ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LVIII, numer 2 – 2010

MAREK LECHNIAK

ZASTOSOWANIE SYSTEMÓW POŚREDNICH MIĘDZY S4 A S5 W KONTEKSTACH EPISTEMICZNYCH*

W *Knowledge and Belief* J. Hintikka zwrócił uwagę na możliwość stosowania systemów logik modalnych do charakterystyki pojęć epistemicznych i doksastycznych. Podał argumenty za tezą, że „właściwą" logiką wiedzy jest system S4, a nie system S5. Jednakże w późniejszym okresie z jednej strony pojawiło się szerokie stosowanie systemu S5 w kontekstach związanych z informatyką, z drugiej zaś strony zwrócono uwagę na systemy pośrednie między S4 a S5 jako unikające trudności intuicyjnych, jakie rodził system S5, a jednocześnie posiadające większą siłę wyrazu niż S4. W niniejszej pracy przedstawię kilka spośród owych systemów pośrednich, a mianowicie systemy S4.2, S4F oraz S4.4 w zastosowaniu do kontekstów epistemicznych (systemy te były stosowane również w innych kontekstach, np. temporalnych). Ażeby uwidocznić rolę owych systemów pośrednich, nakreślę najpierw kilka uwag dotyczących krańców tego ciągu systemów, a mianowicie S4 oraz S5.

1. UWAGI HISTORYCZNE O SYSTEMACH ZAWARTYCH POMIĘDZY S4 A S5

W apendyksie do *Symbolic Logic* C.I. Lewis i C.H. Langford nadali imiona od S1 do S5 systemom omawianym w książce. Jedną z pierwszych prób rozszerzenia tej listy podjął w 1939 r. W.T. Parry, sugerując, że można zbu-

Dr MAREK LECHNIAK – Katedra Logiki, Wydział Filozofii, Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II; adres do korespondencji: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin; e-mail: lechmar@kul.lublin.pl

* Artykuł jest rozszerzoną wersją referatu wygłoszonego w KUL dnia 17 listopada 2009 r. podczas konferencji „Zastosowania logik modalnych".

dować system znajdujący się w sposób właściwy pomiędzy S4 a S5 przez dodanie do S4 dodatkowego aksjomatu $L(LMLp \rightarrow Lp)$ (gdzie L czytamy: „Jest konieczne, że", a M – „Jest możliwe, że"), co dało w efekcie utożsamienie modalności L i LML; system będący rezultatem tego zabiegu powinien zawierać nierównoważne nieredukowalne modalności L, ML, LM, M oraz ich negacje. Parry zaproponował nazwę S4.5 dla tego systemu[1]. Jak wskazuje J. Zeman, przez następne lata, aż do połowy lat pięćdziesiątych, logicy nie zajmowali się problemem podjętym przez Parry'ego. Dopiero wówczas A. Prior wrócił do kwestii logik pośrednich między S4 a S5, konstruując system modalności Diodorowskich, który faktycznie zawierał S4 i był zawarty w S5. Całą rodzinę takich systemów zbadali M. Dummett i J.E. Lemmon w pracy z 1959 r.[2] Pojawiły się tam m.in. systemy S4.2, S4.3 oraz system modalności Diodorowskiej D (zwany przez B. Sobocińskiego systemem S4.3.1). W końcu rozległe badania nad systemami pośrednimi między S4 a S5 przeprowadził B. Sobociński, wskazując np. na system pomiędzy S4.3.1 a S5, który nazwał S4.4[3] oraz J. Zeman, który w szeregu artykułów opublikowanych również w „Notre Dame Journal of Formal Logic" badał własności formalne wielu innych systemów, które można umieścić w sąsiedztwie systemu S4.4 (np. interesującego dla nas systemu S4F, zwanego przez Zemana S4.3.2). Wyniki badań nad logikami pośrednimi są zebrane w rozdziale 15 książki J. Zemana *Modal Logic*[4].

2. FORMALNA PREZENTACJA SYSTEMÓW

Od badań K. Gödla wiadomo, że liczne systemy logik modalnych można budować, uzupełniając zbiór tez klasycznego rachunku zdań o aksjomaty i reguły charakteryzujące funktory modalne. Zakłada się więc, że u podstaw

---

[1] Por. J. Zeman, *Modal Logic*, Oxford 1973; A. Prior, *Past, Present and Future*, Oxford 1967, s. 20-31. Trzeba tu dodać, że – jak wykazali M. Dummett i J.E. Lemmon – system Parry'ego faktycznie zawiera system S4, jednak nie jest w sposób właściwy zawarty w S5, ale z nim równoważny.

[2] Por. M. Dummett, J.E. Lemmon, *Modal Logics between S4 and S5*, „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" 3 (1959), s. 250-264.

[3] Por. np. B. Sobociński, *Modal System S4.4*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 5 (1964), s. 305-312 oraz cały szereg innych artykułów opublikowanych w tym czasopiśmie.

[4] Por. także np. J. Zeman, *Modal Systems in which Necessity is "Factorable"*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 10 (1969), s. 247-256; tenże, *A Study of some Systems in the Neighborhood of S4.4*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 12 (1971), s. 341-357; tenże, *Semantics for S4.3.2*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 13 (1972), s. 454-460.

systemu modalnego leżą wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań oraz reguła odrywania (jako reguła prowadząca od tez do tez systemu). Język klasycznego rachunku zdań wzbogacany jest zatem o funktory osobliwe „Jest konieczne, że", „Jest możliwe, że" (funktory zdaniotwórcze od jednego argumentu zdaniowego), a zbiór wyrażeń sensownych KRZ wzbogaca się o wyrażenia postaci $L\varphi, M\varphi$, gdzie φ jest wyrażeniem zdaniowym, natomiast do zbioru tez klasycznego rachunku zdań dodaje się jako aksjomaty np. pewne spośród niżej wymienionych formuł.

Podstawowe aksjomaty, które mogą występować w analizowanych systemach, są zatem następujące:[5]

PC_K Zbiór wszystkich twierdzeń klasycznego rachunku zdań oraz podstawień tych twierdzeń zawierających funktory modalne.

K. $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$
D. $K\varphi \to M\varphi$
T. $K\varphi \to \varphi$
4. $K\varphi \to KK\varphi$
4.2 $MK\varphi \to KM\varphi$
4.3 $K(\varphi \to M\psi) \vee K(\psi \to M\varphi)$
4.3.1 $K(K(\varphi \to K\varphi) \to \varphi) \to (MK\varphi \to \varphi)$
4.3.2 $K(K\varphi \to \psi) \vee (MK\psi \to \varphi)$
F. $M\varphi \wedge MK\psi \to K(M\varphi \vee \psi)$
4.4. $((\varphi \wedge MK\psi) \to K(\varphi \vee \psi)$
5. $MK\varphi \to K\varphi$

Listę dopełnia reguła Gödla (RG): Jeżeli $\vdash \varphi$, to $\vdash K\varphi$[6]. Aksjomaty 4.2, 4.3, 4.3.1 (Diodorowski), 4F, 4.3.2 oraz 4.4 mają wiele różnych równoważnych sformułowań[7].

---

[5] Przyjmujemy notację pochodzącą od Lemmona, a spopularyzowaną przez Segerberga, bazującą na nazwach poszczególnych aksjomatów. K reprezentuje funktor konieczności, a M – funktor możliwości.

[6] Przykładowe odczytania niektórych aksjomatów: T – „Jeśli φ jest konieczne, to φ", 4.2 – „Jeśli jest możliwe, że jest konieczne, że φ, to jest konieczne, że jest możliwe, że φ"; reguła Gödla: „Jeśli φ jest tezą, to tezą jest również „Jest konieczne, że φ".

[7] Na przykład inne sformułowanie aksjomatu 4.3 to (*) $K(K\varphi \to K\psi) \vee K(K\psi \to K\varphi)$ lub też (**) $K(K\varphi \to \psi) \vee K(K\psi \to \varphi)$. Ciekawe jest przeformułowanie aksjomatów specyficznych 4.3.2, F oraz 4.4, które ujawnia ich formalne podobieństwo:

4.3.2 $MK\psi \wedge \varphi \to K(\neg\psi \to M\varphi)$
F $MK\psi \wedge M\varphi \to K(\neg\psi \to M\varphi)$
4.4 $MK\psi \wedge \varphi \to K(\neg\psi \to \varphi)$

Z kolei w oparciu o powyższą listę aksjomatów można scharakteryzować następujący ciąg systemów modalnych:

K:	$\{PC_K\}$ + K + {RG}
T (=KT):	{K} + {T} + {RG}
D:	{K} + {D} + {RG}
S4 (=KT4):	T + {4}
KD4:	D + {4}
S4.2:	S4 + {4.2}
S4.3:	S4 + {4.3}
S4D (=S4.3.1):	S4.3 + {4.3.1}
S4F:	S4 + {F}
S4.3.2:	S4 + {4.3.2}
S4.4:	S4 + {4.4}
S5 (=KT45):	S4 + {5}
KD45:	KD4 + {5}

Z kolei jako semantykę formalną logik modalnych można podać np. semantykę relacyjną opartą na pojęciach możliwego świata i relacji alternatywności między światami możliwymi. Poszczególne systemy logik modalnych charakteryzowane są za pomocą opartych na tym samym schemacie struktur relacyjnych, różniących się między sobą jedynie własnościami relacji alternatywności (dostępności); dlatego semantyki te stanowią dogodne narzędzie umożliwiające np. porównywanie własności systemów modalnych. Przypomnijmy najpierw podstawowe pojęcia semantyki relacyjnej:

Niech U ($U \neq \varnothing$) będzie zbiorem, $R \sqsubseteq U \times U$ relacją. Wówczas parę $\langle U, R \rangle$ nazywamy strukturą relacyjną. Elementy zbioru U nazywamy światami (stanami, punktami), a relację R – relacją dostępności (alternatywności, osiągalności).

Modelem relacyjnym (modelem Kripkego) nazywamy trójkę $M = \langle U, R, V \rangle$, gdzie U jest niepustym zbiorem, R – relacją na zbiorze U, a V jest funkcją przyporządkowującą kolejnym zmiennym zdaniowym podzbiory zbioru U (V nazywamy waluacją, wartościowaniem).

4.3.2 jest innym sformułowaniem F (na gruncie pozostałych aksjomatów S4; jest tak ponieważ $\varphi \to M\varphi$ (K) i $M\varphi \to (MK\psi \to (\neg\psi \to M\varphi))$). Trzeba na marginesie dodać, że nazewnictwo systemów jest niespójne; np. M. Cresswell i G. Hughes systemem S4F nazywają system nazywany systemem końca czasu, czyli system będący rozszerzeniem S4 o aksjomat F $KM\varphi \wedge KM\psi \to M(\varphi \wedge \psi)$, równoważny aksjomatowi M $KM\varphi \to MK\varphi$, który u Sobocińskiego jest aksjomatem systemu K1; ale system K1 nie tylko nie zawiera się w S5, ale jest z nim niemożliwy do pogodzenia. Por. G. Hughes, M. Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic*, London 1996, s. 131; Zeman, *Modal Logic*.

Podzbiór *V(p)* rozumiany jest jako zbiór tych światów, w których zmienna *p* jest prawdziwa. Funkcja wartościowania *V* wyznacza relację spełniania $\vDash$ („$(\mathcal{M},u)\vDash\varphi$" = „zdanie φ jest prawdziwe w świecie u modelu $\mathcal{M}$").

Prawdziwość formuły w modelu jest charakteryzowana za pomocą następującej definicji indukcyjnej[8] :

(i) $(\mathcal{M},u)\vDash p_i \quad\Leftrightarrow u\in V(p_i)$,
(ii) $(\mathcal{M},u)\vDash\neg\varphi \quad\Leftrightarrow$ nie jest tak, że $(\mathcal{M},u)\vDash\varphi$,
(iii) $(\mathcal{M},u)\vDash\psi\to\chi \quad\Leftrightarrow$ Jeśli $(\mathcal{M},u)\vDash\psi$, to $(\mathcal{M},u)\vDash\chi$,
(iv) $(\mathcal{M},u)\vDash\psi\wedge\chi \quad\Leftrightarrow$ $(\mathcal{M},u)\vDash\psi$ i $(\mathcal{M},u)\vDash\chi$,
(v) $(\mathcal{M},u)\vDash\psi\vee\chi \quad\Leftrightarrow$ $(\mathcal{M},u)\vDash\psi$ lub $(\mathcal{M},u)\vDash\chi$,
(vi) $(\mathcal{M},u)\vDash\psi\equiv\chi \quad\Leftrightarrow$ $(\mathcal{M},u)\vDash\psi$ wtw $(\mathcal{M},u)\vDash\chi$,
(vii) $(\mathcal{M},u)\vDash L\psi \quad\Leftrightarrow$ dla każdego t, jeśli uRt, to $(\mathcal{M},u)\vDash\psi$,
(viii) $(\mathcal{M},u)\vDash M\psi \quad\Leftrightarrow$ istnieje t takie, że uRt i $(\mathcal{M},u)\vDash\psi$.

Zdanie φ jest prawdziwe w modelu $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}\vDash\varphi$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $u\in U$ jest tak, że $(\mathcal{M},u)\vDash\varphi$.

Charakterystyka semantyczna systemów modalnych jest wyznaczona w semantykach relacyjnych przez własności relacji dostępności (alternatywności) między możliwymi światami. Istotne dla analizowanych systemów są następujące własności:

Ser	R jest seryjna	$\Leftrightarrow \forall x\exists y(xRy)$
Ref	R jest zwrotna	$\Leftrightarrow \forall x(xRx)$
Sym	R jest symetryczna	$\Leftrightarrow \forall x\forall y(xRy\to yRx)$
E	R jest euklidesowa	$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(xRy\wedge xRz\to yRz)$
Trans	R jest przechodnia	$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(xRy\wedge yRz\to xRz)$
Con	R jest spójna	$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(xRy\wedge xRz\to(yRz\vee zRy)$
Conv	R jest zbieżna	$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall t(xRy\wedge xRt\to\exists z(yRz\wedge tRz))$
SConv	R jest silnie zbieżna	$\Leftrightarrow \forall x\exists z\forall y(xRy\to yRz)$
WCon	R jest spójna w s. słabym	$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z((xRy\vee xRz)\to(yRz\vee zRy))$
F	R jest f	$\Leftrightarrow \forall x\forall y(xRy\to(\forall z(xRz\to yRz)\vee$ $\vee\,\forall z(xRz\to zRy)))$
F*	R jest f*	$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z((xRy\wedge xRz\to(zRy\vee yRx))$
TB	R jest tb	$\Leftrightarrow \forall x\forall y((xRy\wedge x\neq y)\to\forall z(xRz\to zRy))$

[8] Warunki (i) - (vi) nie wymagają komentarza, natomiast warunek (vii) stwierdza, że zdanie „Jest konieczne, że φ" jest prawdziwe w świecie u modelu M gdy dla każdego świata t pozostającego w relacji dostępności względem świata u, φ jest prawdziwe w świecie t, a warunek (viii) stwierdza, że zdanie „Jest możliwe, że φ" jest prawdziwe w świecie u, gdy istnieje powiązany z tym światem relacją R świat t, w którym zdanie φ jest prawdziwe.

Relacja dostępności w analizowanych systemach ma następujące własności[9]:

T	Ref
D	Ser
S4	Ref + Trans
S4.2	Ref + Trans + SCv
S4.3	Ref + Trans + WCt
S4F	Ref + Trans + F
S4.4	Ref + Trans + TB
S5	Ref + Trans +E
KD45	Ser + Trans +E

Wzajemne relacje między omawianymi systemami pośrednimi między S4 a S5 ilustruje następujący diagram[10]:

$$\begin{tikzcd}
S5 \arrow[r] & S4.4 \arrow[r] \arrow[d] & S4.3.1 \arrow[r] \arrow[d] & S4.2.1 \arrow[d] & \\
 & S4.3.2 \arrow[r] & S4.3 \arrow[r] & S.4.2 \arrow[r] & S4
\end{tikzcd}$$

3. TEMPORALNA INTERPRETACJA SYSTEMÓW POŚREDNICH MIĘDZY S4 A S5

Nim przejdziemy do analiz systemów pośrednich między S4 a S5 w kontekstach zastosowań związanych z wiedzą i przekonaniami, przypomnijmy sobie kilka informacji dotyczących temporalnych własności relacji dostępności dla tych systemów[11]. Jest to (od strony historycznej) dość ważne, bo rozwój tych logik przebiegał w kontekście narzuconym przez temporalne intuicje Priora. Tak więc Prior, poszukując właściwej formalizacji dla modalności Diodorowskich („jest konieczne” = „jest prawdziwe teraz i w każdym momencie w przyszłości”, a „jest możliwe” = „jest prawdziwe teraz lub w pewnym momencie przyszłości”), przypuszczał pierwotnie, że semantyka

---

[9] W świetle uwag z przypisu 7 F* wyraża w inny sposób własność F, a system S4.3.2 jest to system S4F.

[10] Strzałka w diagramie reprezentuje relację inkluzji między systemami, tzn. że w systemie S5 zawarty jest system S4.4, w tym z kolei zawarte są zarówno system S4.3.1, jak i S4.3.2 itd. aż do najsłabszego z całej rodziny systemu S4; w tym sensie systemy takie jak np. S4.4, S4.3 czy S4.2 są systemami pośrednimi między S5 a S4. Diagram ukazuje jedynie interesujące nas systemy, poza którymi istnieje ogromna ilość innych systemów pośrednich. Por. np. Z e m a n, *A Study of some Systems*, s. 355-356.

[11] Por. rozważania z 15 rozdziału *Modal Logic* Zemana.

S4 spełnia charakterystykę modalności Diodorowskich. Jednak, jak się okazało nieco później, tak nie jest. Formuła (*) $K(Kp \to Kq) \vee K(Kq \to Kp)$, nienależąca do S4, po dodaniu do niego prowadziła do systemu zawartego w S5, a zawierającego S4. Patrząc na S4 od strony semantycznej, można zauważyć, że relacja alternatywności, która jest zwrotna i przechodnia, częściowo porządkuje możliwe światy w danym modelu, czyli model ten może być postrzegany jako drzewo, którego gałęzie mogą się rozchodzić (rozgałęziać). Świat w może być dla mnie dostępny zanim wybiorę pójście jedną ścieżką zamiast inną, ale po dokonaniu wyboru ścieżki, w może przestać być już dostępny. Jeśli postrzegamy możliwe światy jako momenty czasowe, a relację dostępności jako relację „bycia nie wcześniej niż", otrzymamy świat o czasie rozgałęzionym. Istnieją przyszłe stany rzeczy dostępne dla mnie teraz, które mogą wskutek pewnych zdarzeń pośrednich stać się dla mnie niedostępne w przyszłości. Możemy jednak przyjąć liniowe uporządkowanie momentów czasowych, czyli dla dowolnych światów w_1, w_2, albo w_1 ma dostęp do w_2 albo w_2 ma dostęp do w_1 lub też $w_1 = w_2$ (relacja jest spójna). Takie własności ma relacja alternatywności w systemie S4.3 (przy czym zamiast formuły (*) można przyjąć aksjomat (**)).

Z kolei pomiędzy S4 a S4.3 znajduje się system S4.2. Czas w S4 może się rozgałęziać, czas w S4.3 jest linearny, natomiast modele S4.2 stanowią kompromis między S4 a S4.3. Rozgałęzienie jest dopuszczone, ale każdy model S4.2 ma tę własność, że jeżeli dwa światy są dostępne ze względu na pewien świat, mają wspólny świat dostępny dla nich. Tak więc modele S4.2 są zbieżne, choć nie muszą być spójne (spójność jest szczególnym przypadkiem zbieżności). Jeśli zatem formuła $MK\varphi$ zachodzi, znaczy to, że φ stanie się konieczna w pewnym świecie dla nas dostępnym (w S4 formuła ta może zachodzić w świecie realnym bez zachodzenia w każdym świecie, może być konieczna w jednej z gałęzi, ale nie w innej). Dalej, patrząc „od góry", powyżej systemu S4.3 znajdujemy system Diodorowski S4.3.1. Różni się on od S4.3 tym, że w tym ostatnim czas był ciągły, natomiast w systemie Diodorowskim czas powinien być dyskretny. Sekwencja czasowa, traktowana jako ciąg momentów czasowych, która weryfikuje S4.3, ale nie weryfikuje formuły (oznaczonej przez Zemana w *Modal Logic* jako M13) $K(K(K(p \to Kp) \to p) \to (MKp \to p))$ [12] będzie sekwencją dwóch momentów, pomiędzy którymi istnieje nieskończenie wiele chwil. Z drugiej strony, jeśli weźmie się M13 jako dodatkowy

[12] Podobne działanie ma inna formuła $K(K((K \to Kp) \to Kp) \to (MKp \to Kp))$ lub też wskazany wyżej aksjomat 4.3.1.

aksjomat dołączony do S4.3, otrzyma się system, w którym sekwencja czasowa jest dyskretna.

Kres górny analizowanego ciągu systemów stanowi system S5, w którym „Jest konieczne, że *p*” może być zinterpretowane temporalnie jako „*p* jest prawdziwe teraz i było zawsze i będzie zawsze prawdziwe”, a „Jest możliwe, że *p*” jako „*p* jest teraz prawdziwe lub w pewnej chwili w przyszłości będzie prawdziwe lub w pewnej chwili przeszłości było prawdziwe”. Pomiędzy S4.3.1 a S5 znajduje się ciekawy system S4.4. Jego interpretacja temporalna pozwala na nazywanie tego systemu „logiką końca świata”. „Chociaż możliwa konieczność zdania w S4.4 nie implikuje jego konieczności, jak to ma miejsce w S5, jeśli zdanie jest prawdziwe teraz tak samo jak możliwie konieczne, wtedy jest ono konieczne w S4.4. To wskazuje na zasadniczą różnicę między obecną chwilą a wszystkimi chwilami po niej następującymi. Jeśli wszystkim, co jest potrzebne dla tego, aby zdanie możliwie konieczne stało się konieczne jest to, żeby ono było teraz prawdziwe, wówczas wszystkie zdania, które są możliwie konieczne muszą się stać prawdziwe na zawsze w każdej chwili, która nastąpi po chwili obecnej. Przy tej interpretacji S4.4 wyłania się jako logika końca świata. Można sobie wyobrazić anioła ze złotym rogiem w ręku obwieszczającego: «Kiedy zadmę w ten róg, świat się skończy; czas przejdzie w wieczność i w tym momencie wszystkie prawdy wieczne urzeczywistnią się. Wszystko, co kiedyś miało być konieczne, stanie się koniecznie prawdziwe». Anioł przykłada róg do ust i chwila poprzedzająca moment, gdy anioł zadął w róg, jest dokładnie tą chwilą, dla której S4.4 wyraża sekwencję czasową”[13]. Z kolei semantyka S4.3.2 jest podobna do semantyki S4.4 „pod względem rozróżnienia między dwoma rodzajami światów opartych na relacji dostępności właściwej dla danych światów: tu jednak nie będzie żadnych ograniczeń nałożonych na liczbę światów każdej z klas, które mogą należeć do modelu. Nazwijmy jedną z klas światów *t*-światami (analogicznie do momentów czasowych w modelu S4.4), a drugą klasę *e*-światami (od «wiecznościowej» części modelu S4.4). Relacja dostępności dla S4.3.2 spełnia warunek: Każdy *t*-świat ma dostęp do każdego (*t*- lub *e*-)świata w modelu, w którym występuje; każdy *e*-świat ma dostęp do wszystkich *e*-światów”[14]. Zamiast semantyki opartej na rozróżnieniu dwóch rodzajów światów można podać semantykę z dodatkowym warunkiem nałożonym na relację dostępności. Tym warunkiem jest warunek f* z początkowego zestawienia, zwany warunkiem nie-rozgałęzienia (*non-branching time*).

[13] Por. Z e m a n, *A Study of some Systems*, s. 342.
[14] Por. t e n ż e, *Semantics for S4.3.2*, s. 454.

Powyższe uwagi miały na celu pokazać tło rozwoju badań nad interesującymi nas systemami. Logiki temporalne stanowiły bowiem teren aplikacji logik modalnych, w których modalności były interpretowane czasowo. Okazało się, że gdyby ograniczyć spektrum logik jedynie do najbardziej popularnych systemów S4, S5, podstawowe własności czasu nie mogłyby być wyrażone. Jak pokazywał von Wright, logiki modalne mogą być również interpretowane epistemicznie. Możemy przejść teraz do uwag bezpośrednio dotyczących tematu niniejszego artykułu.

4. HINTIKKI ARGUMENTY DOTYCZĄCE „PRAWDZIWEJ" LOGIKI WIEDZY I PRZEKONAŃ

W *Knowledge and Belief* Hintikka poszukuje „prawdziwego" systemu wyrażającego pojęcie wiedzy i przekonania. Hintikka podaje tam argumenty za tezą, że system S4 jest prawdziwą „logiką wiedzy", a system KD4 takąż „prawdziwą" logiką przekonań. Hintikka podaje też argumenty przeciw systemowi S5 jako systemowi „logiki wiedzy". Liczne argumenty filozoficzne w omawianej kwestii zebrał i poddał analizie W. Lenzen[15].

Dla Hintikki wiedza jest prawdziwością we wszystkich epistemicznie możliwych światach, tzn. światach, które są możliwe do pogodzenia z tym, co podmiot wie w świecie aktualnym (podobnie doksastycznie możliwe światy to światy możliwe do pogodzenia z tym, co do czego podmiot jest przekonany). Własności epistemicznych (doksastycznych) możliwości są określane za pomocą własności relacji dostępności. Dla pojęcia wiedzy niepowątpiewalną własnością jest zwrotność tej relacji, wyrażająca fakt, że wiedza pociąga prawdziwość. Inne własności tej relacji nie są, jak zauważa Stalnaker, tak oczywiste. Hintikka postuluje, aby prócz zwrotności uznać także przechodniość relacji dostępności, czyli tezę, że wiedza implikuje „wiedzę, że się wie". Trzeba tu podkreślić, że Hintikka nie odwołuje się do introspekcji, ale tę własność wiedzy chce wyprowadzić z samej natury wiedzy[16]. Natomiast,

[15] *Recent Work in Epistemic Logic*, „Acta Philosophica Fennica" 30 (1978). Współcześnie nie głosi się już raczej potrzeby znalezienia jednej „prawdziwej" logiki wiedzy czy przekonań. Wskazuje się, iż zamiast poszukiwać jedynej logiki, zadawane jest pytanie jak zastosować taką czy inną logikę wiedzy w konkretnych sytuacjach. por. G. S c h w a r t z, *In Search of a "True" Logic of Knowledge: the Nonmonotonic Perspective*, „Artificial Intelligence" 79 (1995), s. 39-63.

[16] R. Stalnaker w taki oto sposób streszcza argumentację Hintikki: Wiedza domaga się konkluzywnych racji dla przekonania, takich, które nie byłyby podważone przez jakąkolwiek informację możliwą do pogodzenia z tym, co ktoś wie. Por. R. S t a l n a k e r, *On Logics of Knowledge*

zdaniem Hintikki, nie do przyjęcia jest negatywna introspekcja w postaci aksjomatu S5 (jeśli ktoś nie ma wiedzy, wówczas on wie, że nie ma wiedzy); argumentem Hintikki za tym jest jawnie niemożliwa do przyjęcia zasada (*) $p \rightarrow K_a P_a p$ [17] (sugeruje ona, „że można by dojść do wiedzy przez samą tylko refleksję”. Ale można przyjąć, że podmiot racjonalny może uznawać i być w tym uznawaniu uprawniony, że wiedział coś, co faktycznie było fałszywe, czyli może być dla pewnego zdania φ, że nie-φ oraz $BK\varphi$. W takim przypadku, zakładając niesprzeczność przekonań podmiotu, nie jest on przekonany, a zatem i nie wie, że nie-φ jest możliwe do pogodzenia z jego wiedzą. A zatem $\neg K \neg K\varphi$ razem z $\neg\varphi$ jest prawdziwe, falsyfikując (*))[18].

Z kolei pojęcie przekonania tym różni się od pojęcia wiedzy, że przekonanie nie musi być prawdziwe, czyli relacja alternatywności doksastycznej

---

and Belief, „Philosophical Studies” 128 (2006), s. 169-199. Sam Hintikka (*Logika epistemiczna i metody analizy filozoficznej*, [w:] J. H i n t i k k a, *Eseje logiczno-filozoficzne*, Warszawa 1992, s. 27-51) tak argumentuje: „Żeby wiedzieć, że *p*, trzeba mieć na to nie tylko dobre świadectwo, ale najlepsze z możliwych. Musi ono czynić dalsze badania w całej sprawie bezprzedmiotowymi (aczkolwiek nie jest logicznie wykluczone, że mogłyby one wnieść coś nowego). Pojęcie wiedzy stanowi w tym sensie «zapieczętowanie dyskusji». Stawia kres dalszym pytaniom, które w innym przypadku można by postawić bez zaprzeczenia głoszącemu *p* podmiotowi. [...] Warunek [ten] służy także uwydatnieniu części prawdy zawartej w idei, że wiedza – «autentyczna» wiedza – zakłada pewność. Wydaje się że obiektywnym składnikiem pewności jest bezprzedmiotowość dalszego badania” (s. 46-47). Z kolei H. Kirjavainen wskazuje, że klasyczna definicja wiedzy charakteryzuje mocne pojęcie wiedzy. Słabe pojęcie wiedzy wymaga jedynie spełnienia jednego warunku, a mianowicie że p jest prawdziwe. Jeśli chcemy spełnić warunek uprawomocnienia, dostajemy mocne pojęcie wiedzy. Zatem jesteśmy skłonni pomyśleć, że aby coś wiedzieć, nie wystarczy, że osobie przydarzy się mieć słuszną opinię, ale że osoba winna mieć konkluzywne podstawy dla tej wiedzy. W teorii modelowej ta sytuacja jest eksplikowana przez naturę relacji alternatywności. Dla „słabej” wiedzy wystarcza, że jeśli osoba wie, że p w świecie aktualnym μ, i jeśli μ^* jest alternatywą epistemiczną względem μ, to p jest elementem μ^*. To jednak nie wystarcza dla mocnej wiedzy. Jest wtedy wymagane, że nie tylko p jest elementem świata alternatywnego μ^*, ale także, że „ a wie, że p „ jest elementem tego świata. Ale to znaczy, że wiedza *a*, że *p*, musi być możliwa ze względu na wszystkie alternatywy epistemiczne, które musimy w każdym przypadku rozważyć. W normalnych przypadkach wiedza w tym sensie nie jest możliwa, o ile nie jest oparta na pewnych obiektywnych podstawach – i z tego powodu warunek uprawomocnienia prowadzi do mocnego sensu wiedzy. Czyli tego sensu wiedzy, wedle którego poznający musi być w położeniu takim, że nie ma potrzeby dla dalszych poszukiwań. Nie istnieją żadne pozostawione możliwości, których realizacja implikowałaby, że posiadacz wiedzy głosiłby, że nie wie tego, co powiedział, że wie. Por. H. K i r j a v a i n e n, *Certainty, Assent and Belief*, Helsinki 1978, s. 42.

[17] W dalszych rozważaniach funktor modalny K (z indeksem a) odczytujemy: „Podmiot a wie, że”, $M_a p$ z kolei reprezentuje epistemiczną możliwość („Jest epistemicznie możliwe, że p ”), a $P_a p$ – mocną doksastyczną możliwość (indeksy przy wszystkich funktorach w tych kontekstach, gdy mowa o jednym tylko podmiocie, mogą być pominięte).

[18] Por. S t a l n a k e r, *On Logics of Knowledge*, s. 174; H i n t i k k a, *Knowledge*, s. 53-54.

nie jest zwrotna, ale „jedynie" seryjna; jest natomiast tak samo jak alternatywność epistemiczna, przechodnia. Wydaje się, choć Hintikka tego wprost nie mówi w *Knowledge and Belief*, że nie przyjmowałby on euklidesowości relacji alternatywności doksastycznej, czyli, że zdaniem Hintikki logika przekonań winna być systemem KD4. Sprawę logiki dla pojęcia przekonań dokładnie rozważa W. Lenzen. Zwraca on uwagę, że należy odróżnić co najmniej dwa pojęcia przekonania: mocne i słabe[19]. Podmiot jest przeświadczony, że p w sensie mocnym (*überzeugt sein*) wtedy, gdy podmiot uznaje (rozważa) p jako absolutnie pewne, innymi słowy – gdy p ma dla podmiotu maksymalne prawdopodobieństwo. Natomiast bardziej ogólne pojęcie „słabego" przekonania (*glauben*) spełnia słabszy warunek, że podmiot jedynie rozważa zdanie uznawane jako „prawdopodobne", tzn. że dolna granica subiektywnego prawdopodobieństwa przypisywanego p może być określona jako 1/2.

Zdaniem W. Lenzena mocne pojęcie przekonania spełnia następujące warunki („C" reprezentuje przekonanie w sensie mocnym – pewność):

C1 $Cp \wedge Cq \rightarrow C(p \wedge q)$
C2 $Cp \rightarrow \neg C\neg p$ (niesprzeczność przekonań)
C3 $P(p \wedge q) \rightarrow Pp \wedge Pq$, gdzie $Pp \equiv \neg C\neg p$
C4 $C(p \wedge q) \rightarrow Cp \wedge Cq$
C5 $Cp \vee Cq \rightarrow C(p \vee q)$
C7 $(\varphi \equiv \psi) \vdash (C\varphi \equiv C\psi)$
C9 $\varphi \vdash C\varphi$

Szczególnie ważne dla analizy pojęcia przekonania są prawa iterowania. Lenzen podchodzi tu do analizy przekonań inaczej niż Hintikka, zakładając „uprzywilejowany dostęp" podmiotu do jego stanów mentalnych (Hintikka sądził, że sama natura wiedzy czy przekonań powinna decydować o prawach iterowania). Ilekroć zatem ktoś jest przeświadczony o p, wie on, że żywi takie przeświadczenie; podobnie, jeśli podmiot nie jest przeświadczony, że p, czyli rozważa p jako możliwe, wie, że rozważa p jako możliwe (E-zasady):

[19] Kwestie te były wielokrotnie przez Lenzena rozważane np. w *Recent work* czy *Epistemische Betrachtungen*, a także w obszernych formalnych rozważaniach w *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit* (Wien–New York 1980), szczególnie w rozdz. 3 (s. 19-80), zawierającym podstawy intuicyjne oraz w rozdz. 6 (s. 137- 243), zawierającym rodzinę systemów logik epistemicznych), a syntetycznie zostały przedstawione w artykule *Epistemic logic*. Por. W. Lenzen, *Epistemic logic*, [w:] I. Niniluoto, M. Sintonen, J. Woleński, *Handbook of Epistemology*, Dordrecht 2004, s. 963-983.

E1 $Cp \to KCp$ (pozytywna introspekcja)
E2 $\neg Cp \to K\neg Cp$ (negatywna introspekcja)
E3 $Kp \to Cp$, a z tych zasad wynikają:
C10 $Cp \to CCp$ oraz
C11 $\neg Cp \to C\neg Cp$

Co więcej, jak wskazuje Lenzen (i co łatwo wykazać), C10 i C11 mogą być wzmocnione do równoważności, co oznacza, że w systemie dla mocnego przekonania każda modalność iterowana może być zredukowana do modalności prostej postaci Cp lub $\neg Cp$. Tak określona logika dla mocnego pojęcia przekonania to nic innego jak system KD45.

Z kolei dla słabego pojęcia przekonania (*Bp* – „*p* jest prawdopodobne" (ale nie pewne)) Lenzen przedstawia następujące warunki:

B1 $Bp \to \neg B\neg p$
B2 $Bp \to BBp$
B3 $\neg Bp \to B\neg Bp$
B4 $(\varphi \equiv \psi) \vdash (B\varphi \equiv B\psi)$
B6 $\varphi \vdash B\varphi$
E4 $Bp \wedge Cq \to B(p \wedge q)$
E5 $Cp \to Bp$
E6 $Bp \to KBp$
E7 $\neg Bp \to B\neg Bp$

Tak więc B1 odpowiada aksjomatowi D, B2 i B3 to odpowiedniki aksjomatów 4 i 5. B4 i B6 określają domknięcie dedukcyjne pojęcia przekonania. Ciekawą intuicję zawiera postulat E4; wskazuje on, że koniunkcja dwóch przekonań prowadzi do przekonania koniunkcyjnego jedynie wówczas, gdy jedno z owych przekonań jest przekonaniem w sensie mocnym[20]. Z kolei E5 wskazuje zależność między mocnym i słabym przekonaniem (Jeśli ktoś jest pewien, to i jest przekonany w stopniu 1/2), a E6 i E7 opierają się na tezie o uprzywilejowanym dostępie do stanów mentalnych.

Lenzen określa też dwa pojęcia wiedzy: tzw. bardziej wymagające i tzw. mniej wymagające. Każde z nich opiera się na podstawowym warunku K1, głoszącym, że wiedza pociąga prawdziwość, oraz warunku „subiektywnym" E3, że wiedza pociąga pewność. Łącznie dwa te warunki traktowane jako warunki wystarczające prowadzą do („mniej wymagającego") pojęcia wiedzy definiowanej jako: (Df K*) $K^{*}p \equiv Cp \wedge p$, czyli wiedza jest to praw-

[20] Widać zatem, że system ten jest słabszy od systemu poprzedniego.

dziwe mocne przekonanie. Takie pojęcie wiedzy spełniać winno, zdaniem Lenzena, następujące warunki:

K*1 $K^* p \to p$
K*2 $K^* p \wedge K^* q \to K^* (p \wedge q)$
K*3 $\varphi \equiv \psi \vdash K^* \varphi \equiv K^* \psi$
K*4 $(\varphi \to \psi) \vdash (K^* \varphi \to K^* \psi)$
K*5 $\varphi \vdash K^* \varphi$
K*6 $K^* p \to K^* K^* p$ (prosta konsekwencja (Def K*) oraz C10)
E8 $\neg Cp \to K^* \neg Cp$

Lenzen wskazuje, że chociaż warunek K*6 obowiązuje, II zasada redukcji (aksjomat 5 logik modalnych) $\neg K^* p \to K^* \neg K^* p$ dla pojęcia wiedzy nie może być przyjęty bezwzględnie. Należy bowiem rozróżnić dwa przypadki:

a) podmiot nie wie z powodu tego, że nie jest dostatecznie przekonany, że p – wówczas zasada 5 obowiązuje, a wtedy i E8 obowiązuje;
b) podmiot nie wie, że p z powodu niespełnienia warunku prawdziwości, tzn. p jest fałszywe, choć podmiot jest silnie co do jego prawdziwości przekonany, wówczas podmiot oczywiście nie wie, że nie wie, że p.

Jak widać logika wiedzy jako silnego przekonania jest logiką zawartą pomiędzy systemami S4 a S5 (zawiera wszystkie aksjomaty S4, a nie zawiera aksjomatu 5; system S4.4 – zob. niżej).

„Bardziej wymagające” (w sensie, że wiedza, to nie tylko prawdziwe mocne przekonania, ale coś więcej) pojęcie wiedzy spełnia natomiast następujące warunki:

K1 $Kp \to p$
K2 $Kp \wedge Kq \to K(p \wedge q)$
K3 $(\varphi \equiv \psi) \vdash (K\varphi \equiv K\psi)$
K4 $(\varphi \to \psi) \vdash (K\varphi \to K\psi)$
K5 $\varphi \vdash K\varphi$
K6 $Kp \to KKp$ (KK teza)
E9 $Cp \to BKp$
E10 $Cp \to CKp$
E11 $CCp \equiv CKp$

Pierwszych sześć warunków nie budzi wątpliwości[21]. Z kolei rozważmy tezy dotyczące iteracji różnych funktorów epistemicznych. E9 ustala związek między pojęciem przeświadczenia, przekonania i wiedzy. E10 stanowi wzmocnienie E9 (na bazie wcześniejszych praw; teza ta głosi, że pojęcie przekonania jest „silne” – przeświadczenie, że p implikuje przeświadczenie, że się wie), a z kolei implikacje: E9 i E10 można wzmocnić do równoważności E11. E11 stwierdza, że „wiedza i przeświadczenie są subiektywnie nierozróżnialne w tym sensie, że osoba nie może rozstrzygnąć, czy ona jest tylko przeświadczona, że p czy też naprawdę wie, że p, choć obiektywnie taka różnica istnieje (tylko wiedza pociąga prawdziwość)”[22]. Znowu widać, że logika tego pojęcia wiedzy również zawiera się między S4 a S5. Który zatem z systemów pośrednich między S4 a S5 odpowiada naszkicowanym tu pojęciom wiedzy?

5. S4.2 I S4.4 JAKO GŁÓWNE SYSTEMY ADEKWATNE DO CHARAKTERYZOWANIA RÓŻNYCH POJĘĆ WIEDZY

Aksjomaty specyficzne systemów S4.2 oraz S4.4 prezentowane od strony syntaktycznej są trudne do intuicyjnego uchwycenia; w języku naturalnym trudno zrozumieć różnicę między koniecznie możliwe a możliwie koniecznie możliwe (aksjomat 4.2 prezentuje Lenzen w postaci formuły epistemicznej (K7) $\neg K\neg Kp \to K\neg K\neg Kp$[23]). Jeszcze trudniej uchwycić, o co chodzi w aksjomacie K8 $p \wedge \neg K\neg Kp \to Kp$ (czyli $p \to (MKp \to Kp)$). Jak jednak wskazuje Lenzen, łatwo dowieść, że podmiot jest przeświadczony, że p, gdy nie wie,

[21] Choć przeciw zasadzie KK podano wiele argumentów, które referuje Lenzen w *Recent work* (s. 69-77), to jednak, jak zauważa on w *Epistemic Logic* (s. 971), biorą się one z wieloznaczności angielskiego słówka *know*, które może znaczyć tyle, co niemieckie *wissen* (wiedzieć), ale też może znaczyć to, co znaczy niemieckie *kennen* (znać) – pierwsze występuje w zdaniach podrzędnie złożonych (wiedzieć, że) i odnosi się, według Lenzena, do nastawień propozycjonalnych, drugie zaś nie odnosi się do takich nastawień (znać odpowiedź, drogę).

[22] Tamże. Oczywiście i tu, tak jak poprzednio, nie można uznać negatywnej introspekcji, gdyż „jeśli ktoś błędnie uznaje, że coś wie, (czyli $Cp \wedge \neg p$), wówczas ma on $\neg Kp$ (na podstawie K1), a do tego nie wie on o swoim błędzie, gdyż w obliczu E9 podmiot jest przekonany, że wie, że p; dlatego podmiot jest daleki od uznania, że nie wie on, że p.

[23] Jest on równoważny z prostszą formułą oznaczoną jako 4.2 na początku artykułu: $MKp \to KMp$. K7 bowiem, o ile użyjemy definicji konieczności za pomocą negacji i możliwości, przyjmie postać $MKp \to KMKp$, co wespół z tezą, że $KMKp \to MKp$ daje implikację 4.2.

że nie wie, że p (czyli gdy p jest możliwe do pogodzenia ze wszystkim, co on wie), czyli E12 $\neg K\neg Kp \equiv Cp$ [24]. Dysponując E12, łatwiej ująć intuicyjnie K7: jeśli ktoś jest przeświadczony, że p, to wie on, że jest przeświadczony, że p, co głosi zasada E1. Tak więc, zdaniem Lenzena, logiką dla „bardziej wymagającego" pojęcia wiedzy jest system S4.2.

Z kolei Stalnaker zwrócił uwagę na fakt, że S4.2 jest minimalną logiką umożliwiającą zdefiniowanie pojęcia silnego przekonania, czyli przeświadczenia (pewności)[25]. Dzięki temu zamiast osobnej logiki przeświadczenia i wiedzy można otrzymać jeden system, na bazie którego pojęciem pierwotnym jest „mocne" pojęcie wiedzy, a mocne pojęcie przekonania jest definiowalne. Pożytek z takiego podejścia jest szczególnie widoczny na poziomie semantycznym. Używając dwóch pojęć, wiedzy i przekonania, musimy posługiwać się naraz dwiema odpowiadającymi im relacjami dostępności – prowadzi to do trudności z określeniem warunków, które na te relacje należy nałożyć. Z trudnościami w posługiwaniu się dwiema relacjami alternatywności, doksastycznej i epistemicznej, wyraźnie nie radził sobie Hintikka w *Knowledge and Belief* (s. 49-58)[26]. Definiując przeświadczenie jako

---

[24] Por. L e n z e n, *Epistemic logic*, s. 973. Dowód jest następujący:

1.	$Cp \to CKp$	E10
2.	$CKp \to \neg C\neg Kp$	C2
3.	$Cp \to \neg C\neg Kp$	1, 2
4.	$Kp \to Cp$	E3
5.	$\neg C\neg Kp \to \neg K\neg Kp$	4
6.	$Cp \to \neg K\neg Kp$	3, 5
7.	$\neg Cp \to K\neg Cp$	E2
8.	$K\neg Cp \to K\neg Kp$	4, K4
9.	$\neg Cp \to K\neg Kp$	7, 8
10.	$\neg K\neg Kp \to Cp$	9
11.	$Cp \equiv \neg K\neg Kp$	10, 6

[25] Sens tej definicji jest taki, że dla dowolnych światów x, y nie istnieje taki świat z, który byłby epistemicznie dostępny z świata x, a nie byłby dostępny ze świata y. Postulaty przedstawione przez Stalnakera (PI), (NI), (KB), (CB), (SB) są zasadami Lenzena (odpowiednio) E1, E2, E3, C2 i E9. System S4 jest zbyt słaby, aby umożliwić definicję przekonania – rezultatem takiej definicji byłaby logika przekonań, która nie byłaby logiką normalną

[26] Trzeba wskazać, że odrzucając argumenty o uprzywilejowanym dostępie do własnych stanów mentalnych Hintikka stał właściwie na beznadziejnej pozycji. Już samo uchwycenie różnicy logicznej między wiedzą a przekonaniem wydaje się (poza warunkiem prawdziwości wiedzy) zadaniem trudnym, zwłaszcza że – jak wykazał M. Byrd – jeżeli wiedza i prawdziwe przekonanie są analizowane w izolacji od siebie, nie ma różnicy w ich (formalnym) zachowaniu; ta różnica wyłania się dopiero jeśli analizuje się na raz te dwa pojęcia. Por. M. B y r d, *Knowledge and True Belief in Hintikka's Epistemic Logic*, „Journal of Philosophical Logic" 2 (1973), s. 181-192.

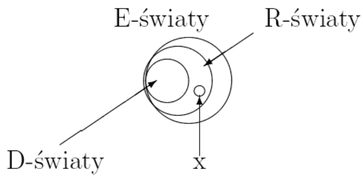
możliwą epistemicznie wiedzę mamy również możliwość zdefiniowania relacji alternatywności doksastycznej. Przypomnijmy: relacja alternatywności epistemicznej w systemie S4.2 jest zwrotna, przechodnia i silnie (lub słabo) zbieżna (konwergentna), natomiast relacja dostępności doksastycznej w systemie KD45 jest seryjna, przechodnia i euklidesowa. Stalnaker wskazuje, że dołączenie do własności relacji alternatywności epistemicznej systemu S4.2 definicji

(D) $xDy =_{df} \forall z(xRz \to zRy)$

prowadzi do tego, że relacja D jest dostępnością doksastyczną określoną w KD45[27]. Stalnaker z kolei definiuje jeszcze jedną relację, a mianowicie relację epistemicznej nierozróżnialności: idealny podmiot ma dokładnie te same przekonania w świecie możliwym x, co w świecie y, czyli:

(E) $xEy =_{df} \forall z(xDz \equiv yDz)$ (relacja E, jak widać, jest relacją równoważnościową).

Tak więc dla danego świata możliwego x można wyznaczyć trzy zbiory:
a) E zbiór światów *subiektywnie nierozróżnialnych* od świata x (światy mające E-powiązanie z x)
b) podzbiór R zbioru E światów możliwych do pogodzenia z tym, co podmiot wie (światy mające R-powiązanie z x)
c) podzbiór D zbioru R światów możliwych do pogodzenia z tym, o czym podmiot jest przeświadczony (światy mające D-powiązanie z x).



Definicja silnego przekonania jako możliwej epistemicznie wiedzy (Lenzena wzór E12 $Cp =_{df} \neg K \neg Kp$) jest, podobnie jak to było w systemie S4.2, „kluczem” do zrozumienia aksjomatu 4.4 (czyli K8 w notacji Lenzena, $p \wedge \neg K \neg Kp \to Kp$). Korzystając z niej, można aksjomat 4.4 przedstawić

[27] Czyli nie istnieje taki świat pomiędzy x a y, który byłby dostępny epistemicznie z x, a z którego y nie byłby dostępny. Co więcej, w każdym systemie pomiędzy S4.2 a S4.4, definiując przekonanie w sensie silnym jako możliwą epistemicznie wiedzę, odpowiadająca logika przekonań będzie systemem KD45. Por. S t a l n a k e r, *Logics of Knowledge*, s. 195.

jako $p \wedge Cp \rightarrow Kp$, czyli otrzymujemy dokładnie założone na wstępie pojęcie wiedzy: jeżeli czyjeś przeświadczenie, że p (pewność) jest prawdziwe, to osoba ta wie, że p. Z kolei, korzystając z definicji K*, można zauważyć, że K7 jest tezą systemu S4.4.

Od strony semantycznej wiadomo, że relacja alternatywności epistemicznej dla S4.4 ma poza zwrotnością i przechodniością również cechę oznaczoną przez Stalnakera mianem TB (*true belief*) (R jest tb $\Leftrightarrow \forall x \forall y((xRy \wedge \wedge x \neq y) \rightarrow \forall z(xRz \rightarrow zRy)))$. Z kolei wykazano, że system S4.4 można utworzyć dodając do S4.2 wyrażenie $\neg p \rightarrow (Mp \rightarrow MKMp)$, czyli aksjomat systemu S4.04, a ponieważ specyficzną cechą relacji alternatywności dla tego systemu jest tzw. odległa symetryczność (*remote symmetricity*), definiowana jako R jest odlegle symetryczna $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz \rightarrow zRy \vee x = y)$ (czyli jeśli x jest w relacji dostępności względem y, a y względem z, to albo x jest tożsamy z y, albo z jest w relacji do y), a zatem relacja alternatywności systemu S4.4 ma cechy zwrotności, przechodniości, zbieżności i odległej symetryczności[28].

Stalnaker umieszcza semantyczne rozważania dotyczące S4.4 w kontekście analizy relacji alternatywności. Pytanie jest następujące: w jaki sposób rozszerzyć relację doksastycznej alternatywności, aby stała się ona alternatywnością epistemiczną. Oczywiście problem dotyczy światów zewnętrznych względem D-światów[29]. Stalnakerowi chodzi o wyznaczenie górnej (maksymalnej) i dolnej (minimalnej) granicy tego rozszerzenia. Określenie rozszerzenia minimalnego jest łatwe – stanowi je założenie o zwrotności relacji D; zbiór epistemicznie dostępnych światów obejmował więc będzie zbiór światów doksastycznie dostępnych plus świat aktualny. W ten sposób otrzymujemy twierdzenie, że wiedza to prawdziwe przekonanie, czyli system S4.4.

Ciekawsze jest natomiast zadanie maksymalnego rozszerzenia relacji D. Mianowicie z warunku pozytywnej i negatywnej introspekcji dla przekonań wynika, że wszystkie światy epistemicznie dostępne względem x są subiektywnie nierozróżnialne ze świata x ($\forall x \forall y(xRy \rightarrow xEy)$). Jeśli utożsami się R z maksymalnym rozszerzeniem D, otrzyma się definicję:

[28] Por. G. G e o r g a c a r a k o s, *Semantics for S4.04, S4.4, and S4.3.2*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 17 (1976), s. 297-302.

[29] Z założenia, że wiedza pociąga przeświadczenie wiadomo właśnie, że R jest rozszerzeniem D ($\forall x \forall y(xDy \rightarrow xRy)$); z założenia, że wiedza pociąga prawdziwość, wiadomo, że to rozszerzenie będzie relacją zwrotną ($\forall x xRx$), a z założenia, że mamy mocne przeświadczenie, pewność wiadomo, że R utożsamia się z D wewnątrz D-zbioru ($\forall x \forall y(xDy \rightarrow xRy \equiv xDy)$). Por. S t a l n a k e r, *Logics*, s. 186.

$xRy =_{df} (xDx \wedge xDy) \vee (\neg xDx \wedge xEy)$

„To ujęcie wiedzy pozwala nam znać rzeczy, które wychodzą poza nasze stany wewnętrzne jedynie wtedy, gdy wszystkie nasze przekonania są prawdziwe. Logika tego pojęcia wiedzy S4F jest mocniejsza niż S4.2, ale słabsza niż logika minimalnego rozszerzenia, S4.4. Maksymalne rozszerzenie nie daje właściwego całościowego ujęcia wiedzy, ale może być uznane za adekwatną idealizację pojęcia wiedzy dla pewnych szczegółowych przypadków. Przyjmijmy, że wszystkie nasze informacje pochodzą z jednego źródła (wyrocznia), o którym zakładamy, że jest wiarogodne. Skoro wszystkie jego wypowiedzi są prawdziwe, wypowiedzi te dają nam wiedzę (pierwszy człon powyższej alternatywy), ale w możliwych światach, w których jakaś jego wypowiedź jest fałszywa, wyrocznia ta nie jest wiarogodna i niczemu z tego, co ona powie nie powinno się ufać (człon drugi alternatywy)"[30]. Warto wskazać, że system S4F jest badany w kontekstach niemonotonicznych w zastosowaniu do tzw. logik autoepistemicznych. Takie logiki opierają się na założeniu, że na naszą wiedzę wpływają nie tylko stany świata, ale i nasza samowiedza. Przy tym zakłada się, że wszystkie zdania reprezentują wyłącznie przekonania podmiotu, a nie świat. Przekonania dzieli się wtedy na przekonania początkowe i te, które są rezultatem działalności podmiotu na przekonaniach początkowych. Taka logika jest niemonotoniczna, co łatwo można zobaczyć na następującym przykładzie. Załóżmy, że początkowy zbiór przekonań jest pusty. Wówczas autoepistemiczną konsekwencją tego zbioru jest zdanie $\neg Kp$ (nie wiem, że p), czyli $\varnothing \vdash_{ae} \neg Kp$. Teraz załóżmy, że zbiór początkowy wzbogacił się o p ($\{p\}$); mamy wówczas $\{p\} \vdash_{ae} Kp$, a stąd $\{p\} \nvdash_{ae} \neg Kp$[31].

Na koniec dodajmy kilka słów na temat systemu S4.3 w kontekstach epistemicznych. Paradygmat systemów zmian przekonaniowych rozwinął się jakby niezależnie od standardowych logik modalnych. Standardowe AGM ujęcie zmian przekonaniowych formułowane było w „zwykłym" języku teoriomnogościowym wzbogaconym o teorię konsekwencji. Z kolei równolegle rozwijały się tzw. dynamiczne logiki epistemiczne (doksastyczne), takie jak np. DDL K. Segerberga, gdzie logika modalna (zwykle KD45) wzbogacona została o dwuargumentowe modalne funktory dynamiczne ($[\varphi]\psi$ – jest tak, że ψ po zmianie φ). Stalnaker proponuje analizę zmiany przekonaniowej przy użyciu logik pośrednich między S4 a S5. Wskazuje on, że odpowiednim

[30] Por. tamże, s. 187.

[31] Por. S c h w a r t z, *In Search*, s. 39-63.

systemem dla opisu rewizji przekonań jest system S4.3, który – jak wskazano – zajmuje pozycję pośrednią między S4.2 a S4F. Na zakończenie tego artykułu przytoczmy kilka racji za takim zastosowaniem systemu S4.3.

Stalnaker przypomina, że jedną ze strategii poszukiwania „czwartego warunku adekwatnej definicji wiedzy" (mającego usunąć problem Gettiera) jest strategia braku czynnika uchylającego: uprawomocnione prawdziwe przekonanie jest wiedzą wtedy, gdy nie istnieje taki sąd, który po rozpoznaniu jego prawdziwości zmuszałby podmiot do porzucenia tego przekonania lub też do tego, że dalsze uznawanie tego przekonania byłoby nieuprawomocnione. Według tej koncepcji zatem podmiot zna sąd, gdy ten sąd jest stabilny ze względu na potencjalną rewizję dokonaną w oparciu o zdanie prawdziwe[32]. Model przekonań opisywany wyżej może być wzbogacony o strukturę semantyczną, umożliwiającą opis rewizji przekonaniowej, w której wiedza charakteryzowana jest za pomocą reguły $K_i\varphi$, jest prawdziwe w świecie x, gdy $B_i\varphi$ jest prawdziwe w x oraz dla każdego ψ prawdziwego w x, $B_{x,i}(\psi) \subseteq \varphi$, gdzie $B_{x,i} = \{y : xD_iy\}$. Innymi słowy: podmiot wie, że φ, gdy dla dowolnego ψ podmiot będzie uznawał φ także po tym, jak dowie się, że ψ[33]. Funkcja $B_{x,i}$ jest w taki sposób określona, że doksastyczna alternatywność jej odpowiadająca zawiera się między minimalnym rozszerzeniem (system S4.4) a rozszerzeniem maksymalnym (S4F) i ma własności zwrotności, przechodniości, silnej zbieżności oraz słabej spójności; relacja ta charakteryzuje semantykę systemu S4.3[34].

Jak widać z powyższych, dość szkicowych uwag, systemy logik modalnych znajdujące się między systemem S4 a systemem S5, z których większość narodziła się z analizy kontekstów temporalnych, znalazły szerokie zastosowanie w analizie pojęć wiedzy i przekonań. Ze względu na swą prostotę systemy te umożliwiają łatwe ich stosowanie w analizach epistemologicznych dotyczących pojęć epistemicznych. Jak wskazano, system S4 należy uznać za zbyt słaby na to, by umożliwiał adekwatną analizę pojęcia wiedzy, system S5 jest zbyt mocny (utożsamia wiedzę z przekonaniem), system S4.4 traktuje wiedzę wyłącznie jako przekonanie prawdziwe, w systemie S4.3 wiedza jest przekonaniem odpornym na wszelką rewizję, zaś w S4.2 możemy wyrażać intuicje dotyczące mocnego pojęcia „wiedzy".

---

[32] Por. S t a l n a k e r, *Logics*, s. 187.

[33] Tamże, s. 189.

[34] Wadą takiego ujęcia rewizji przekonaniowej jest, zdaniem Stalnakera, to, że w nim zdanie fałszywe usunie z naszej wiedzy zbyt dużo informacji. Warunek odporności na zmianę jest warunkiem wystarczającym klasycznie rozumianej wiedzy, ale nie warunkiem koniecznym. Tamże, s. 191.

BIBLIOGRAFIA

G e o r g a c a r a k o s G.: Semantics for S4.04, S4.4, and S4.3.2, „Notre Dame Journal of Formal Logic” 17 (1976), s. 297-302.

H i n t i k k a J.: Knowledge and Belief, Ithaka: Cornell University Press 1962.

L e n z e n W.: Epistemic logic, [w:] I. N i n i l u o t o, M. S i n t o n e n, J. W o l e ń s k i, Handbook of Epistemology, Dordrecht: Kluwer 2004, s. 963-983.

— Recent Work in Epistemic Logic, „Acta Philosophica Fennica” 30 (1978).

S c h w a r t z G.: In Search of a “True” Logic of Knowledge: the Nonmonotonic Perspective, „Artificial Intelligence” 79 (1995), s. 39-63.

S t a l n a k e r R.: On Logics of Knowledge and Belief, „Philosophical Studies” 128 (2006), s. 169-199.

Z e m a n J.: Modal Logic, Oxford: Clarendon Press 1973.

— Modal Systems in which Necessity is “Factorable”, „Notre Dame Journal of Formal Logic” 10 (1969), s. 247-256.

— A study of some Systems in the Neighborhood of S4.4, „Notre Dame Journal of Formal Logic” 12 (1971), s. 341-357.

— Semantics for S4.3.2, „Notre Dame Journal of Formal Logic” 13 (1972), s. 454 -460.

APPLICATION OF SYSTEMS THAT ARE INTERMEDIATE BETWEEN S4 AND S5 IN EPISTEMIC CONTEXTS

S u m m a r y

The article presents systems of modal logics that are stronger than the S4 and weaker than the S5 systems. After a syntactic and semantic presentation of the systems, they are presented as applied to expressing the property of time. Then, after a discussion of some of Hintikka's arguments concerning “the only” logic proper for the concept of knowledge and belief, against the background of a discussion of various concepts of knowledge and convictions, the application of the S4.2, S4.3, S4F systems as well as of the S4.4 system for expressing properties of epistemic concepts is shown.

Translated by Tadeusz Karłowicz

Słowa kluczowe: logika modalna, systemy logiki modalnej, wiedza, przekonanie, pojęcia epistemiczne.

Key words: modal logic, systems of modal logic, knowledge, belief, epistemic concepts.

Information about Author: MAREK LECHNIAK, Ph.D. – assistant professor at the Department of Logic, Faculty of Philosophy, The John Paul II Catholic University of Lublin; address for correspondence: Al. Racławickie 14, PL 20-950 Lublin; e-mail: lechmar@kul.lublin.pl