Dociekań filozoficznych*), ilustruje zdanie: „Paradoks nasz wygląda tak: Reguła nie może wyznaczać sposobu działania, gdyż każdy sposób działania daje się z nią uzgodnić". Zdaniem Kripkego jedynym rozwiązaniem, które pozwala nam uniknąć paradoksalnych wniosków, polegających na tym, że nasze słowa mogą znaczyć wszystko, czyli nie znaczyć nic, jest radykalna zmiana naszych poglądów w sprawie języka. Nawiązując do koncepcji Davida Hume'a, Kripke określa ją mianem „sceptycznego rozwiązania wątpliwości".

Zgodnie z tą propozycją należy raz na zawsze zerwać z poglądem, zgodnie z którym podstawową formą języka jest zdanie oznajmujące, znaczeniem zdania zaś są „warunki jego prawdziwości". Pogląd ten Kripke określa mianem „obrazkowej teorii języka". Problem analogiczny do paradoksu Kripkego

---

[48] Por. przyp. 39 niniejszego artykułu.

[49] A także to, które jest źródłem klasycznych paradoksów.

[50] Autorka sceptycznie odnosi się do propozycji Kripkego, zgodnie z którą język zawierający punkt stały może zawierać swój własny predykat nie-prawdziwości. (Nie ma stałych punktów odniesienia dla języka – zob. Ch. G a u k e r, *Kripke's Theory of Truth*, http://asweb.artsci.uc.edu/philosophy/gauker/KripkeTruth.pdf).

można również odnaleźć na gruncie metamatematyki. Pojawia się on w postaci pytania o to, czy można zbudować definicję prawdy dla języka naturalnego. Pytanie to ma niezwykle istotne znaczenie w kontekście badań ontologii semantycznej, gdyż – jak wiadomo – pojęcie znaczenia jest ściśle związane z pojęciem prawdy. Warunkiem koniecznym zbudowania teorii prawdy dla pewnego języka jest uprzednie skonstruowanie odpowiedniej teorii znaczenia bądź *vice versa*. Charakterystyki prawdy i znaczenia są nierozerwalnie ze sobą związane. Problematyczność pojęcia prawdy dla języka naturalnego pociąga za sobą problematyczność pojęcia znaczenia. W *Uwagach o podstawach matematyki*[51] Wittgenstein zauważa, że jeśli w trakcie procedury przeprowadzania serii dowodów będziemy konsekwentnie trzymać się naszej wstępnej struktury pojęciowej, to nigdy nie znajdziemy się w sytuacji, w której bylibyśmy zobowiązani do stwierdzenia: „owszem, teraz natknęliśmy się na prawdziwe, lecz niedowodliwe zdanie" (w którym terminy „prawdziwy" i „niedowodliwy" odnosiłyby się do tego samego systemu matematycznego). Jednym ze sposobów zrozumienia tej aporii jest posłużenie się zaproponowanym przez Jeana van Heijenoorta[52] rozróżnieniem między „językiem jako medium uniwersalnym" a „językiem jako rachunkiem".

Zdaniem van Heijenoorta zainteresowanie Fregego i Russella pierwszym rodzajem języka wyjaśnia całkowitą nieobecność w ich pracach pojęć semantycznych. Van Heijenoort ma tu na myśli zwłaszcza nieprzywiązywanie wagi do rozróżnienia między pojęciem dowodliwości i pojęciem prawdziwości (*validity*)[53]. Według Jaakko Hintikki zaś wspomniana słabość nie ominęła również Wittgensteina. Fakt ten, zdaniem Hintikki, częściowo wyjaśnia, dlaczego Wittgenstein (a także do pewnego stopnia Frege, po nim zaś Willard Van Orman Quine) traktował semantykę jako „niewyrażalną"[54]. To wszystko pozwala nam przypuszczać, że pogląd Wittgensteina, zgodnie z którym język jest medium uniwersalnym, mógł być bezpośrednim powodem identyfikacji przez niego (na gruncie *Principia Mathematica*) pojęć „prawdziwy" i „dowodliwy". Gwoli ścisłości należy dodać, że identyfikacja ta nie sprowadza się li tylko do przyjęcie założenia, że prawdziwość i dowodliwość są nie tylko równozakresowe, ale również równoznaczne, nie tylko ich zakresy okazują się pokrywać, ale również ich pojęcia.

---

[51] W i t t g e n s t e i n, *Uwagi o podstawach matematyki*, cz. 1, dod. III.

[52] *Logic as Language and Logic as Calculus*, „Revue internationale de philosophie" 17 (1967).

[53] Rozróżnienie to nabrało sensu po rozwinięciu go przez Loewenheima w 1915 r. i Skolema w 1920 r.

[54] Właśnie raczej „niewyrażalną" niż „niemożliwą".

Wittgenstein mógłby zatem powiedzieć (na temat G czy też innego dowolnego zdania matematyki), że każde takie zdanie powinno uzyskiwać znaczenie na mocy własnego dowodu. Jest tak, ponieważ – zdaniem Wittgensteina – „w matematyce proces i wynik są wzajemnie równoważne”[55]. Tym, co – zdaniem Wittgensteina – należy wyjaśnić, jest sposób użycia (a więc ostatecznie znaczenie) wyrażenia „być dowodliwym”. Jeśli chcielibyśmy jednak nadal uparcie obstawać przy założeniu, że zdanie „G jest niedowodliwe” zostało dowiedzione, to pozostawałyby nam do wyboru następujące alternatywy[56]:

(a) ktoś się pomylił – w tym wypadku powinien przynajmniej zmodyfikować przyjmowaną przez siebie interpretację wyrażenia „być niedowodliwym”;

(b) ktoś faktycznie dowiódł G, lecz w innym systemie matematycznym czy w systemie fizyki. Ten przypadek Wittgenstein uznaje za nieproblematyczny, ponieważ z pewnością istnieją należące do innych systemów zdania prawdziwe, które nie są dowodliwe w PM. Podobnie jak można wskazać prawdziwe zdania z systemu PM, które nie są dowodliwe „poza nim”;

(c) jeśli po udowodnieniu (w wyjściowym systemie) zdania G, dostaniemy sprzeczność, to nie musi to – według Wittgensteina – stanowić przyczyny pojawiających się w naszym systemie nieprawidłowości. Wittgenstein uważa, że można w tym przypadku przypuszczać, iż „zasada niesprzeczności jest po prostu w tym konkretnym wypadku fałszywa”. Wittgensteinowska krytyka punktu (c) korzysta z porównania G do zdania kłamcy (L). Porównanie to nie jest nieproblematyczne, ponieważ analogicznie można by np. w ten sam sposób zrekonstruować zdanie L jako mówiące nie tyle, że „L jest niedowodliwe”, ile raczej że „L nie jest prawdziwe”. Wówczas jednak znowu, w świetle przyjętej interpretacji, tego rodzaju rozróżnienie z punktu widzenia Wittgensteina jest zupełnie bez znaczenia[57].

Krytyka Wittgensteina przyjmuje skrajną postać dyskwalifikacji zdań typu G jako całkowicie bezużytecznych. „To tak, jakby ktoś z pewnych zasad dotyczących form przyrodniczych i stylu w budownictwie wywnioskował, że na Mount Everest, gdzie nikt nie może mieszkać, trzeba postawić

[55] W i t t g e n s t e i n, *Uwagi o podstawach matematyki*, dod. I, par. 82; por. też t e n ż e, *Traktat logiczno-filozoficzny*, 6.1261.

[56] T e n ż e, *Uwagi o podstawach matematyki*, dod. III, par. 5-9, cz. VII, par. 18-19.

[57] Z powodu ‘kłamcy’ prawdy arytmetyki nie mogą być ‘zdefiniowane’ wewnątrz arytmetyki Peano (PA).

pałacyk w stylu barokowym”[58]. Tego rodzaju obserwacja nie wydaje się być jednak rozstrzygająca. Przede wszystkim dlatego, że sam fakt „nieposiadania” przez pewne zdanie zastosowania nie jest wystarczającym powodem jego dyskwalifikacji[59]. Wittgensteinowska dekonstrukcja drugiego twierdzenia Gödla wydaje się nieco bardziej kłopotliwa. „Matematyczne problemy tak zwanych podstaw tak samo nie leżą, naszym zdaniem, u podstaw matematyki jak na namalowanej skale nie wznosi się namalowany zamek”[60].

11. LINGUA CHARACTERISTICA VERSUS CALCULUS RATIOCINATOR (CZY ISTNIEJE UNIWERSALNY METAJĘZYK?)

W badaniach matematycznych istotne znaczenie ma język, w którym formułuje się teorie. Gödel był przekonany, że jedynym właściwym do tego celu narzędziem jest logika pierwszego rzędu. To założenie miało silne ugruntowanie w matematycznym platonizmie, którego gorącym zwolennikiem pozostawał. Gödel był przekonany, że istnieje intuicja matematyczna, zgodnie z którą „aksjomaty (logiki pierwszego rzędu) narzucają się nam jako prawdziwe”[61]. Tego rodzaju stanowisko (mimo że nie zawęża ono swoich implikacji epistemologicznych tylko do First Order Logic) jest przez wielu krytyków uważane za przejaw konwencjonalizmu.

Jan Woleński słusznie zauważa, że często wysuwane zarzuty o niewystarczalności First Order Logic są bezzasadne. Zdaniem Woleńskiego uciekanie się do logiki drugiego rzędu mija się z celem, ponieważ „posiada ona własności niezbyt intuicyjne (m.in. nie jest zwarta, nie istnieje dla niej efektywna i niesprzeczna aksjomatyka, z której można wyprowadzić wszystkie tautologie II rzędu, i wreszcie jest wprawdzie pełna, ale za cenę rozbicia modeli na zasadnicze i wtórne, przy czym kryterium tego podziału jest pozalogiczne). […] Mamy więc do wyboru: albo zachować jednolitość «dobrej» logiki i formalizacji, licząc się z pewnymi niedogodnościami, albo też

[58] W i t t g e n s t e i n, *Uwagi o podstawach matematyki*, dod. III:19.

[59] „Nie mogłoby” mieć ono zastosowania (być może wynalezionego), w innej grze językowej?

[60] Stanowisko Wittgensteina w tej sprawie jest intrygujące, jako że z grubsza utrzymuje on, że „all that we have is a mapping, a function taking rules of a game into rules of another game” (W i t t g e n s t e i n, *Philosophical Remarks*, s. 335).

[61] K. G ö d e l, *Co to jest Cantora problem kontinuum?*, [w:] R. M u r a w s k i (red. i tł.), *Współczesna filozofia matematyki*, Warszawa 2002, s. 120-121.

zgodzić się na wielość logik i ich formalizacji za cenę rozmycia samego pojęcia logiki”[62].

Przy okazji rozważań dotyczących założeń ontologicznych stanowisk Gödla[63] i Wittgensteina nasuwa się pytanie o to, czy Wittgenstein całkowicie odrzucił możliwość skonstruowania uniwersalnego metajęzyka. „Ponieważ matematyka jest rachunkiem i stąd nie traktuje istotnie o czymś, to metamatematyka nie istnieje” – pisze Wittgenstein w rozdziale jedenastym *Gramatyki filozoficznej.* Język – w rozumieniu Wittgensteina – należy interpretować w różnych światach, grach językowych, dziedzinach. Nie istnieje, jego zdaniem, jeden, prawdziwy, jak chciał Gödel, zamierzony model[64]. Wydaje się, że tym, co różni podejście Gödla i stanowisko Wittgensteina, jest także fakt, że mimo iż obaj przyjmowali język zinterpretowany, a nie czysto formalny, to dla Gödla najistotniejsza była jedna dziedzina, ta najszersza, cały świat lub jego znaczący fragment, podczas gdy Wittgenstein, podobnie jak Tarski, interpretował go w różnych dziedzinach[65].

Skonstruowanie języka uniwersalnego nie jest możliwe (podanie kontrprzykładu polegałoby na wykazaniu, że istnieje jedna struktura świata, którą język byłby w stanie uchwycić i trafnie odwzorować za pomocą jednoznacznych znaczeń, co – jak wiemy – „późny” Wittgenstein odrzucił). Podobnie rzecz ma się w przypadku ścisłego odwzorowania między językiem a światem. Ponadto w przypadku, gdy nie jest możliwa reinterpretacja języka, może on być używany tylko do mówienia o świecie, tzn. o „jednym, prawdziwym świecie”. Jaako Hintikka zauważył, że w idei języka jako uniwersalnego medium zawiera się więc jakiś rodzaj założenia o jedyności świata (*one-world assumption*) *resp.* w przypadku języka jako rachunku mamy *many-worlds assumption*[66].

---

[62] J. W o l e ń s k i, *Metamatematyka a epistemologia*, Warszawa 1993, s. 91.

[63] Jerzy Perzanowski słusznie zauważył, że Gödel odkrył po prostu zdanie przypadkowe *a priori.*

[64] Między innymi dlatego – zdaniem Wittgensteina – program Hilberta i jego metoda aksjomatyczna, mająca objąć nawet logikę, nie mają sensu.

[65] Jak pamiętamy, Gödel niechętnie odnosił się do przeceniania roli procedury odróżniania teorii od metateorii jako metody rozwiązywania problemów (co m.in. odróżnia jego stanowisko od stanowiska Tarskiego). Gödel zakłada, że ta sama logika musi obowiązywać na każdym poziomie, nie ma miejsca na wielość logik. Główny argumentem przeciwko możliwości sformułowania definicji tak rozumianej prawdy w języku naturalnym jest jego uniwersalność.

[66] J. H i n t i k k a, *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*, Dodrecht 1997.

W toku rozważań na ten temat można odnieść wrażenie pojawienia się w filozofii Gödla swego rodzaju paradoksu. Z jednej strony twierdzenie Gödla (o niezupełności matematyki) wykazało niemożliwość Leibnizjańskiego projektu *scientia universalis* – uniwersalnej nauki posługującej się *lingua characteristica*, idealnym językiem opisującym całość rzeczywistości. Z drugiej zaś strony projekt ten powrócił niejako tylnymi drzwiami na gruncie Gödlowskiej metafizyki. Czyżby było to zwykłe przeoczenie? Być może jest to raczej konsekwencja przyjętego przez Gödla założenia, zgodnie z którym stosowanie metod formalnych sprzyja rozwiązywaniu również problemów filozoficznych (choć niekoniecznie je rozwiązuje, ujawniając tym samym „nadwyżkowość" filozofii). Odpowiadając na pytanie o zadanie formalizacji Woleński zaznacza, że jest ona „sposobem konstruktywnej reprezentacji naszych intuicji. Nawet jeśli skądinąd (np. z twierdzeń imitacyjnych) wiemy, że nie jest to całkowicie realizowalne, każdy częściowy sukces w tym względzie jest ważny"[67].

12. PODSUMOWANIE

Wbrew wysuwanym współcześnie tezom o bezsensowności i niekoherencji stanowisk relatywistycznych należy pamiętać, że relatywizm nadal pozostaje realnym faktem życia codziennego i że próby filozoficznego ostatecznego rozwiązania tzw. problemu relatywizmu nie mogą odnieść oczekiwanych skutków. Większość konwencjonalistów próbuje uporać się z problemem relatywizmu, uciekając się do tej czy innej postaci symplicyzmu. Zdaniem Wittgensteina przyjęcie relatywizmu językowego, postulatu zrównoważenia różnych dyskursów, a także relatywizmu w kwestii prawdy, nie musi stanowić problemu do przezwyciężenia, a wręcz przeciwnie – powinien być punktem wyjścia pozwalającym m.in. wyjaśnić problem znaczenia.

Przy takim założeniu język przestaje być przedmiotem filozofii, stając się warunkiem jej uprawiania. W tym kontekście należy rozumieć deklarację, że nie powinno się traktować relatywizmu jako gotowej doktryny, lecz jako programu, który zawsze warto realizować, nawet jeśli sukcesy są tylko lokalne. Charakter przeprowadzonych tu rozważań pozostaje – mam nadzieję – w zgodzie z Wittgensteinowskim zamysłem, że filozofia pozostawia wszystko takim, jakim jest. Ufam, że udało mi się częściowo rozjaśnić sprawę nie-

[67] J. W o l e ń s k i, *Metamatematyka a epistemologia*, Warszawa 1993, s. 96.

fortunnej recepcji Wittgensteinowskiej interpretacji Twierdzenia Gödla, która – jak starałam się wykazać – dotyczyła jego części *prose*, nie zaś *proof*. Wiadomo, że Wittgenstein traktował zdanie kłamcy, a tym samym (w świetle przyjętych przez niego założeń) zdanie Gödla jako przykład kolejnej bezużytecznej gry językowej.

Fakt, iż twierdzenie Gödla pokazuje, że – po pierwsze – istnieje dobrze zdefiniowane pojęcie prawdy matematycznej, dające się zastosować do każdej formuły z PM, oraz że jeśli system PM jest niesprzeczny, to pewne „prawdy matematyczne" są w tym sensie nierozstrzygalne w PM, nie jest – zdaniem Wittgensteina – twierdzeniem matematyki, ale metafizyki. W tej sytuacji wyniki Gödla należałoby zakwalifikować nie tyle jako twierdzenia matematyki, ile jako fragment nauk humanistycznych. Jeśli jednak zdanie p jest dowodliwe w PM, to PM nie jest niesprzeczny, jeśli zaś „nieprawda, że p" jest dowodliwe na gruncie PM, to PM jest ω – niesprzeczny i to stanowi już faktycznie, dowiedzione przez Gödla, twierdzenie *stricte* matematyczne. Wittgensteinowska krytyka jest więc – jak widać – w istocie wymierzona w ten rodzaj filozoficznej naiwności, która skłania filozofów do mylenia wspomnianych wyżej interpretacji czy też przyjmowania, że pierwsza z nich wynika z drugiej.

Przedstawiona tu propozycja nie jest, oczywiście, wyczerpująca, nie planowałam dokonywać żadnych ostatecznych rozstrzygnięć. Próbowałam jedynie pokazać, że Wittgenstein nie tyle zamierzał odrzucić zdania Gödla jako twierdzenia metafizyki czy też pozbawić matematykę jej metafizycznego zainteresowania, ile zgodnie z założeniem, że filozofia „pozostawia matematykę taką, jaka jest", przekonać do tego, że jego przyjęcie zwyczajnie nam się nie opłaca.

BIBLIOGRAFIA

Anderson A.R.: Mathematics and the Language Game, „Review of Metaphysics" 11 (1958), No. 3, s. 446-458

Bays T.: On Putnam and his Models, „The Journal of Philosophy" 98 (2001), s. 331-350.

Berto F.: The Gödel Paradox and Wittgenstein's Reasons, „Philosophia Mathematica" 17 (2009), No. 2, s. 208-219.

— There is Something about Gödel (w przygotowaniu).

Bordum A.: The Theory of Positive Self-Reference, MPP Working Paper, WP 10/2002, Copenhagen: Department of Management, Politics and Philosophy, Copenhagen Business School.

C h i h a r a Ch.: Wittgenstein's Analysis of the Paradoxes, in his 1939 "Lectures on the Foundations of Mathematics", „Philosophical Review" 86 (1977), s. 365-381.

D e b r a y R.: L'incompletude, logique du religieux?, „Bulletin de la Société Française de Philosophie" 90 (1996), s. s. 7-28.

D e t l e f s e n M.: On an Alleged Refutation of Hilbert's Program Using Gödel's First Incompleteness Theorem, „Journal of Philosophical Logic", 19 (1990), s. 343-377.

D u m m e t t M.: Truth and Other Enigmas, Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1978

F l o y d J.: On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle, [w:] J. H i n t i k k a (ed.), From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics, Boston: Kluwer 1995.

— Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth, „Philosophia Mathematica" 9 (2001), s. 280–307.

— Wittgenstein on 2, 2, 2...: The Opening of Remarks on the Foundations of Mathematics, „Synthese" 1991, s. 143-180.

—, P u t n a m H.: A Note on Wittgenstein's Notorious Paragraph about the Gödel theorem, „The Journal of Philosophy" 97 (2000), s. 624-632.

G a u k e r Ch.: Kripke' s theory of truth, wersja elektroniczna stronie internetowej autora – http://homepages.uc.edu/~gaukercp/documents/KripkeTruth.pdf

G ö d e l K.: Über formal unentscheidbare Sätzeder Principia Mathematica und verwandter Systeme I, „Monatshefte für Mathematik und Physik" 38 (1931), s. 73-198.

— On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems, [w:] Collected Works, New York: Oxford University Press 1986.

G o l d s t e i n R.: Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel, New York 2005.

H i n t i k k a J.: Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy, Dodrecht: Kluwer 1997

K i e n z l e r W.: Wittgenstein über Gödel, [w:] M. K r o ß (Hg.), Tagungsband zu Wittgensteins Philosophie der Mathematik; Einstein Forum, Potsdam 2005.

K o t e r s k i A. (red.): Spór o zdania protokolarne. „Erkenntnis" i „Analysis" 1932-1940, Warszawa: Fundacja Aletheia 2000.

K r i p k e S.: Wittgenstein o regułach i języku prywatnym, tł. K. Posłajko i L. Wroński, Warszawa: Fundacja Aletheia 2007.

K r a j e w s k i S.: Twierdzenie Gödla i jego filozoficzne interpretacje, Warszawa: IFiS PAN 2003.

L a c e y H.: Joseph Geoffrey, „Mind". New Series, 77 (1968, January), No. 305, s. 77-83.

M o s t o w s k i A.: Sentences Undecidable in Formalized Arithmetics, Amsterdam: North Holland 1952.

P i c h l e r A.: On the Importance of Therapy and Style in Wittgenstein's *Philosophical Investigations*, and what the Wittgenstein Nachlass has to do with it, artykuł w wersji elektronicznej – http://w3.dswe.pl/fileadmin/user_upload/seminaria/Pichler_11.04.pdf

— Encoding Wittgenstein: Some Remarks on Wittgenstein's Nachlass, the Bergen Electronic Edition, and future electronic publishing and networking, „Trans-Zeitschrift für Kulturwissenschaften" Jan 2002, Nr 10,

P r i e s t G.: Unstable Solutions to the Liar Paradox, [w:] S.J. B a r t l e t t, P. S u b e r (eds.), Self Reference: Reflections and Reflexivity, Nijhoff 1987.

R o d y c h V.: Wittgenstein's Inversion of Gödel's Theorem, „Erkenntnis" 51 (1999), s. 173-206.

S a y w a r d Ch.W.: A Wittgensteinian Philosophy of Mathematics, „Logic and Logical Philosophy" 14 (2005), No. 2, 129-144.

S h a n k e r V.A.: Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments, Routledge 1997.

S h a n k e r S.: Wittgenstein Remarks on Gödel's Theorem, [w:] Gödel's Theorem in Focus, London: Croom Helm 1988.

Stanford Encyclopedia of Philosophy, entry: Wittgenstein's Philosophy of Mathematics.
Steiner M.: Wittgenstein as His Own Worst Enemy: The Case of Gödel's Theorem, „Philosophia Mathematica" 9 (2001), s. 257-279.
— Crispin Wright's *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Review, „The Journal of Symbolic Logic" 49 (1984), No. 4, s. 1415-1417
Tarski A: Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych, Warszawa 1933.
— Pisma logiczno-filozoficzne, t. I: Prawda, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1995.
— Pisma logiczno-filozoficzne, t. II: Metalogika, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2001.
Wang Hao: To and from Philosophy-Discussions with Gödel and Wittgenstein, „Synthese" 88 (1991), s. 229-277.
— A Logical Journey: From Gödel to Philosophy, Cambridge, MA: The MIT Press 1997.
Wittgenstein L.: Logisch-philosophische Abhandlung, Frankfurt: Suhrkamp 1963 (pol. Traktat logiczno-filozoficzny tł. B.Wolniewicz, Warszawa: PWN 1970).
— Dociekania filozoficzne, wyd. II, tł. B. Wolniewicz, Warszawa: PWN 1999
— Kartki, tł. S.Lisiecka, Warszawa: Wyd. KR 1999.
— Lectures on the Foundations of Mathematics, ed. C. Diamond, Cambridge: Harvester Press 1976.
— Philosophische Grammatik, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1984.
— Remarks on the Foundations of Mathematics, ed. by G.E. von Wright, R. Rees and G.E.M. Anscombe, transl. by G.E.M. Anscombe, Cambridge: MIT 1956 (pol. Uwagi o podstawach matematyki, tł. M. Poręba, Warszawa: Spacja 2001).
— Philosophical Remarks [1929-1939], ed. by R. Rhees, Oxford: Blackwell 1975.
Wright C.: Wittgenstein on the Foundations of Mathematics, London: Duckworth – Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1980.
Wrigley M.: Wittgenstein on Inconsistency, „Philosophy" 55 (1980), No. 214, s. 471-484.
Wroński L.: Twierdzenia Gödla – dowody. Czy arytmetyka jest w stanie dowieść własną niesprzeczność?, „Semina Scientiarum". Suplement do „Zagadnień Filozoficznych w Nauce" nr 3 (2004), s. 71-79.

LUDWIG WITTGENSTEIN'S CRITIQUE OF GÖDEL'S FIRST INCOMPLETENESS THEOREM

Summary

Wittgenstein's RFM remarks on Gödel's First Incompleteness Theorem have been widely criticized, ridiculed or dismissed out of hand. The principal reason for this is negative evaluation of Wittgenstein's critique is not Wittgenstein rejection of the standard interpretation of Gödel's result but rather an exaggerated reaction to a alleged "mistake" Wittgenstein makes while discussing GIT. The aim of my paper, which due to Wittgenstein's method is merely a draft, is to pull apart the different and the very distinct strands in these remarks to understand them in the context of Wittgenstein's own philosophy of mathematics, and to determine what merit they have.

To understand Wittgenstein's attitude I will point out his hostility towards mathematical realism, hostility based on the "rule-following considerations" and his conventionalism. As I shall show, the aim of Wittgenstein's critique is not a *proof* itself but it's certain philosophical interpretation (*prose*). On a number of occasions this leads Wittgenstein to say that we should *simply* 'withdraw' or 'give up' *this* interpretation as if the contradiction goes away with the natural language interpretation.

Translated by Greta Wierzbińska

Słowa kluczowe: Wittgenstein, I twierdzenie Gödla, sprzeczność, filozofia matematyki.

Key words: Wittgenstein, Gödel's First Incompleteness Theorem, inconsistency, philosophy of mathematics.

Information about Author: GRETA WIERZBIŃSKA, Ph.D. – Institute of Philosophy, Jagiellonian University; address for correspondence: ul. Bonerowska 5/5, 31-130 Kraków; email: siddhartabuddyn@gmail.com