ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LXIV, numer 2 – 2016
DOI: http://dx.doi.org/10.18290/rf.2016.64.2-1

ZDZISŁAW DYWAN

NAJKRÓTSZE AKSJOMATY MODALNEJ LOGIKI ŁUKASIEWICZA

Edward J. Lemmon w [1] podał aksjomatykę czterowartościowej logiki modalnej Łukasiewicza (por. [2])[1]. W [3] Marcin Tkaczyk zauważył, że jeden z trzech aksjomatów jest zbędny i podał jedyny dziewięcioliterowy aksjomat tej logiki. Pokażemy, że można znaleźć krótszy jedyny aksjomat i że nie ma krótszego. Po pozbyciu się zbędnego aksjomatu z aksjomatyki Lemmona wiemy, że

Twierdzenie 1. Modalna logika Łukasiewicza może być zaksjomatyzowana przy pomocy reguł odrywania, podstawiania, tez klasycznych i następujących formuł

Lm_1 $Lp \to p$

Lm_2 $Lp \to (q \to Lq)$

Udowodnimy najpierw, że

Twierdzenie 2. Modalna logika Łukasiewicza daje się zaksjomatyzować za pomocą formuły

Ax $Lp \to (q \equiv Lq)$

Dr hab. ZDZISŁAW DYWAN, Prof. KUL – Katedra Podstaw Informatyki w Instytucie Filozofii na Wydziale Filozofii KUL; adres do korespondencji: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin; e-mail: zdzislaw.dywan@kul.pl

[1] Symbolami $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\equiv$, L oznaczamy odpowiednio funktory negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji, równoważności i konieczności. Literami p, q, r oznaczamy zmienne zdaniowe, a literą φ formuły. Przez długość formuły rozumieć będziemy liczbę liter użytych w zapisie formuły w notacji Łukasiewicza.

Dowód. Podstawiamy[2] p/q w Lm_1. Korzystając teraz z prawa symplifikacji, otrzymujemy formułę $Lp \rightarrow (Lq \rightarrow q)$. Z tej formuły i z Lm_2 wynika Ax. Pozostało pokazać, że z Ax możemy otrzymać Lm_1 i Lm_2. Z Ax wynikają dwie formuły: $Lp \rightarrow (q \rightarrow Lq)$ i $Lp \rightarrow (Lq \rightarrow q)$. Pierwsza z tych formuł to aksjomat Lm_2. W drugiej formule dokonajmy podstawienia q/p. Otrzymamy wtedy formułę $Lp \rightarrow (Lp \rightarrow p)$. Ta formuła jest klasycznie równoważna aksjomatowi Lm_1. □

Nasz aksjomat posiada 7 liter. Pozostało pokazać, że każda krótsza teza logiki modalnej Łukasiewicza nie nadaje się na jedyny aksjomat tej logiki. Aby tego dokonać, użyjemy czterech poniższych matryc logicznych[3]:

$\mathbf{M}_{as}$

$\rightarrow$	0	1	$\neg$	L
0	1	1	1	0
*1	0	1	0	1

$\mathbf{M}_{fl}$

$\rightarrow$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\neg$	L
$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$
*$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$

$\mathbf{M}_1$

$\rightarrow$	0	1	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\neg$	L
0	1	1	1	1	1	0
*1	0	1	0	1	0	1
$\underline{0}$	1	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$
*$\underline{1}$	0	1	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$

$\mathbf{M}_2$

$\rightarrow$	0	1	$\underline{1}$	$\neg$	L
0	1	1	1	0	0
*1	0	1	1	0	1
*$\underline{1}$	0	1	1	0	1

Ze wspomnianej pracy Jana Łukasiewicza wiadomo, że tautologiami jego logiki są formuły, które są tautologiami w matrycach $\mathbf{M}_{as}$ i $\mathbf{M}_{fl}$ jednocześnie. O tych formułach będziemy mówić, że są Ł-tautologiami. W dalszych rozważaniach będzie użyteczny następujący

Lemat. Matryce $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ zawierają tautologie klasyczne, są domknięte na regułę odrywania i formuła Lm_2 nie jest tautologią w każdej z nich.

Dowód. Matryce $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ bez funktora L są homomorficzne ze zwykłą 0-1 klasyczną matrycą. A więc mają identyczne zbiory tautologii. Zawierają zatem wszystkie klasyczne tautologie. Zauważmy, że w obu matrycach jest

[2] W dowodzie pomijamy użycie tez logiki klasycznej. Uważamy te kroki za oczywiste.

[3] Podajemy nasze matryce jedynie dla funktorów: implikacji, negacji i konieczności. Pozostałe funktory klasyczne są zdefiniowane w zwykły sposób przy pomocy implikacji i negacji. Gwiazdka * wskazuje wartości wyróżnione matryc.

dziedziczona wartość wyróżniona przez implikację. To znaczy, że jeśli dla dowolnych wartości logicznych x, y tych matryc $x \to y$ i x są wartościami wyróżnionymi, to y też będzie wartością wyróżnioną. A więc zbiory tautologii obu tych matryc są domknięte na odrywanie. Pozostało udowodnić, że Lm_2 przyjmuje wartości niewyróżnione przy jakichś wartościowaniach. Weźmy dla obu matryc wartościowanie dla zmiennych p i q odpowiednio 1 i $\underline{1}$. I teraz liczymy wartości końcowe tych wartościowań. W pierwszej matrycy mamy: $L1 \to (\underline{1} \to L\underline{1}) = 1 \to (\underline{1} \to \underline{0}) = 1 \to \underline{0} = 0$. W drugiej zaś mamy: $L1 \to (\underline{1} \to L\underline{1}) = 1 \to (\underline{1} \to 0) = 1 \to 0 = 0$. W obu przypadkach wartościowania formuły Lm_2 przyjmują wartości niewyróżnione. A więc nie jest ona tautologią w każdej z tych matryc. □

Kluczowym rezultatem tej pracy jest

Twierdzenie 3. Nie istnieje jedyny aksjomat logiki modalnej Łukasiewicza zawierający mniej niż 7 liter.

Dowód. Na początek zauważmy, że każda Ł-tautologia zawiera zmienną, która występuje w niej przynajmniej dwa razy. Jest to prosty wniosek jeśli spojrzymy na matrycę $\mathbf{M}_{as}$. Każda Ł-tautologia musi być tautologią matrycy $\mathbf{M}_{as}$. Ponieważ funktor L w tej matrycy jest asercją, dlatego taka formuła po skreśleniu wszystkich liter L w niej występujących musi być klasyczną tautologią. Gdyby każda zmienna występowała w niej tylko raz, to mielibyśmy klasyczną tautologię o tej własności. Tak nie jest bo każda klasyczna tautologia zawiera przynajmniej jedną zmienną, która się w niej powtarza.

Następnie, obserwując matrycę $\mathbf{M}_1$, można zauważyć, że Ł-tautologie zawierające jedną zmienną nie wystarczają na aksjomatyzację logiki Łukasiewicza. Matryca $\mathbf{M}_1$ zawiera jako podmatryce matryce $\mathbf{M}_{as}$ i $\mathbf{M}_{fl}$. Zauważmy ponadto, że wartości logiczne tych podmatryc są wszystkimi wartościami matrycy $\mathbf{M}_1$. Każde zatem wartościowanie formuły z jedną zmienną rozpatrywane w $\mathbf{M}_1$ będzie rozpatrywane *de facto* w matrycach $\mathbf{M}_{as}$ i $\mathbf{M}_{fl}$. A więc wszystkie Ł-tautologie z jedną zmienną będą weryfikowane w matrycy $\mathbf{M}_1$ pozytywnie. Formuła Lm_2 nie jest tautologią $\mathbf{M}_1$, a więc na mocy lematu nie jest wyprowadzalna z Ł-tautologii z jedną zmienną. Ponieważ formuła Lm_2 jest Ł-tautologią, a więc nie da się zaksjomatyzować logiki Łukasiewicza za pomocą formuł z jedną zmienną.

Z kolei, obserwując matrycę $\mathbf{M}_2$, można zauważyć, że Ł-tautologie nie zawierające funktora L stojącego przed zmienną nie wystarczają na aksjomatyzację logiki Łukasiewicza. Funktor L stoi wtedy zawsze przed formułą, a nie zmienną. Zauważmy, że przy wartościowaniach takich formuł nigdy nie będziemy liczyli w naszej matrycy wyrażenia $L\underline{1}$. Czyli moglibyśmy dla weryfikacji takich formuł w naszej matrycy $\mathbf{M}_2$ dokonać zmiany $L\underline{1} = 1$. Tak zmodyfikowana matryca $\mathbf{M}_2$ jest homomorficzna z matrycą $\mathbf{M}_{as}$. Wtedy wszystkie Ł-tautologie z funktorem L stojącym tylko przed formułami są tautologiami matrycy $\mathbf{M}_2$, bo są tautologiami $\mathbf{M}_{as}$. A więc na mocy naszego lematu nie da się wyprowadzić z tych formuł Ł-tautologii Lm_2.

Z powyższych ustaleń wynika, że poszukiwany jedyny aksjomat logiki Łukasiewicza musi zawierać przynajmniej dwie zmienne zdaniowe, jedna z nich musi się powtórzyć i musi być użyty przynajmniej raz funktor L stojący przed zmienną zdaniową. Taki aksjomat będzie miał długość przynajmniej 6. Ponieważ szukamy aksjomatu o długości mniejszej niż 7, a więc funktor L będzie użyty dokładnie raz.

Załóżmy, że φ jest takim aksjomatem. Niech p, q będą jego zmiennymi i niech funktor L stoi tylko w jednym miejscu przed zmienną p. Niech teraz φ^* będzie formułą powstałą przez zastąpienie w niej podformuły Lp przez zmienną r. W ten sposób formuła φ^* będzie formułą zbudowaną jedynie przez funktory klasyczne. Łatwo widzieć, że tezą klasyczną jest formuła $\varphi^*(q/p) \rightarrow (\varphi^*(q/\neg p) \rightarrow \varphi^*)$. Stosując teraz podstawienie r/Lp, otrzymujemy jako podstawienie tezy klasycznej formułę $\varphi(q/p) \rightarrow (\varphi(q/\neg p) \rightarrow \varphi)$. Ponieważ formuła φ z założenia jest Ł-tautologią, a więc będą nimi także formuły $\varphi(q/p)$ i $\varphi(q/\neg p)$. A więc formuła φ jest wyprowadzalna na mocy tez klasycznych z formuł z jedną zmienną $\varphi(q/p)$ i $\varphi(q/\neg p)$. Czyli logika Łukasiewicza dałaby się zaksjomatyzować za pomocą formuł z jedną zmienną. A jak wyżej stwierdziliśmy, jest to niemożliwe. Dlatego φ nie może być jedynym aksjomatem logiki Łukasiewicza. □

Łatwo zauważyć, że jedynych aksjomatów logiki Łukasiewicza o długości 7 jest więcej. Wystarczy odwrócić argumenty równoważności w podanym tutaj aksjomacie Ax.

LITERATURA

[1] LEMMON, E[dward] J. „Algebraic semantics for modal logics II". *The Jornal of Symbolic Logic* 31 (1996), 2:191–218.

[2] ŁUKASIEWICZ, Jan. „A system of modal logic". *The Journal of Computing Systems* 1 (1953), 3: 111–149.

[3] TKACZYK, Marcin. „On axiomatization of Łukasiewicz's four-valued modal logic". *Logic and Logical Philosophy* 20 (2011), 3: 215–232.

NAJKRÓTSZE AKSJOMATY
MODALNEJ LOGIKI ŁUKASIEWICZA

S t r e s z c z e n i e

Pokazujemy, że formuła CLpEqLq aksjomatyzuje logikę modalną Łukasiewicza i nie istnieje krótszy aksjomat dla tej logiki.

THE SHORTEST AXIOMS
OF ŁUKASIEWICZ'S MODAL LOGIC

S u m m a r y

We show that the formula CLpEqLq axiomatizes Łukasiewicz's modal logic and that there exists no shorter axiom for it.

Słowa kluczowe: aksjomatyzacja; logika modalna.
Key words: axiomatization; modal logic.

Information about Author: ZDZISŁAW DYWAN – Department of the Foundations of Computer Science, Institute of Philosophy, Faculty of Philosophy at the John Paul II Catholic University of Lublin; address for correspondence: Al. Racławickie 14, PL 20-950 Lublin; e-mail: zdzislaw.dywan@kul.pl